MATEMÁTICA BÁSICA 2

VECTORES

Y

MATRICES

CON NÚMEROS COMPLEJOS

R. FIGUEROA G.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ediciones

LIMA - PERÚ

Categoría

- Administración
- Algebra
- Análisis Matemático
- Anatomía
- Arquitectura
- Arte
- Artículos
- Astronomía
- Atlas
- AudioLibros
- Automatización
- Base de Datos
- Biblia
- Biología
- Bioquímica
- Cálculo
- Circuitos
- Cirugía
- Cocina
- Comic
- Computer Hoy
- Contabilidad
- De Todo
- Derecho
- Dermatología
- Diarios
- Diccionario
- Diseño Grafico
- Diseño Web
- Documentales
- Dummies
- E-Books
- Ecografía
- Ecología
- Economía
- Ecuaciones diferenciales
- Educación Primaria
- Ejemplos
- Electricidad
- Electrónica
- Enciclopedia
- Estadística
- Filosofía
- Física
- Fisiologia
- Ganar dinero en internet
- Geologia
- Geometria
- Ginecologia y Obstetricia
- Guías
- HackCrack
- Hidráulica
- Historia
- Ingeniería
- Ingeniería ambiental
- Ingeniería Civil
- Ingeniería de Materiales
- Ingeniería de Minas
- Ingeniería Industrial
- Ingeniería Petrolera
- Ingles
- Integrales
- Inv. Operaciones
- Leer Online
- Libros
- Libros Copyleft
- Libros Unicef
- Liderazgo y Motivación
- Linux
- Logística
- Maestra Infantil
- Manga
- Manual
- Manualidades
- Marketing
- Matemática Discreta
- Matemáticas
- Mecánica
- Medicina
- Metalurgia
- Mi Novela Favorita
- Multimedia
- Noticias
- Odontología
- Ofimática
- Oftalmología
- Pediatría
- Procesos Unitarios
- Programación
- Psicología
- Química
- Radiología
- Recetas
- Redes
- Religión
- Revistas
- Rincón Literario
- Robótica
- Romántica
- Salud
- Seguridad
- Sexualidad
- Sistemas Operativos
- Sobre Escribir
- Soldadura
- Solucionario
- Termodinámica
- Tésis
- Topografía
- Transferencia de Calor
- Transferencia de Masa
- Tutorial
- TuxInfo
- VideoTutoriales
- Windows
- zoología

MATEMÁTICA BÁSICA 2

VECTORES Y MATRICES

CON NÚMEROS COMPLEJOS

QUINTA EDICIÓN
2005

© Impreso en:
Ediciones

Jr. Loreto 1696 Breña Telefax: 423-8469
e-mail: ediciones_2@hotmail.com

HECHO EL DEPÓSITO LEGAL N° 1501052001-3466
RAZÓN SOCIAL : **RICARDO FIGUEROA GARCÍA**
DOMICILIO : Jr. Loreto 1696 Breña

PROLOGO

Dada la gran acogida que le dispensaron los estudiantes a la ediciones preliminares de esta obra, explica la aparición de esta nueva edición ampliada a nueve capítulos, en la que se han hecho las modificaciones necesarias con el propósito de hacer más asequible su lectura, pues la obra proporciona una excelente preparación para el estudio de cursos superiores como el Análisis Matemático y sobre todo, el Algebra Lineal.

El estudiante que ha llegado a este curso ya tiene conocimientos del Algebra y la Geometría elemental. Es así que en el primer capitulo se desarrolla la relación que existe entre estos dos grandes campos de la matemática, esto es, el estudio de la técnica de los vectores en el plano (sistema bidimensional). En este capitulo, antes de definir un vector bidimensional, se presenta el espacio numérico bidimensional denotado por $\mathbf{R}^2$. En los capítulos 2 y 3 se estudian, por separado, las rectas en el plano y sus aplicaciones, respectivamente. En el capítulo 4 el sistema bidimensional se extiende al tridimensional, el cual se denota por $\mathbf{R}^3$. Los capítulos 5 y 6 proporcionan una introducción vectorial a la geometría analítica sólida al estudiar rectas y planos en $\mathbf{R}^3$. En el capitulo 7 se introduce el estudio de los números complejos, que si bien es cierto, tienen gran semejanza con los vectores en $\mathbf{R}^2$, no se debe confundir con estos dos conjuntos de pares ordenados que tienen naturaleza cualitativamente diferentes. En el capitulo 8 se hace referencia al estudio de las matrices de acuerdo con su dimensión o tamaño y sus aplicaciones a la solución de ecuaciones lineales. Finalmente, en el capitulo 9 se expone la teoría de los determinantes de particular importancia en la teoría de las matrices y sus numerosas aplicaciones.

Con este libro se tiene la intensión de desarrollar la capacidad del estudiante y crea en él hábitos de rutina matemática; esto es, la exposición teórica es acompañada de numerosos ejemplos ilustrativos y ejercicios con sus respuestas dadas al final del libro, los cuales, indudablemente, ayudarán al estudiante a adquirir destreza y afirmar el dominio de la materia. Por ello, se recomienda que los ejercicios propuestos se resuelvan sistemáticamente, toda vez que su solución obedece a un criterio de aprendizaje progresivo.

Mi reconocimiento a todos los amigos profesores que tuvieron la gentileza de hacerme llegar sus sugerencias y observaciones a las ediciones preliminares. Sus críticas constructivas hicieron posible corregir, mejorar y ampliar esta nueva edición. Así mismo deseo expresar un especial reconocimiento a **Ediciones RFG** cuyo personal no ha escatimado esfuerzos para resolver las dificultades inherentes a la publicación del texto.

El autor

CONTENIDO

1.1 COORDENADAS RECTANGULARES

El propósito de esta sección es el de definir el concepto de *par ordenado* de elementos, introducir una notación para representar tales pares y definir y estudiar operaciones algebraicas sobre *pares ordenados* de números reales. Empecemos entonces a definir el producto cartesiano de dos conjuntos.

DEFINICION 1.1 *El producto cartesiano de dos conjuntos*

Si A y B son dos conjuntos dados, entonces el *producto cartesiano* de A y B , denotado por A x B , es el conjunto de todas las posibles parejas ordenadas (a , b) para las cuales la primera componente es un elemento de A y la segunda componente es un elemento de B. En símbolos escribimos :

$$A \times B = \{ (a , b) \mid a \in A , b \in B \}$$

Por ejemplo , si $A = \{ 2 , 3 , 5 \}$ y $B = \{ a , b \}$, entonces

$$A \times B = \{ (2 , a) , (2 , b) , (3 , a) , (3 , b) , (5 , a) , (5 , b) \}$$

El producto cartesiano con el que trataremos en este libro es **R x R**, denotado mediante $\mathbf{R}^2$, que se define como el conjunto infinito de parejas ordenadas de números reales. En símbolos :

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{ (x , y) \mid x \in \mathbf{R} , y \in \mathbf{R} \}$$

Así como el conjunto R de los números reales es representado geométricamente por una *recta real*, el conjunto $\mathbf{R}^2$ se representa geométricamente mediante un plano llamado *plano real*.

El plano real consta de dos rectas perpendiculares entre si, llamados *ejes de coordenadas*, y su punto de intersección O se llama *origen de coordenadas*. Las cuatro regiones en los que los ejes de coordenadas dividen al plano se llaman *cuadrantes*, y se numeran I, II, III y IV como se muestra en la Figura 1.1.

Las distancias desde O a los puntos sobre los ejes son *distancias dirigidas*, es decir positivas a la derecha y negativas a la izquierda sobre el eje X y positivas hacia arriba y negativas hacia abajo sobre el eje Y. La Figura 1.1 muestra los signos de los componentes de cada par (x , y) en los cuatro cuadrantes.

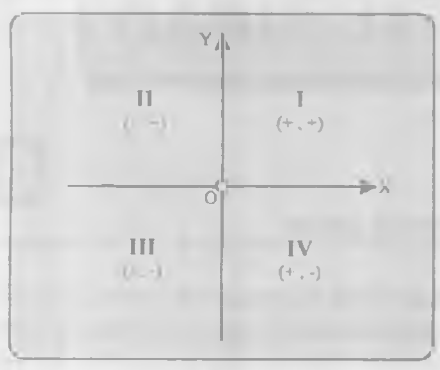


FIGURA 1.1

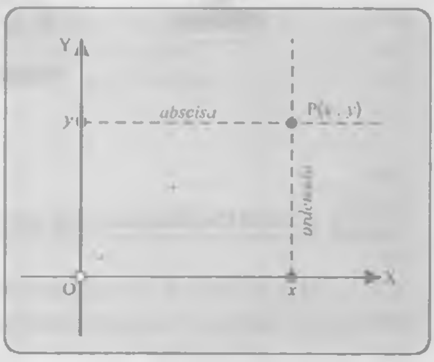


FIGURA 1.2

Establezcamos ahora una correspondencia biunívoca entre los puntos P del plano y los elementos (x , y) de $\mathbb{R}^2$. El asociar a cada par ordenado (x , y) un punto P se lleva a cabo como sigue :

1. Por el punto que corresponda al número x sobre el eje horizontal (eje de abscisas) se traza una recta paralela al eje vertical.
2. Por el punto que corresponda al número y sobre el eje vertical (eje de ordenadas) se traza una recta paralela al eje horizontal.
3. Al punto de intersección P de estas rectas se le asocian las coordenadas (x , y). P se llama "la gráfica de (x , y)" o simplemente "el punto (x , y)".

Obsérvese que todo P del plano determina un par (x , y) de números reales, que son su abscisa y su ordenada, y recíprocamente, todo par (x , y) determina un punto P (Figura 1.2). Este medio de establecer una correspondencia uno a uno (biunívoca) se llama *sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas*.

Debido a que existe esta correspondencia uno a uno, si dos pares ordenados corresponden al mismo punto, los pares deben ser iguales. Tenemos entonces la siguiente definición.

DEFINICION 1.2 *Igualdad de pares ordenados*

La igualdad de pares (a , b) y (c , d) se define con

$$(a , b) = (c , d) \Leftrightarrow a = c \text{ y } b = d$$

Ejemplo 1 Para qué valor o valores de x se tiene que

$$(2x^2 - 7x + 1 , 3x - 1) = (-2 , 8)$$

Solución. De la Definición 1.2 , se sigue que :

$$(2x^2 - 7x + 1 = -2) \wedge (3x - 1 = 8)$$

de donde : $(2x^2 - 7x + 3 = 0) \wedge (3x - 9 = 0) \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ó } x = 1/2) \wedge (x = 3)$

El número que buscamos es la solución común , esto es, x = 3 ■

Ejemplo 2 Hallar los elementos del conjunto

$$A = \{ (x , y) \mid (2x^2 + 7x , 4y^2 - 19y) = (x , -12) \}$$

Solución. Según la Definición 1.2, se debe cumplir que :

$$(2x^2 + 7x = x) \wedge (4y^2 - 19y = -12)$$

$$\Rightarrow (2x^2 + 6x = 0) \wedge (4y^2 - 19y + 12 = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ó } x = -3) \wedge (y = 3/4 \text{ ó } y = 4)$$

Por lo tanto : $A = \{ (0 , 3/4) , (0 , 4) , (-3 , 3/4) , (-3 , 4) \}$ ■

Una propiedad importante que debe recordarse es que si se emplea una misma escala en ambos ejes coordenados, entonces la distancia que separa a dos puntos $A(x_1 , y_1)$ y $B(x_2 , y_2)$ en el plano es. por definición, la longitud del segmento de recta que los une. El siguiente teorema establece una fórmula de la distancia en términos de las coordenadas de los dos puntos.

TEOREMA 1.1 *Fórmula de la distancia*

Dados dos puntos $A(x_1 , y_1)$ y $B(x_2 , y_2)$ en el plano, la distancia entre los dos puntos viene dada por la fórmula

$$d(A , B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Demostración. La demostración se basa en el teorema de Pitágoras. En efecto, en el triángulo rectángulo ACB de la Figura 1.3

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{AC}|^2 + |\overline{CB}|^2$$
$$= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

y de aquí obtenemos :

$$d(A , B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 3 Demuestre que el triángulo ABC con vértices A(1 , -3), B(3 , 2) y C(-2 , 4) es un triángulo isósceles.

Demostración. La fórmula de la distancia da

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(3-1)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{29}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(3+2)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{29}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(1+2)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{58}$$

Dado que $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$, queda probado que el triángulo ABC es isósceles.
Como $|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 = |\overline{AC}|^2$, la *recíproca* del teorema de Pitágoras implica además que ABC es un triángulo rectángulo. ■

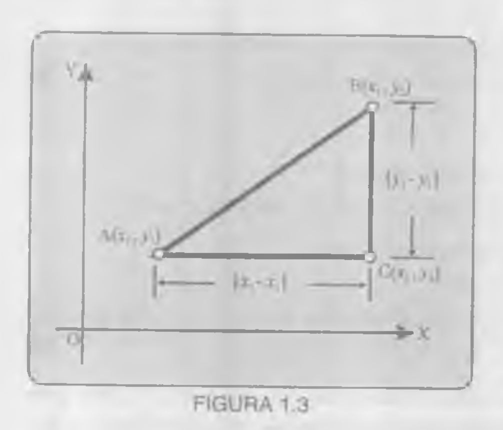


FIGURA 1.3

FIGURA 1.4

EJERCICIOS : *Grupo 1*

En los ejercicios 1 - 6, determine para qué números reales la ecuación es válida. Si no existe solución, indíquelo.

1. $(x - 2y , 2x + y) = (-1 , 3)$
2. $(2x + 3y , x + 4y) = (3 , -1)$
3. $(x^2 - 2x , x^2 - x) = (3 , 6)$
4. $(x^2 + 2x , 2x^2 + 3x) = (-1 , -1)$
5. $(x^2 - y^2 , 4) = (12 , xy - y^2)$
6. $(x^2 - xy , 3) = (12 , xy - y^2)$
7. Hallar los elementos del conjunto

$$S = \{(x , y) \mid (x^2 + 2xy , 3x^2 + 2y^2) = (16 , 4xy + 6)\}$$

8. Hallar los elementos del conjunto

$$S = \{(x , y) \mid (x^3 - y^3 , 6) = (19 , x^2y - xy^2)\}$$

9. Sean los pares ordenados $A = (2x + y - 3 , 5y - x - 8)$ y $B = (x + 3y - 11 , 2x + 3y + 4)$; si A = B, encontrar el valor de $S = 4x + 5y$
10. Determínese gráficamente las coordenadas del punto I de intersección de la recta que pasa por A(2 , 3) y B(-1 , 4) y la recta que pasa por C(-1 , 0) y D(-2 , 3).
11. Hallar x de modo que la distancia de A(2 , -1) a B(x , 2) sea 5.
12. Demuestre que los puntos A(-4 , 4), B(-2 , -4) y C(6 , -2) son los vértices de un triángulo isósceles.
13. Probar que los puntos A(4 , 0), B(2 , 1) y C(-1 , -5) son vértices de un triángulo rectángulo.
14. Usar la fórmula de la distancia para determinar que los puntos A(-2 , -5) , B(1 , -1) y C(4 , 3) están sobre una recta.
15. Demuestre que $M\left(\frac{a+c}{2} , \frac{b+d}{2}\right)$ es punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos $A(a , b)$ y $B(c , d)$

1.2 R^2 COMO ESPACIO VECTORIAL

Tomando al conjunto **R** de números reales hemos construido el producto cartesiano **R x R**, al cual simbolizamos por

$$\mathbf{R}^2 = \{ (x , y) \mid x \in \mathbf{R} , y \in \mathbf{R} \}$$

Un hecho de fundamental importancia en este conjunto es que podemos definir en él dos operaciones entre sus elementos similares a la adición y multiplicación de números reales. Este hecho hace que tal conjunto tenga una estructura algebraica llamada *espacio vectorial* y que, por tanto, nos podamos referir a él no solo como el "el conjunto $\mathbf{R}^2$", sino como el "espacio $\mathbf{R}^2$". Las operaciones que definimos en $\mathbf{R}^2$ son :

DEFINICION 1.3 *Adición de pares ordenados de números reales*

Si $A = (a_1 , a_2)$ y $B = (b_1 , b_2)$ son dos pares ordenados en $\mathbf{R}^2$, definimos su *suma* como

$$A + B = (a_1 + b_1 , a_2 , b_2)$$

A la operación que a cada par le hace corresponder su suma la llamaremos ***adición*** de pares ordenados.

Por ejemplo, si $A = (3 , 5)$ y $B(1 , -8)$, entonces :

$$A + B = (3 + 1 , 5 + (-8)) = (4 , -3)$$

DEFINICION 1.4 *Multiplicación de un número real por un par ordenado*

Si $A = (a_1, a_2)$ es un elemento de $\mathbf{R}^2$, y r es un número real (llamado escalar), definimos su producto como

$$rA = (ra_1, ra_2)$$

A la operación que hace corresponder a cada número real y cada par ordenado su producto escalar la llamaremos *multiplicación* de un número real por un par ordenado.

Por ejemplo, si $A = (-2, 6)$ y $r = 3/2$, entonces :

$$rA = \frac{3}{2}(-2, 6) = \left(\frac{3}{2}(2), \frac{3}{2}(6)\right) = (-1, 9)$$

Obsérvese que, según estas definiciones, tanto la suma de pares como la multiplicación de un escalar por un par ordenado, son nuevamente elementos de $\mathbf{R}^2$. Por ello se dice que estas operaciones son *cerradas* en $\mathbf{R}^2$.

Estas dos operaciones gozan de propiedades muy importantes que se indican en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.2 *Propiedades de los pares ordenados*

Dados los pares ordenados A, B, C $\in \mathbf{R}^2$ y los escalares r, s $\in \mathbf{R}$, se cumplen las siguientes propiedades para la adición de pares ordenados y la multiplicación de escalares por pares ordenados.

A_1 : Si $A, B \in \mathbf{R}^2 \Rightarrow (A + B) \in \mathbf{R}^2$ (Clausura)

A_2 : Si $A, B \in \mathbf{R}^2 \Rightarrow A + B = B + A$ (Conmutatividad)

A_3 : Si $A, B, C \in \mathbf{R}^2 \Rightarrow (A + B) + C = A + (B + C)$ (Asociatividad)

A_4 : Propiedad del elemento identidad para la adición de pares
$\exists!\, \theta \in \mathbf{R}^2 \mid A + \theta = \theta + A = A,\ \forall A \in \mathbf{R}^2$ ($\theta = (0, 0)$)

A_5 : Propiedad del elemento inverso para la adición de pares
$\exists!\, -A \in \mathbf{R}^2 \mid A + (-A) = (-A) + A = \theta,\ \forall A \in \mathbf{R}^2$

M_1 : Si $r \in \mathbf{R}$ y $A \in \mathbf{R}^2 \Rightarrow rA \in \mathbf{R}^2$ (Clausura)

M_2 : $\exists\, 1 \in \mathbf{R} \mid 1A = A,\ \forall A \in \mathbf{R}^2$ (Existencia del elemento neutro)

D_1 : $r(A + B) = rA + rB,\ \forall r \in \mathbf{R},\ \forall A, B \in \mathbf{R}^2$ (Ley distributiva)

D_2 : $(r + s)A = rA + sA,\ \forall r, s \in \mathbf{R},\ \forall A \in \mathbf{R}^2$ (Ley distributiva)

D_3 : $r(sA) = (rs)A,\ \forall r, s \in \mathbf{R},\ \forall A \in \mathbf{R}^2$ (Ley distributiva)

Se deja al lector la demostración de cada una de estas propiedades haciendo uso de las propiedades respectivas de los números reales.

DEFINICION 1.5 *El espacio vectorial*

El *espacio vectorial* V es un conjunto de elementos, llamados *vectores*, junto con un conjunto de elementos, llamados *escalares*, con dos operaciones llamadas *adición vectorial* y *multiplicación escalar* tales que para cada par de vectores **A** y **B** en V y para todo escalar r, un vector **A** + **B** y un vector r**A** están definidos de tal forma que las propiedades del Teorema 1.2 se satisfacen.

El Teorema 1.2 nos demuestra que el conjunto $\mathbf{R}^2$ es un espacio vectorial sobre **R**, denotado por V_2. Por tanto a los pares representados por $\langle x, y\rangle$ también los llamaremos vectores.

DEFINICION 1.6 *Vectores en el plano*

Un vector en el plano es un par ordenado de números reales de la forma $\langle x, y\rangle$, donde x e y son las *componentes* del vector.

Para denotar vectores se utilizan letras en negritas tales como **A**, **B**, **C**, **a**, **b**, **c**, **v**, **x**, **y**, **z**. En la escritura a mano se usan los símbolos como $\vec{A}$, $\vec{a}$, de tal forma que un vector **A** de componentes escalares x e y se escribirá $\mathbf{A} = \langle x, y\rangle$, para distinguirlo del punto A(x , y). Para denotar los números o escalares, se usarán letras minúsculas tales como *a*, *b*, *c*, r, s, t, x, y, z, como contraste con los vectores.

Dado dos vectores en V_2, $\mathbf{A} = \langle x_1, y_1\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle x_2, y_2\rangle$, podemos definir

1. Si $\mathbf{A} = \mathbf{B} \Leftrightarrow (x_1 = x_2) \wedge (y_1 = y_2)$ (Igualdad de vectores)
2. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle$ (Definición 1.3)
3. $r\mathbf{A} = \langle rx_1, rx_2\rangle$ (Definición 1.4)

Ejemplo 1 Si $\mathbf{A} = \langle -2, 3\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 4, -1\rangle$, hallar el vector $\mathbf{V} = 2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$

Solución. Si $\mathbf{V} = 2\langle -2, 3\rangle + 3\langle 4, -1\rangle \Rightarrow \mathbf{V} = \langle -4, 6\rangle + \langle 12, -3\rangle$ (Def. 1.4)

$= \langle -4 + 12, 6 - 3\rangle$ (Def. 1.3)

$= \langle 8, 3\rangle$ ■

Ejemplo 2 Hallar el vector **x** en la ecuación

$$2\langle -1, 2\rangle + 3\mathbf{x} = \langle 4, -5\rangle$$

Solución. Supongamos que $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2\rangle$, entonces en la ecuación dada :

$$2\langle -1 , 2\rangle + 3\langle x_1 , x_2\rangle = \langle 4 , -5\rangle$$
$$\Rightarrow \langle -2 , 4\rangle + \langle 3x_1 , 3x_2\rangle = \langle 4 , -5\rangle \qquad \text{(Def. 1.4)}$$
$$\Rightarrow \langle -2 + 3x_1 , 4 + 3x_2\rangle = \langle 4 , -5\rangle \qquad \text{(Def. 1.3)}$$

Por la igualdad de vectores : $\begin{cases} -2 + 3x_1 = 4 \Leftrightarrow x_1 = 2 \\ 4 + 3x_2 = -5 \Leftrightarrow x_2 = -3 \end{cases}$

Por tanto, el vector buscado es : $\mathbf{x} = \langle 2 , -3\rangle$ ■

Ejemplo 3 Hallar todos los números reales r y s tales que

$$r\langle 4 , -6\rangle + s\langle 5 , -2\rangle = \langle 7 , 6\rangle$$

Solución. $\langle 4r , -6r\rangle + \langle 5s , -2s\rangle = \langle 7 , 6\rangle$ (Def. 1.4)

$\langle 4r + 5s , -6r - 2s\rangle = \langle 7 , 6\rangle$ (Def. 1.3)

Por la igualdad de vectores : $\begin{cases} 4r + 5s = 7 \\ -6r - 2s = 6 \end{cases}$

Resolviendo el sistema obtenemos los números : $r = -2$, $s = 3$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 2*

1. Dados $\mathbf{A} = \langle 3 , -4\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 8 , -1\rangle$ y $\mathbf{C} = \langle -2 , 5\rangle$, hallar el vector **V**, si :
   a) $\mathbf{V} = 3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{C}$ c) $\mathbf{V} = 2(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + 3\mathbf{C}$
   b) $\mathbf{V} = 4\mathbf{A} + \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{C})$ d) $\mathbf{V} = 2(\mathbf{A} + \mathbf{C}) + \frac{1}{3}(\mathbf{B} - 2\mathbf{C})$
2. Hallar el vector **X** en las siguientes ecuaciones :
   a) $3\langle 0 , -2\rangle + 2\mathbf{X} - 5\langle 1 , 3\rangle = \langle -3 , -5\rangle$
   b) $\langle 15 , -12\rangle + 2[\langle -6 , 5\rangle + \mathbf{X}] = 4\langle 1 , -2\rangle$
   c) $2\mathbf{X} - 3\langle 1 , -2\rangle = 5\langle -1 , 3\rangle - \mathbf{X}$
3. En las siguientes relaciones hallar, si existen, todos los números reales r y s
   a) $r\langle -2 , 3\rangle - s\langle 8 , 1\rangle = \langle 16 , 15\rangle$ c) $r\langle -2 , 3\rangle + s\langle 4 , -6\rangle = \langle 0 , 2\rangle$
   b) $r\langle 5 , 1\rangle + s\langle -3 , 5\rangle = \langle -2 , 8\rangle$ d) $r\langle 4 , 3\rangle + s\langle -1 , 2\rangle = \langle 2 , -26\rangle$
4. Si $\langle 1 , 5\rangle + 2\mathbf{x} = \langle 7 , -3\rangle$, hallar r y t , tales que $\langle -3 , 2\rangle = r\,\mathbf{x} + t\langle 2 , -4\rangle$
5. Si $\mathbf{A} = \langle n , m\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 1 , -2\rangle$, $\mathbf{C} = \langle -1 , -3\rangle$ y $m\mathbf{A} + n\mathbf{B} - \mathbf{C} = \langle 0 , m^2\rangle$, hallar el valor de $3m + 2n$
6. Si $\mathbf{A} = \langle m , n\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 2 , -3\rangle$ y $\mathbf{C} = \langle -1 , 1\rangle$, hallar m y n para que se cumpla
   $$m\mathbf{A} + n\mathbf{B} + \mathbf{C} = 2n\langle 1 , 0\rangle$$

7. Si $\mathbf{A} = \langle 2 , 3\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 3 , -2\rangle$ y $\mathbf{C} = \langle 4 , -1\rangle$, resolver la ecuación
   $$2\mathbf{A} - 3[\tfrac{1}{2}(\mathbf{B} - 3\mathbf{C}) + \tfrac{3}{4}\mathbf{X}] = \tfrac{1}{4}\mathbf{X} + 3\mathbf{C}$$
8. Hallar los elementos del conjunto
   $$\mathbf{V} = \{ \langle m , n\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \langle |2m - 1| , |2m + 1| \rangle = \langle 5 , 9\rangle \}$$
9. Dados los vectores $\mathbf{A} = \langle 3x - 5 , x - 2y + 2\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle x - y - 2 , 3 - 2y\rangle$, hallar x e y tales que $3\mathbf{A} = 4\mathbf{B}$
10. Si $\mathbf{A} = \langle 2m - 3n , 4n - m\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 2 , -3\rangle$, hallar los valores de m y n que hacen que $\mathbf{A} = 5\mathbf{B}$.

1.3 REPRESENTACION GEOMETRICA DE UN VECTOR EN EL PLANO

Geométricamente, cualquier par de puntos distintos S y T en el plano determinan un *segmento de recta orientado* $\overline{ST}$ de S a T. Si representamos este segmento de recta por un vector $\mathbf{V} = \langle x , y\rangle$, mediante una flecha, éste se llama *vector geométrico* cuyo punto inicial es $S(x_1 , y_1)$ y tiene como punto final $T(x + x_1 , y + y_1)$. De este modo un vector $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^2$ puede interpretarse como una traslación descrita por un par de números reales (x , y) , la primera componente indica un desplazamiento paralelo al eje X y la segunda componente un desplazamiento paralelo al eje Y. La Figura 1.5 ilustra seis representaciones del vector $\mathbf{V} = \langle x , y\rangle$. En cada caso , **V** traslada el punto (x_k , y_k) en el punto $(x_k + x , y_k + y)$. Si ambos puntos , el inicial y el final son el origen , entonces a **V** se le llama *vector cero* y se denota mediante $\mathbf{O} = \langle 0 , 0\rangle$.

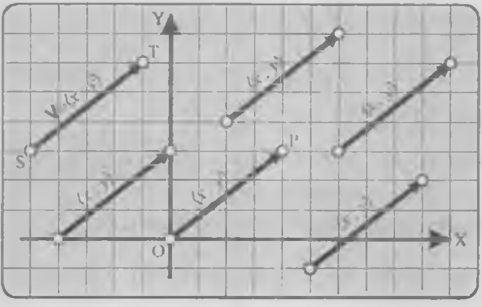


FIGURA 1.5

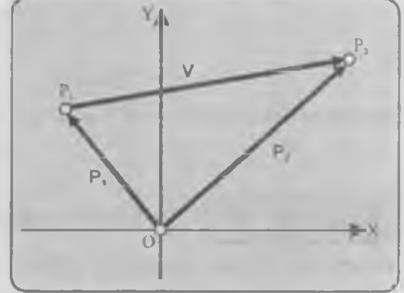


FIGURA 1.6

El segmento de recta dirigido $\overline{OP}$ que va del origen al punto P(x , y) es una *representación ordinaria* del vector $\mathbf{V} = \langle x , y\rangle$ y se dice que la flecha o vector tiene posición ordinaria o estandar. Por esta razón, el vector **V** se llama *vector de posición o radio vector* del punto P(x , y).

DEFINICION 1.7 *Vector Localizado*

Un *vector localizado* en $\mathbb{R}^2$ es una pareja de puntos P_1 y P_2 que se indican con $\overrightarrow{P_1P_2}$ para los cuales P_1 es el punto inicial o de partida y P_2 es el punto final o de llegada (Figura 1.6). Si una flecha tiene como punto inicial a $P_1(x_1, y_1)$ y a $P_2(x_2, y_2)$ como punto final, entones la flecha $\overrightarrow{P_1P_2}$ es una representación geométrica del vector $V = \langle x, y \rangle$, donde :

$$\langle x, y \rangle = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle \qquad (1)$$

Si consideramos a $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ como vectores de posición de los puntos P_1 y P_2 entonces, según la Definición 1.7 :

$$V = \overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$$

de donde :

$$\boxed{V + \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2} \qquad (2)$$

Esta ecuación nos permite conocer analíticamente el punto final P_2 del vector **V** conociendo, desde luego, el punto inicial y las componentes del vector **V**.

OBSERVACION 1.1 Un vector en $\mathbb{R}^2$ puede ser considerado como una función cuyo dominio y rango es el conjunto de puntos en el plano. En efecto, si **V** es el vector que traslada el punto P_1 en el punto P_2 escribimos $\mathbf{V}(P_1) = P_2$. Así si $P_1(x_1, y_1)$ es el punto de partida y $\mathbf{V} = \langle x, y \rangle$ es el vector localizado $\overrightarrow{P_1P_2}$, entonces

$$\mathbf{V}(P_1) = (x_1 + x, y_1 + y) = P_2$$

↓ Dominio ↓ Rango

Debemos notar que si $\mathbf{V}(P_1) = P_1 \Leftrightarrow \mathbf{V} = \langle 0, 0 \rangle$

Ejemplo 1 Hallar $\mathbf{V}(P_1)$. dados $P_1 = (-2, 1)$ y $\mathbf{V} = \langle 3, 4 \rangle$. Graficar $\overrightarrow{P_1P_2}$

Solución. Según la ecuación **(2)** :

$$\mathbf{V}(P_1) = P_2 \Rightarrow P_2 = (x_1 + x, y_1 + y)$$
$$= (-2 + 3, 1 + 4)$$
$$= (1, 5)$$

La gráfica de $\overrightarrow{P_1P_2}$ se muestra en la Figura 1.7 ■

Ejemplo 2 Hallar el vector localizado de $\overrightarrow{P_1P_2}$ si $P_1 = (5, -2)$ y $P_2 = (2, 3)$. Interpretar geométricamente el resultado.

Solución. Según la Definición 1.7 : $\mathbf{V} = \overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$

$$= \langle 2, 3 \rangle - \langle 5, -2 \rangle$$
$$= \langle 2 - 5, 3 - (-2) \rangle = \langle -3, 5 \rangle$$

La gráfica de $\overrightarrow{P_1P_2}$ se muestra en la Figura 1.8, en ella se puede observar la equivalencia del vector localizado $\overrightarrow{P_1P_2}$ y del vector de posición $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$ ■

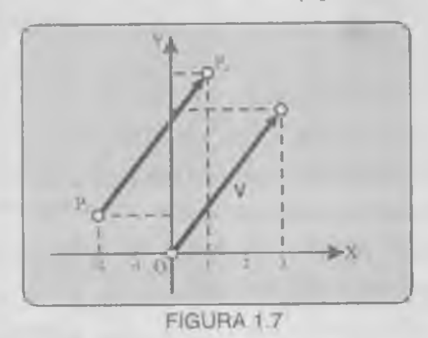


FIGURA 1.7

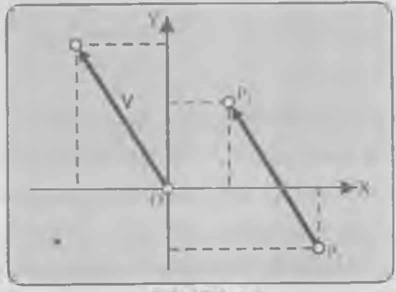


FIGURA 1.8

Ejemplo 3 Un vector que va de A(3 , 5) a B(x , y) representa al mismo vector que va de B(x , y) a C(8 , 1). Hallar B(x , y)

Solución. Sean : $\mathbf{V} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = \langle x, y \rangle - \langle 3, 5 \rangle = \langle x - 3, y - 5 \rangle$

$\mathbf{W} = \overrightarrow{BC} = \mathbf{C} - \mathbf{B} = \langle 8, 1 \rangle - \langle x, y \rangle = \langle 8 - x, 1 - y \rangle$

Si $\mathbf{V} = \mathbf{W} \Rightarrow \langle x - 3, y - 5 \rangle = \langle 8 - x, 1 - y \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 8 - x \Rightarrow x = 11/2 \\ y - 5 = 1 - y \Rightarrow y = 3 \end{cases}$

Por tanto, el punto buscado es B(11/2 , 3) ■

Ejemplo 4 En la Figura 1.9, se tiene :

$\overrightarrow{OP} = x^3$ y $\overrightarrow{OQ} = x^2y$.

Si $\mathbf{b} = \langle y^3 + 19, 6 + xy^2 \rangle$ y $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, hallar el valor de x + y.

Solución. Las componentes del vector **a** son $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$

$$\Rightarrow \mathbf{a} = \langle x^3, x^2y \rangle$$

Luego , si $\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y^3 + 19 \Rightarrow x^3 - y^3 = 19 & (1) \\ x^2y = 6 + xy^2 \Rightarrow x^2y - xy^2 = 6 & (2) \end{cases}$

FIGURA 1.9

Resolviendo (1) y (2) por simultáneas obtenemos : x = 3 , y = 2 ó x = -2 , y = -3. Dado que en la Figura 1.9, $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ son negativos, descartamos la primera alternativa. Por tanto : x + y = -5 ■

EJERCICIOS : Grupo 3

En los ejercicios del 1 al 4, hallar $V(P_1)$, dados V y P_1. Si $P_2 = V(P_1)$, graficar $\overrightarrow{P_1P_2}$.

1. $V = \langle 2 , 6 \rangle$, $P_1 = (1 , 3)$
2. $V = \langle -4 , 1 \rangle$, $P_1 = (-2 , -3)$
3. $V = \langle -3 , 5 \rangle$, $P_1 = (-5 , -2)$
4. $V = \langle 5 , -1 \rangle$, $P_1 = (-2 , 4)$

En los ejercicios del 5 al 8, hallar el punto S(x , y) tal que $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ sean representaciones del mismo vector

5. P(2 , 5) , Q(1 , 6) , R(-3 , 2)
6. P(-1 , 4) , Q(2 , -3) , R(-5 , -2)
7. P(0 , 3) , Q(5 , -2) , R(7 , 0)
8. P(-2 , 0) , Q(-3 , -4) , R(4 , 2)
9. El vector $V = \langle 3 , 2 \rangle$ es el vector localizado del segmento $\overline{AB}$ cuyo punto medio es C(3 , 1). Hallar las coordenadas de los extremos de $\overline{AB}$.
10. Sean los puntos P(5/2 , 5) , Q(1/3 , 13/4) , R(-16/5 , 7/2) y S(x , y). Si $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ representan el mismo vector, calcular el valor de 30x + 80y.
11. Sea $V = \langle 7 , -6 \rangle$ el vector localizado del segmento $\overline{AB}$ y C(5/3 , 3) el punto de trisección más cercano de B, de dicho segmento. Hallar las coordenadas de A y B.
12. En la Figura 1.10 se tiene : $\overline{OP} = x^3$, $\overline{OQ} = 6 - x$
Hallar **a** , si $\mathbf{b} = \langle 9xy - y^3 , y \rangle$ y $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.
13. Sean $A(a , -2)$, B(2 , 4) , C(8 , -3) y
D = { (x , y) | y = 2x + 1}
Si $\overline{AB} = \overline{CD}$, hallar el valor de a - x

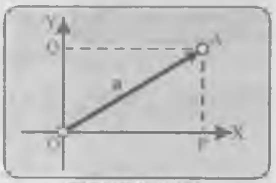


FIGURA 1.10

1.4 MAGNITUD Y DIRECCION DE UN VECTOR EN R^2

Para cada vector $V \in R^2$, $V = \langle x , y \rangle$, existe un escalar o número llamado *norma, módulo o magnitud* de **V**, denotado por $||V||$, tal que :

$$||V|| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (3)$$

La fórmula (3) es coincidente con la noción intuitiva de longitud de un segmento deriva del teorema de Pitágoras. La Figura 1.11 ilustra esta propiedad.

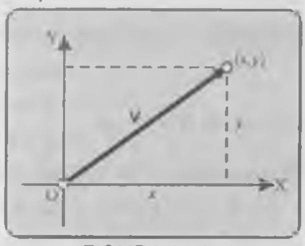


FIGURA 1.11

Ejemplo 1 Hallar la magnitud del vector de extremos A(1 , 3) y B(-2 , 7).

Solución. Si **V** es el vector que va de A a B, entonces

$$V = \overrightarrow{AB} = B - A = \langle -2 - 1 , 7 - 3 \rangle = \langle -3 , 4 \rangle$$

Luego, según la fórmula (3) : $||V|| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5$ ■

TEOREMA 1.3 *Propiedades de la norma de un vector en R^2*

$\forall A , B \in R^2$, y $\forall r \in R$ se cumplen las siguientes propiedades

N_1 : $\forall A \in R^2$, $||A|| > 0$

N_2 : $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = O$

N_3 : $\forall r \in R$, $\forall A \in R^2$, $||rA|| = |r| . ||A||$

N_4 : $\forall A , B \in R^2$, $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$ (Desigualdad triangular)

Demostración de N_1 :

En efecto, si $A = \langle x , y \rangle \Rightarrow ||A|| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Si $x \neq 0 \quad y \neq \Rightarrow ||A|| \neq 0$

Sabemos que si existe la raíz cuadrada de un número, ésta es positiva, por lo tanto, $||A|| > 0$

Demostración de N_2 :

($\Rightarrow$) Si $||A|| = 0 \Rightarrow ||A|| = \sqrt{x^2 + y^2} = 0$. La igualdad se cumple si $x = y = 0$, esto es , $A = \langle 0 , 0 \rangle = O$

($\Leftarrow$) Si $A = O \Rightarrow A = \langle 0 , 0 \rangle \Rightarrow ||A|| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$

Por consiguiente : $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = O$

Demostración de N_3 :

En efecto , si $A = \langle x , y \rangle \Rightarrow rA = \langle rx , ry \rangle$

y $||rA|| = \sqrt{(rx)^2 + (ry)^2} = \sqrt{r^2(x^2 + y^2)} = \sqrt{r^2} . \sqrt{x^2 + y^2}$

$\therefore ||rA|| = |r| \sqrt{x^2 + y^2}$

DEFINICION 1.8 *Dirección de un vector en R^2*

A cada vector no nulo , $V = \langle x , y \rangle \in R^2$, le corresponde una *dirección* dada por la medida del ángulo α (ángulo de dirección de **V**) que forma el vector con el semieje positivo de las X, para el cual

$$\text{Sen}\alpha = \frac{y}{||V||} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad \text{Cos}\alpha = \frac{x}{||V||} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (4)$$

y $0° \leq m(\alpha) \leq 360°$

De las ecuaciones (4) se sigue que

$$V = \langle x , y \rangle = ||V|| \langle \text{Cos}\alpha , \text{Sen}\alpha \rangle \qquad (5)$$

Por tanto, un vector en $\mathbb{R}^2$ queda determinado por su magnitud y dirección.

OBSERVACION 1.2 La dirección m(α) del vector **V** se obtiene de la manera siguiente

Mediante un ángulo de referencia α_1 y haciendo uso de una tabla de valores se halla el valor de α_1 con $0° < m(\alpha_1) < 90°$ para el cual

$$\text{Tg}\,\alpha_1 = \left|\frac{y}{x}\right| \quad , \quad x \neq 0$$

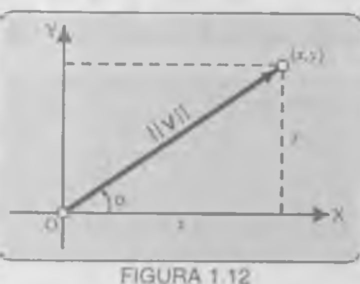


FIGURA 1.12

Si $x > 0$, $y > 0 \Rightarrow m(\alpha) = m(\alpha_1)$ (Cuad. I)
$x < 0$, $y > 0 \Rightarrow m(\alpha) = 180° - m(\alpha_1)$ (Cuad. II)
$x < 0$, $y < 0 \Rightarrow m(\alpha) = 180° + m(\alpha_1)$ (Cuad. III)
$x > 0$, $y < 0 \Rightarrow m(\alpha) = 360° - m(\alpha_1)$ (Cuad. IV)

Desde luego, si $x = 0$ pero $y \neq 0$, entonces $m(\alpha) = 90°$ ó $m(\alpha) = 270°$ respectivamente para $y > 0$ ó $y < 0$.

Ejemplo 2 Hallar la magnitud y dirección del vector $\mathbf{V} = \langle -3 , 4\rangle$

Solución. Según la fórmula (3), la magnitud del vector **V** es

$$||\mathbf{V}|| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5$$

Por las ecuaciones **(4)** la dirección del vector está dada por

$$\text{Sen}\alpha = \frac{4}{5} \quad y \quad \text{Cos}\alpha = -\frac{3}{5}$$

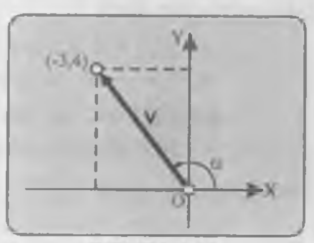


FIGURA 1.13

Dado que $\text{Sen}\alpha > 0$ y $\text{Cos}\alpha < 0$, entonces α está en el II cuadrante.

Angulo de referencia : $\text{Tg}\alpha_1 = \left|\frac{4}{-3}\right| = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha_1 = 53°8'$

Por lo que : $m(\alpha) = 180° - 53°8' = 126°52'$ ■

Ejemplo 3 Expresar el vector $\mathbf{V} = \langle 3 , -3\sqrt{3}\rangle$ en términos de su magnitud y de su ángulo de dirección.

Solución. Según **(3)** : $||\mathbf{V}|| = \sqrt{(3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = 6$

y por las ecuaciones **(4)** :

$$\text{Sen}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad y \quad \text{Cos}\alpha = \frac{1}{2}$$

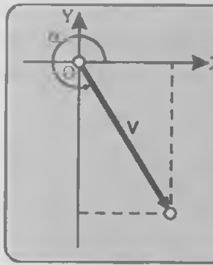


FIGURA 1.14

Como $\text{Sen}\alpha < 0$ y $\text{Cos}\alpha > 0$, entonces α está en el IV cuadrante.

Angulo de referencia : $\text{Tg}\alpha_1 = \left|\frac{y}{x}\right| = \sqrt{3} \Rightarrow m(\alpha_1) = 60°$

Luego, $m(\alpha) = 360° - 60° = 300°$

Por lo que, según la ecuación **(5)** :

$$\mathbf{V} = 6\langle \text{Cos}\,300° , \text{Sen}\,300°\rangle$$ ■

DEFINICION 1.9 Vector unitario

Dado un vector no nulo $\mathbf{V} = \langle x , y\rangle$, llamamos *vector unitario* a un vector $\boldsymbol{u}$ que tiene la misma dirección de **V** tal que :

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathbf{V}}{||\mathbf{V}||} = \left\langle \frac{x}{||\mathbf{V}||} , \frac{y}{||\mathbf{V}||} \right\rangle \qquad (6)$$

o bien

$$\boldsymbol{u} = \langle \text{Cos}\alpha , \text{Sen}\alpha\rangle \qquad (7)$$

Ejemplo 4 Hallar un vector unitario que tiene la misma dirección y sentido del vector $\mathbf{V} = \langle -3 , \sqrt{7}\rangle$

Solución. La norma del vector dado es : $||\mathbf{V}|| = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{7})^2} = 4$

Por la fórmula (6) : $\boldsymbol{u} = \dfrac{\langle -3 , \sqrt{7}\rangle}{4} = \left\langle -\dfrac{3}{4} , \dfrac{\sqrt{7}}{4}\right\rangle$ ■

Ejemplo 5 Hallar un vector de módulo 10, que tenga la misma dirección y sentido opuesto al vector que va de S(4 , 2) a T(1 , 6).

Solución. Sea $\mathbf{A} = \overrightarrow{ST} = \mathbf{T} - \mathbf{S} = \langle 1 - 4 , 6 - 2\rangle = \langle -3 , 4\rangle$

Un vector unitario en la dirección de **A** es : $\boldsymbol{u} = \dfrac{\langle -3 , 4\rangle}{5}$

Luego, el vector buscado es : $\mathbf{V} = -||\mathbf{V}||\,\boldsymbol{u} \Rightarrow \mathbf{V} = \langle 6 , -8\rangle$ ■

Ejemplo 6 Hallar un vector unitario en la dirección del vector **V** de longitud 5, que tiene su punto inicial en (1 , -1) y su punto terminal tiene abscisa 4.

Solución. Si $P_1(1 , -1)$ y $P_2 = (4 , y) \Rightarrow \mathbf{V} = \overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{P_2} - \mathbf{P_1}$

$$= \langle 4 , y\rangle - \langle 1 , -1\rangle$$
$$= \langle 3 , y + 1\rangle \qquad (1)$$

Como $||\mathbf{V}|| = 5 \Rightarrow \sqrt{9 + (y + 1)^2} = 5$

$\Rightarrow (y + 1)^2 = 16 \Leftrightarrow y + 1 = 4$ ó $y + 1 = -4$

$\Leftrightarrow y = 3$ ó $y = -5$

Luego, en (1) : $V = \langle 3, 4\rangle$ ó $V = \langle 3, -4\rangle$

$$\therefore\ u = \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\rangle \text{ ó } u = \langle \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\rangle$$

EJERCICIOS : Grupo 4

En los ejercicios del 1 al 4, se dan las coordenadas de los puntos A y B. Expresar el vector $V = \vec{AB}$ en términos de su magnitud y de su ángulo de dirección.

1. $A(-3, 4)$, $B(-5, 6)$
2. $A(\sqrt{12}, -3)$, $B(\sqrt{27}, -4)$
3. $A(5\sqrt{3}, 4)$, $B(\sqrt{48}, 5)$
4. $A(3\sqrt{5}, -\sqrt{15})$, $B(\sqrt{20}, -\sqrt{60})$
5. Hallar un vector **V** cuya magnitud es igual a la del vector $A = \langle 4, -3\rangle$ y cuya dirección es la misma que la del vector $B = \langle 1, \sqrt{3}\rangle$
6. Hallar un vector de módulo 10 que forma un ángulo de 37º con el eje X positivo. (Sugerencia: Usar Cos 37º = 3/4)
7. Hallar un vector de módulo 15 que forma un ángulo de 53º con el eje Y positivo. (Sugerencia : Usar Cos 53º = 3/5)
8. Hallar un vector que tenga la misma magnitud del vector que va de A(-2 , 3) a B(-5 , 4) y que tenga el sentido opuesto al vector que va de S(9 , -1) a T(12 , -7).
9. Hallar un vector **V** de longitud $6\sqrt{3}$ y que tiene la misma dirección de un vector que forma un ángulo de 30º con el sentido positivo del eje X.
10. Si $V = \langle x, y\rangle$, cuya norma es 6 e $y = \sqrt{3}x$, hallar dicho vector.
11. Hallar un vector unitario en la dirección del vector **V** de longitud 17, que tiene su punto de apoyo en (3 , -12) y su punto terminal tiene ordenada 3.

OPERACIONES VECTORIALES FUNDAMENTALES

1.5 ADICION DE VECTORES EN R^2

Dados dos vectores **A** y **B** en R^2 tales que $A = \langle x_1, y_1\rangle$ y $B = \langle x_2, y_2\rangle$, definimos la adición del modo siguiente :

$$A + B = \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle \qquad (8)$$

Por ejemplo, si $A = \langle 5, -7\rangle$ y $B = \langle -3, 2\rangle$, entonces :

$$A + B = \langle 5 - 3, -7 + 2\rangle = \langle 2, -5\rangle$$

TEOREMA 1.4 *Propiedades de la adición vectorial*

Si **A** , **B** y **C** son vectores en R^2, entonces se cumplen las siguientes propiedades

A_1 : Si A y B $\in R^2 \Rightarrow (A + B) \in R$ — Clausura

A_2 : $A + B = B + A$ — Conmutatividad

A_3 : $(A + B) + C = A + (B + C)$ — Asociatividad

A_4 : $\exists! O \in R^2$, $\forall A \in R^2 \mid A + O = O + A = A$ — Elemento neutro para la adición

A_5 : $\forall A \in R^2$, $\exists(-A) \in R^2 \mid A + (-A) = (-A) + A = O$ — Opuesto de un vector

Demostración de A_1 :

En efecto, si $A = \langle x_1, y_1\rangle$ y $B = \langle x_2, y_2\rangle$, entonces, por (8) :

$$A + B = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle$$

Puesto que la adición es cerrada en $R \Rightarrow (x_1 + x_2) \in R$ y $(y_1 + y_2) \in R$

Por lo tanto , $\langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle \in R^2 \Rightarrow (A + B) \in R^2$

Demostración de A_4 : Consta de dos partes : Existencia y Unicidad

Existencia. Si $A = \langle x_1, y_1\rangle$, se tiene

$$A + O = \langle x_1, y_1\rangle + \langle 0, 0\rangle = \langle x_1 + 0, y_1 + 0\rangle = \langle x_1, y_1\rangle = A$$

Análogamente se demuestra que : $O + A = A$

Unicidad. Sea O_1 otro elemento de R^2 que también cumple

$$A + O_1 = O_1 + A = A$$

Esta igualdad es cierta $\forall A \in R^2$, en particular se $A = O$, entonces

$$O + O_1 = O_1 + O = O$$

Análogamente, haciendo $A = O_1$, en A_4 se sigue que

$$O_1 + O = O + O_1 = O_1$$

Luego, las dos igualdades anteriores prueban que

$$O_1 = O$$

Por lo tanto, queda demostrado que : $\exists!\, O \in R^2$, $\forall A \in R^2 \mid A + O = O + A = A$

1.5.1 REPRESENTACION GRAFICA DE LA SUMA DE VECTORES EN R^2

Sean los vectores **A** y **B** en R^2, la flecha que representa a la suma **A + B** se obtiene del modo siguiente

Representamos una traslación a lo largo de una flecha cualquiera que represente al vector $A = \langle x_1, y_1\rangle$ seguida de una traslación del punto final de esta flecha a lo largo de la flecha que representa al vector $B = \langle x_2, y_2\rangle$. La traslación total correspondiente

al vector **A** + **B**. es una flecha que tiene como punto inicial el del vector **A** y como punto final el del vector **B** (Figura 1.15).

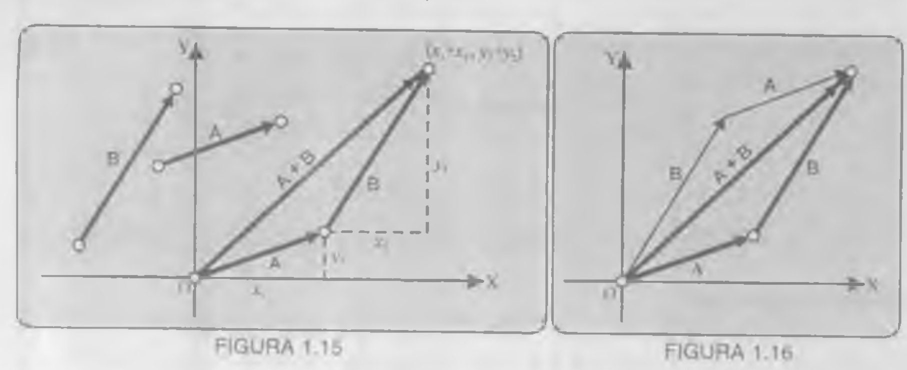


FIGURA 1.15 FIGURA 1.16

La suma **A** + **B** o **B** + **A** se conoce como el *vector resultante* y es la diagonal de un paralelogramo que tiene como lados adyacentes a los vectores **A** y **B**. La obtención de la suma **A** + **B** siguiendo este procedimiento recibe el nombre de *ley del paralelogramo*, que se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1 Dados los vectores **A** = ⟨-1 , 4⟩ y **B** = ⟨3 , 2⟩, hallar **A** + **B** y construir una gráfica que muestre las representaciones ordinarias correspondientes a los vectores.

Solución. Por definición :

A + **B** = ⟨-1 + 3 , 4 + 2⟩

= ⟨2 , 6⟩

En la Figura 1.17, obsérvese que la flecha que va de S a T representa al vector **A** y la flecha que va de R a T representa a **B** (por segmentos de paralelas). ■

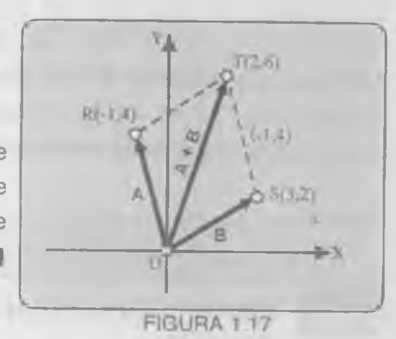


FIGURA 1.17

DEFINICION 1.10 *Negativo de un vector en* $\mathbb{R}^2$

Si **A** ∈ $\mathbb{R}^2$, tal que **A** = ⟨x , y⟩, se denomina *negativo o inverso aditivo* de **A** al vector

-A = ⟨-x , -y⟩

Por ejemplo, el negativo del vector **A** = ⟨-3 , 2⟩ es -**A** = ⟨3 , -2⟩.

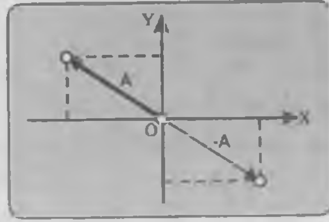


FIGURA 1.18

OBSERVACION 1.3 Dado el vector **A** ∈ $\mathbb{R}^2$ su negativo -**A** ∈ $\mathbb{R}^2$ es colineal, de la misma magnitud, esto es, ||-**A**|| = ||**A**||, pero de sentido opuesto que el vector **A**.

Puesto que para cualquier vector **V** = ⟨x , y⟩ se tiene que :

$$\mathbf{V} + (-\mathbf{V}) = \langle x , y\rangle + \langle -x , -y\rangle = \langle x + (-x) , y + (-y)\rangle = \langle 0 , 0\rangle = \mathbf{O}$$

Esto nos lleva a la definición natural de *diferencia* de dos vectores.

DEFINICION 1.11 *Diferencia de vectores*

Dados dos vectores **A** , **B** ∈ $\mathbb{R}^2$, tales que **A** = $\langle x_1 , y_1\rangle$ y **B** = $\langle x_2 , y_2\rangle$, definimos la diferencia **A** - **B** del modo siguiente :

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = \langle x_1 , y_1\rangle + \langle -x_2 , -y_2\rangle$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} - \mathbf{B} = \langle x_1 - x_2 , y_1 - y_2\rangle \qquad (9)$$

Ejemplo 2 Si **A** = ⟨4 , 2⟩ y **B** = ⟨-3 , 3⟩ , hallar la diferencia **A** - **B** y trazar una gráfica que muestre la representación ordinaria de los tres vectores.

Solución. Según la Definición 1.11 :

A - **B** = ⟨4 , 2⟩ - ⟨-3 , 3⟩ = ⟨4 - (-3) , 2 - 3⟩ = ⟨7 , -1⟩ ■

La representación ordinaria de cada uno de los vectores se muestran en la Figura 1.19. Debemos destacar que el inverso aditivo de ⟨-3 , 3⟩ es ⟨3 , -3⟩ (negativo del vector **B**), que es colineal y de la misma magnitud que ⟨-3 , 3⟩ , pero de sentido opuesto.

La representación geométrica de **A** - **B** puede obtenerse aplicando la regla del paralelogramo a la suma **A** + (-**B**). La Figura 1.20 nos muestra otra manera de representar la diferencia **A** - **B** , que consiste en unir los puntos finales de los vectores **B** y **A**.

OBSERVACION 1.4 Si **A** , **B** ∈ $\mathbb{R}^2$, entonces la diferencia **A** - **B** satisface la condición **B** + (**A** - **B**) = **A**, lo que explica porque algunas veces se dice que la diferencia **A** - **B** es el vector que va de **B** a **A** (Figura 1.20).

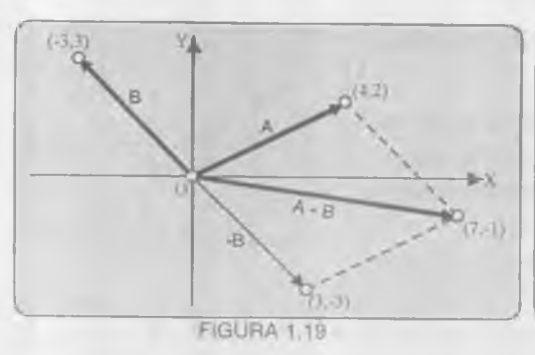


FIGURA 1.19

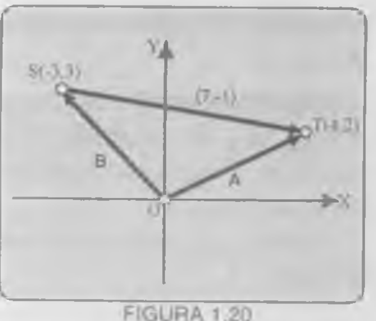


FIGURA 1.20

1.6 MULTIPLICACION DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

Dado un vector $V = \langle x , y \rangle \in \mathbf{R}^2$ y un escalar $r \in \mathbf{R}$, el producto del escalar por el vector es otro vector rV para el cual

$$rV = r\langle x , y\rangle = \langle rx , ry\rangle$$

La magnitud de rV es $||rV|| = |r| \, . \, ||V||$ y su dirección es la misma que la de **V**, aunque su sentido puede ser opuesto, es decir, los vectores **V** y rV son paralelos.

Nota. Al vector rV se denomina *múltiplo escalar* de **V**

REPRESENTACION GRAFICA. Según que r sea positivo o negativo la gráfica de rV puede ser

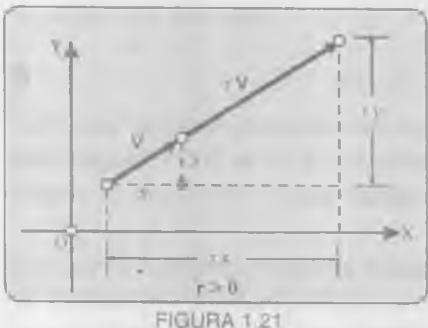


FIGURA 1.21

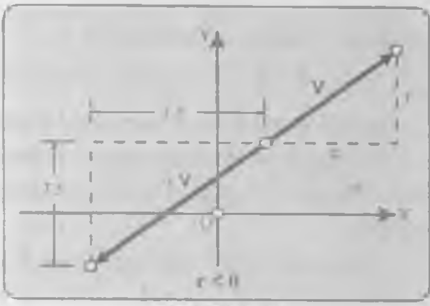


FIGURA 1.22

TEOREMA 1.5 *Propiedades de la multiplicación de un escalar por un vector*

Si **A** y **B** son vectores en $\mathbf{R}^2$ y r, s ∈ **R** (escalares), se cumplen las siguientes propiedades

M_1 : $r\mathbf{A} \in \mathbf{R}^2$ — Clausura

M_2 : $(r s)\mathbf{A} = r(s\mathbf{A})$ — Asociatividad
M_3 : $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$ — Neutro multiplicativo
M_4 : $r\mathbf{A} = \mathbf{O} \Leftrightarrow r = 0$ ó $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ — Cero multiplicativo
M_5 : $-1\mathbf{A} = -\mathbf{A}$ — Inverso multiplicativo
D_1 : $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r\mathbf{A} + r\mathbf{B}$ — Distribuidad respecto a la adición de vectores
D_2 : $(r + s)\mathbf{A} = r\mathbf{A} + s\mathbf{A}$ — Distribuidad respecto a la adición de escalares
M_6 : $||r\mathbf{A}|| = |r| \, . \, ||\mathbf{A}||$ — Magnitud respecto a múltiplos escalares

Demostración de D_1. Si $r \in \mathbf{R}$ y $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^2$, tales que $\mathbf{A} = \langle x_1 , y_1\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle x_2 , y_2\rangle$ demostraremos que : $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r\mathbf{A} + r\mathbf{B}$

En efecto :
$$\begin{aligned}
r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= r(\langle x_1 , y_1\rangle + \langle x_2 , y_2\rangle) \\
&= r(\langle x_1 + x_2 , y_1 + y_2\rangle) && \text{(Adición de vectores)} \\
&= \langle r(x_1 + x_2) , r(y_1 + y_2)\rangle \\
&= \langle r x_1 + r x_2 \, , \, r y_1 + r y_2\rangle && \text{(Múltiplo escalar)} \\
&= \langle r x_1 + r y_1\rangle + \langle r x_2 + r y_2\rangle && \text{(Adición de vectores)} \\
&= r\langle x_1 , y_1\rangle + r\langle x_2 + y_2\rangle && \text{(Múltiplo escalar)} \\
&= r\mathbf{A} + r\mathbf{B}
\end{aligned}$$

Demostración de D_2. Si $r, s \in \mathbf{R}$ y $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^2$, tal que $\mathbf{A} = \langle x , y\rangle$, demostraremos que: $r\mathbf{A} + s\mathbf{A} = (r + s)\mathbf{A}$

En efecto :
$$\begin{aligned}
r\mathbf{A} + s\mathbf{A} &= r\langle x , y\rangle + s\langle x , y\rangle \\
&= \langle r x , r y\rangle + \langle s x , s y\rangle && \text{(Múltiplo escalar)} \\
&= \langle r x + s x \, , \, r y + s y\rangle && \text{(Adición de vectores)} \\
&= \langle (r + s)x , (r + s)y \rangle && \text{(Distribuidad en } \mathbf{R}) \\
&= (r + s)\langle x , y\rangle && \text{(Múltiplo escalar)} \\
&= (r + s)\mathbf{A}
\end{aligned}$$

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Demostrar que $\forall \mathbf{A} \in \mathbf{R}^2 : -(-\mathbf{A}) = \mathbf{A}$

Demostración. En efecto, según la propiedad A_5 :

$\forall \mathbf{A} \in \mathbf{R}^2 , \exists! -\mathbf{A} \in \mathbf{R}^2 \mid \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ (1)

y para el vector $-\mathbf{A} \in \mathbf{R}^2 , \exists! [-(-\mathbf{A})] \mid (-\mathbf{A}) + [-(-\mathbf{A})] = \mathbf{O}$ (2)

En (2), por la propiedad A_2, se tiene : $[-(-\mathbf{A})] + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ (3)

Por (1) y (3) y la unicidad del inverso aditivo se sigue que :

$$-(-\mathbf{A}) = \mathbf{A}$$ ■

Ejemplo 2 Demostrar que si : $A = B \Rightarrow A + C = B + C$, $\forall C \in R^2$

Demostración. Por la propiedad A_4 se sabe que

$$\exists!\ O \in R^2 \mid B = B + O \ , \ \forall B \in R^2$$

Por hipótesis : $A = B$, entonces , $A = B + O$ (1)

Por la propiedad A_5 : $\exists!\ (-C) \in R^2 \mid C + (-C) = O$, $\forall\ C \in R^2$ (2)

Sustituyendo (2) en (1) se sigue que :

$$A = B \Rightarrow A = B + [C + (-C)]$$
$$\Rightarrow A = (B + C) + (-C) \quad (A_3)$$
$$\Rightarrow A - (-C) = (B + C) + [(-C) - (-C)]$$
$$\Rightarrow A + C = (B + C) + O \quad \text{(Ejemplo 1 y } A_5)$$
$$\therefore\ A = B \Rightarrow A + C = B + C \ , \ \forall C \in R^2 \quad ■$$

Ejemplo 3 Sea **x** un vector tal que $\langle 3 , -4\rangle = x + \langle 1 , -6\rangle$.
Si $\langle 3 , -2\rangle = tx + r\langle -2 , 1\rangle$, hallar el valor de $3r + 6t$

Solución. En la primera ecuación se tiene :

$$\langle 3 , -4\rangle - \langle 1 , -6\rangle = x + [\langle 1 , -6\rangle - \langle 1 , -6\rangle]$$
$$\Rightarrow \langle 3 - 1 , -4 - (-6)\rangle = x + O \quad \text{(Definición 1.11 y } A_5)$$
$$\Rightarrow \langle 2 , 2\rangle = x$$

Luego, si $\langle 3 , -2\rangle = t\langle 2 , 2\rangle + r\langle -2 , 1\rangle$

$$= \langle 2t , 2t\rangle + \langle -2r , r\rangle \quad \text{(Múltiplo escalar)}$$
$$= \langle 2t - 2r , 2t + r\rangle \quad \text{(Adición de vectores)}$$

De la igualdad de vectores se sigue que : $3 = 2t - 2r$ y $-2 = 2t + r$

Resolviendo el sistema obtenemos : $r = -5/3$, $t = -1/6$

$$\therefore\ 3r + 6t = -6 \quad ■$$

Ejemplo 4 *Resolviendo una ecuación vectorial*

Dados : $A = \langle -2 , 2\rangle$, $B = \langle 3 , -2\rangle$ y $C = \langle -1 , 1\rangle$, resolver la ecuación

$$3A - 2\,[3(B - 2C) + 2A] + 3X = 2C + X$$

Solución. Restando $2C + X$ a cada extremo de la ecuación dada se tiene :

$$3A - 6(B - 2C) - 4A + 3X - (2C + X) = (2C + X) - (2C + X)$$
$$\Rightarrow (3 - 4)A - 6B + 12C + (3 - 1)X - 2C = O$$
$$\Rightarrow -(A + 6B - 10C) + 2X = O$$
$$\Rightarrow (A + 6B - 10C) - (A + 6B - 10C) + 2X = (A + 6B - 10C)$$
$$\Rightarrow 2X = A + 6B - 10C = \langle -2 , 2\rangle + 6\langle 3 , -2\rangle - 10\langle -1 , 1\rangle$$
$$= \langle -2 , 2\rangle + \langle 18 , -12\rangle + \langle 10 , -10\rangle$$

$$= \langle -2 + 18 + 10 , 2 - 12 - 10\rangle$$
$$= \langle 26 , -20\rangle$$
$$\therefore\ X = \langle 13 , -10\rangle \quad ■$$

Ejemplo 5 Mediante segmentos orientados demostrar la propiedad A_3 :
$(a + b) + c = a + (b + c)$

Demostración. Sean los segmentos orientados

$$\overrightarrow{PT} = a \ , \ \overrightarrow{TS} = b \ , \ \overrightarrow{SR} = c \ , \ \overrightarrow{PR} = x \quad \text{(Figura 1.23)}$$

Haciendo uso de la ley del paralelogramo para la suma de vectores se tiene :

En el ΔPTS : $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TS} = a + b$

En el ΔTSR : $\overrightarrow{TR} = \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SR} = b + c$

En el ΔPSR : $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR}$

$\Rightarrow x = (a + b) + c$ (1)

En el ΔPTR : $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TR}$

$\Rightarrow x = a + (b + c)$ (2)

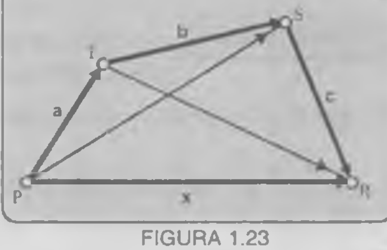


FIGURA 1.23

Por lo tanto, de (1) y (2) se sigue que : $(a + b) + c = a + (b + c)$ ■

Ejemplo 6 Sean los vectores $A = \langle -2 , 3\rangle$ y $B = \langle 4 , -3\rangle$. Un segmento dirigido que representa a $\frac{2}{3}A - \frac{1}{6}B$ tiene por punto inicial $S(5 , -3/2)$, hallar el punto final.

Solución. Sea $T(x , y)$ el punto final del segmento $\overrightarrow{ST}$

$$\text{Si } \overrightarrow{ST} = \frac{2}{3}A - \frac{1}{6}B \Rightarrow T - S = \frac{2}{3}\langle -2 , 3\rangle - \frac{1}{6}\langle 4 , -3\rangle = \langle -2 , 5/2\rangle$$

Entonces, si : $\langle x - 5 , y + \frac{3}{2}\rangle = \langle -2 , \frac{5}{2}\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = -2 \Rightarrow x = 3 \\ y + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow y = 1 \end{cases}$

Por tanto el punto final es $T(3 , 1)$. ■

Ejemplo 7 Se tiene : $2\langle 2 , -3\rangle + C = \langle 3 , -5\rangle + \langle a , 7\rangle$ y **C** está sobre la recta $\mathscr{L}$: $y = x + 2$. Si $A(3 , 5)$ y $B(-2 , 6)$, hallar el punto P tal que $\overrightarrow{PC} = -\overrightarrow{AB}$.

Solución. Sea $C = \langle x , y\rangle$ y si $C \in \mathscr{L} : y = x + 2 \Rightarrow C = \langle x , x + 2\rangle$

En la ecuación dada : $2\langle 2 , -3\rangle + \langle x , x + 2\rangle = \langle 3 , -5\rangle + \langle a , 7\rangle$

de donde : $\langle x , x + 2\rangle = \langle a - 1 , 8\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - 1 \\ x + 2 = 8 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$

Luego , **C** = ⟨6 , 8⟩. Si P = (x_1 , y_1) y $\vec{PC} = -\vec{AB} \Rightarrow$ **C - P = -(B - A) = A - B**

$$\Rightarrow \langle 6 - x_1 , 8 - y_1\rangle = \langle 3 + 2 , 5 - 6\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x_1 = 5 \Rightarrow x_1 = 1 \\ 8 - y_1 = -1 \Rightarrow y_1 = 9 \end{cases}$$

Por tanto, el punto buscado es : P(1 , 9) ■

Ejemplo 8 Los vectores **A** , **B** y **C** ∈ R², cumplen que : **A** + 2**B** = **C** y **A** - 3**B** = 2**C**. Si **A** es un vector unitario, hallar la norma de **B** + **C**.

Solución. De las ecuaciones dadas se tiene : **A** = **C** - 2**B** (1)

A = 2**C** + 3**B** (2)

Luego , si : **C** - 2**B** = 2**C** + 3**B** ⇒ **C** = -5**B**

Sustituyendo en (1) obtenemos : $\mathbf{B} = -\frac{1}{7}\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C} = \frac{5}{7}\mathbf{A}$

$$\Rightarrow \mathbf{B} + \mathbf{C} = \frac{4}{7}\mathbf{A}, \text{ implica que : } ||\mathbf{B} + \mathbf{C}|| = \frac{4}{7}||\mathbf{A}||$$

Como **A** es un vector unitario , entonces : $||\mathbf{B} + \mathbf{C}|| = \frac{4}{7}$ ■

Ejemplo 9 En la Figura 1.24, se tiene :

$||\mathbf{A}|| = 3 , ||\mathbf{B}|| = 2||\mathbf{C}|| = 2\sqrt{10}$

Si Tgα = 1/3 y Tgβ = 3, hallar el valor de m de modo que m**A** + 3**B** = n**C**

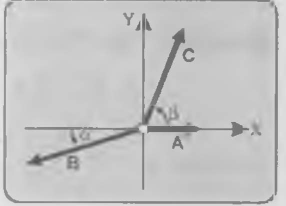


FIGURA 1.24

Solución. Si Tgα = 1/3 ⇒ Senα = $1/\sqrt{10}$ y Cosα = $3/\sqrt{10}$

Tgβ = 3 ⇒ Senβ = $3/\sqrt{10}$ y Cosβ = $1/\sqrt{10}$

Un vector unitario en el sentido de **A** es ⟨1 , 0⟩ ⇒ **A** = 3⟨1 , 0⟩

$\mathbf{B} = ||\mathbf{B}|| \langle -\text{Cos}\alpha - \text{Sen}\alpha\rangle = 2\sqrt{10}\langle -3/\sqrt{10} , -1/\sqrt{10}\rangle \Rightarrow \mathbf{B} = \langle -6 , -2\rangle$

$\mathbf{C} = ||\mathbf{C}|| \langle \text{Cos}\beta , \text{Sen}\beta\rangle = \sqrt{10}\langle 1/\sqrt{10} , 3/\sqrt{10}\rangle \Rightarrow \mathbf{C} = \langle 1 , 3\rangle$

Luego, si $m\langle 3 , 0\rangle + 3\langle -6 , -2\rangle = n\langle 1 , 3\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 18 = n \\ 0 - 6 = 3n \Rightarrow n = -2 \end{cases}$

Sustituyendo el valor de n en la primera ecuación obtenemos : m = 16/3 ■

Ejemplo 10 Sea el exágono regular de lado a , mostrado en la Figura 1.25. Al sumar los segmentos orientados $\vec{BA}$, $\vec{AC}$, $\vec{DC}$ y $\vec{AE}$ se obtiene un vector **S**, hallar la norma de **S**.

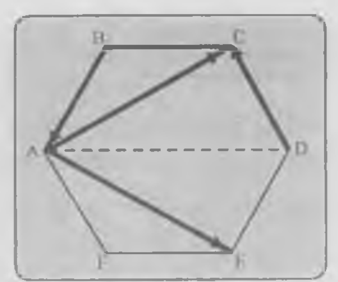


FIGURA 1.25

Solución. Si r es el radio de la circunferencia circunscrita al exágono regular, entonces : $\ell_6 = r = a$ y $\ell_3 = r\sqrt{3}$, esto es , $||\vec{AC}|| = ||\vec{AE}|| = a\sqrt{3}$, por ser lados de un triángulo equilátero.

Trasladamos los vectores indicados a un sistema bidimensional con origen en A, cuyo eje X siga la dirección de $\vec{AD}$ (Figura 125a). Ahora, aplicando la ecuación (5) tenemos :

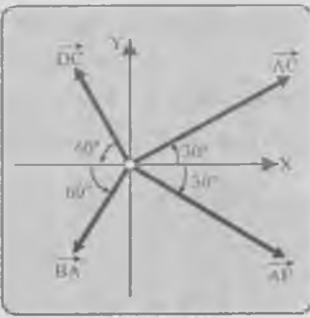


FIGURA 1.25a

$\vec{BA} = ||\vec{BA}|| \langle \text{Cos } 240° , \text{Sen } 240°\rangle = a\langle -\frac{1}{2} , -\frac{\sqrt{3}}{2}\rangle$

$\vec{DC} = ||\vec{DC}|| \langle \text{Cos } 120° , \text{Sen } 120°\rangle = a\langle -\frac{1}{2} , \frac{\sqrt{3}}{2}\rangle$

$\vec{AC} = ||\vec{AC}|| \langle \text{Cos } 30° , \text{Sen } 30°\rangle =$

$$a\sqrt{3}\langle \frac{\sqrt{3}}{2} , \frac{1}{2}\rangle = a\langle \frac{3}{2} , \frac{\sqrt{3}}{2}\rangle$$

$\vec{AE} = ||\vec{AE}|| \langle \text{Cos } 330° , \text{Sen } 330°\rangle = a\sqrt{3}\langle \frac{\sqrt{3}}{2} , -\frac{1}{2}\rangle = a\langle \frac{3}{2} , -\frac{\sqrt{3}}{2}\rangle$

Por tanto, si $\mathbf{S} = \vec{BA} + \vec{AC} + \vec{DC} + \vec{AE} = \langle 2a , 0\rangle \Rightarrow ||\mathbf{S}|| = 2a$ ■

Ejemplo 11 *Puntos de trisección de un segmento*

Demostrar que si $P_1 \neq P_2$ entonces los puntos P y Q que trisecan al segmento que va de P_1 a P_2 tienen por vectores de posición a :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{3}(2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) \text{ y } \mathbf{Q} = \frac{1}{3}(\mathbf{P}_1 + 2\mathbf{P}_2)$$

Demostración. En efecto, si P y Q son los puntos de trisección de $\vec{P_1P_2}$, entonces:

1. $\vec{P_1P} = \frac{1}{3}\vec{P_1P_2} \Rightarrow 3(\mathbf{P} - \mathbf{P}_1) = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$

   $\Rightarrow 3\mathbf{P} - 3\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$

   de donde : $\mathbf{P} = \frac{1}{3}(2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)$

2. $\vec{P_1Q} = \frac{2}{3}\vec{P_1P_2} \Rightarrow 3(\mathbf{Q} - \mathbf{P}_1) = 2(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$

   $\Rightarrow 3\mathbf{Q} - 3\mathbf{P}_1 = 2\mathbf{P}_2 - 2\mathbf{P}_1$

   $\Rightarrow \mathbf{Q} = \frac{1}{3}(\mathbf{P}_1 + 2\mathbf{P}_2)$ ■

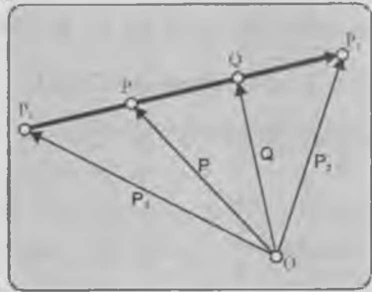


FIGURA 1.26

Ejemplo 12 En la Figura 1.27, el triángulo OAB es isósceles con $\overline{OA} = \overline{AB}$ y $\overline{PH}$ es perpendicular a $\overline{OB}$ y mide 6 unidades. Si $\|\overline{AQ}\| = 2\|\overline{QB}\|$, hallar el módulo de $\overrightarrow{PQ}$.

FIGURA 1.27

Solución. Sea $\overline{OH} = x \Rightarrow P(x, 6)$

$$\Delta OMA \cong \Delta OHP \Rightarrow \frac{AM}{PH} = \frac{OM}{OH}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{6} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Luego, si P(3/2 , 6) entonces :

$$\overrightarrow{PA} = \mathbf{A} - \mathbf{P} = \langle 2, 8\rangle - \langle 3/2, 6\rangle = \langle 1/2, 2\rangle$$

Además : $\overline{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = \langle 4, 0\rangle - \langle 2, 8\rangle = \langle 2, -8\rangle$

Por lo que , si : $\|\overrightarrow{AQ}\| = 2\|\overline{QB}\| \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overline{AB} = \frac{2}{3}\langle 2, -8\rangle$

Como : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = \langle 1/2, 2\rangle + \frac{2}{3}\langle 2, -8\rangle = \frac{1}{6}\langle 11, -20\rangle$

$$\Rightarrow \|PA\| = \frac{1}{6}\sqrt{(11)^2 + (-20)^2} = \frac{1}{6}\sqrt{521}$$ ■

Ejemplo 13 En la Figura 1.28 , si P es tal que el área del triángulo APC es el doble del área del triángulo CPB, hallar $\|\overrightarrow{CP}\|$.

FIGURA 1.28

Solución. Por la geometría plana se sabe que :

$$\frac{a(\Delta APC)}{a(\Delta CPB)} = \frac{\overline{AP} \times \overline{PC}}{\overline{PB} \times \overline{PC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$$

Como, $a(\Delta APC) = 2a(\Delta CPB) \Rightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = 2$

de donde : $\overline{AP} = 2\overline{PB} \Rightarrow \mathbf{P} - \mathbf{A} = 2(\mathbf{B} - \mathbf{P})$

$$\Rightarrow \langle x+4, y-2\rangle = 2\langle 2-x, 10-y\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = 2(2 - x) \Rightarrow x = 0 \\ y - 2 = 2(10 - y) \Rightarrow y = 22/3 \end{cases}$$

Luego : $\overrightarrow{CP} = \mathbf{P} - \mathbf{C} = \langle 0, 22/3\rangle - \langle 2, 2\rangle = \frac{2}{3}\langle -3, 8\rangle$

$$\therefore \|\overrightarrow{CP}\| = \frac{2}{3}\sqrt{(-3)^2 + 8^2} = \frac{2}{3}\sqrt{73}$$ ■

Ejemplo 14 En el rombo de diagonales D y d es tal como se indica en la Figura 1.29, hallar la norma del vector

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4$$

donde los vectores $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ y $\mathbf{V}_4$ llegan a los puntos medios de los lados del rombo.

FIGURA 1.29

Solución. Considerando un sistema cartesiano con sus ejes X e Y sobre las diagonales $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{SQ}$, respectivamente, tenemos :

$$\mathbf{V}_1 = \overrightarrow{RF} = \mathbf{F} - \mathbf{R} = \langle -\frac{D}{4}, \frac{d}{4}\rangle - \langle \frac{D}{2}, 0\rangle = \langle -\frac{3}{4}D, \frac{d}{4}\rangle$$

$$\mathbf{V}_2 = \overrightarrow{PQ} = \mathbf{Q} - \mathbf{P} = \langle \frac{D}{4}, \frac{d}{4}\rangle - \langle -\frac{D}{2}, 0\rangle = \langle \frac{3}{4}D, \frac{d}{4}\rangle$$

$$\mathbf{V}_3 = \overrightarrow{QE} = \mathbf{E} - \mathbf{Q} = \langle -\frac{D}{4}, -\frac{d}{4}\rangle - \langle 0, \frac{d}{2}\rangle = \langle -\frac{D}{4}, -\frac{3}{4}d\rangle$$

$$\mathbf{V}_4 = \overrightarrow{QH} = \mathbf{H} - \mathbf{Q} = \langle \frac{D}{4}, -\frac{d}{4}\rangle - \langle 0, \frac{d}{2}\rangle = \langle \frac{D}{4}, -\frac{3}{4}d\rangle$$

Luego : $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4 = \langle 0, -d\rangle \Rightarrow \|\mathbf{V}\| = d$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 5*

En los ejercicios 1 al 5, si **A**. **B**, y **C** son vectores en $\mathbb{R}^2$, demuestre la validez de cada afirmación.

1. **A** + **B** = **B** + **A** (A_2 : Propiedad conmutativa)
2. **A** + (-**A**) = (-**A**) + **A** = **O** (A_5 : Inverso aditivo)
3. Si **A** + **B** = **C** ⇒ **A** = **C** - **B**
4. Si **A** + **B** = **B** ⇒ **A** = **O** (Unicidad del idéntico aditivo)
5. Si **A** + **B** = **O** ⇒ **A** = -**B** (Unicidad del inverso aditivo)
6. Mediante segmentos orientados demuestre la propiedad A_2 : **A** + **B** = **B** + **A**
7. Sea $\overrightarrow{PQ}$ una representación del vector **A**. $\overrightarrow{QR}$ una representación del vector **B** y $\overrightarrow{RP}$ una representación del vector **C**. Probar que si $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{RP}$ son los lados de un triángulo, entonces **A** + **B** + **C** = **O**

8. Dados los vectores **A** = ⟨5 , 2⟩ , **B** = ⟨-3 , 4⟩ y **C** = ⟨7 , 4⟩, resolver la ecuación
$$2\mathbf{X} + 5\mathbf{A} - 3\mathbf{B} = 4\mathbf{C}$$
9. Sea **x** un vector en $\mathbb{R}^2$ tal que : ⟨-5 , 2⟩ = 2**x** + ⟨1 , -8⟩
Si ⟨-5 , 3⟩ = t **x** + r ⟨2 , -1⟩, hallar el valor de 2t + r
10. Resolver la ecuación vectorial : 3 ⟨1 , -2⟩ + 2 **x** = ⟨2 , -1⟩ - **x**
11. Dados los puntos A(5 , 1) , B(-2 , 3) , C(-3 , -2) y D(1 , -4), determinar el punto P(x , y) tal que : $3\vec{AB} - \vec{PD} = 3\vec{AP} - \frac{1}{2}\vec{CD} + \vec{BC}$
12. Se tiene : 2(⟨5 , -1⟩ + **C**) = 3 ⟨1 , 3⟩ - ⟨-1., a⟩ . Si A(2 , 3) , B(3 , -1) y el punto final del vector **C**, en posición ordinaria, está sobre el conjunto P = { (x , y) | y = x² - 1} ; hallar las coordenadas de un punto P tal que : $\vec{AP} + 2\vec{PC} = \vec{AB}$
13. Si **A** = ⟨5 , -2⟩, **B** = ⟨2 , -5⟩ y **C** = ⟨-3 , 1⟩, hallar un vector unitario en la dirección y sentido de **V** = 2**A** - 3**B** + 4**C**
14. Sean **A** y **B** vectores en $\mathbb{R}^2$ tales que **B** es el opuesto de **A**. Si **B** tiene el mismo sentido que el vector **C** = ⟨-1/3 , 1/4⟩ y la norma de **A** es 5 , hallar el vector **V** = 2**B** + **A**
15. En la Figura 1.30 se tiene : $\vec{OM}$ = 5x/2 y $\vec{OP}$ = 27/2. Si **A** = $\langle 2x^3 , 4x^2 + 4y^2\rangle$ y **B** = $\langle \frac{1}{3}xy^2 , -\frac{4}{3}xy\rangle$, hallar x - y de modo que : $2\mathbf{S} = \frac{1}{3}\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$
16. En la Figura 1.31, ABCDEF es un exágono regular de lado a , hallar la norma de **S**, sabiendo que : $\mathbf{S} = \frac{2}{3}(\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DE}) + \frac{1}{2}\vec{EB}$
17. Dado el exágono regular ABCDEF (Figura 1.32) , hallar el valor de p + 3 q , sabiendo que : $\vec{BC} + \vec{CF} + \frac{1}{3}\vec{EF} = p\,\vec{AB} + q\,\vec{EF}$

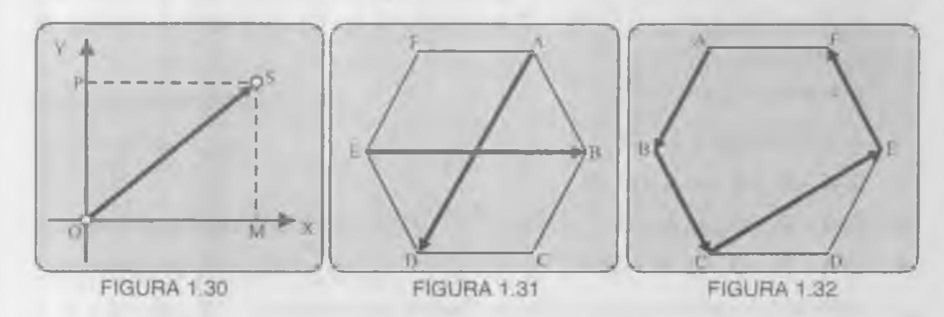


FIGURA 1.30 FIGURA 1.31 FIGURA 1.32

18. En la Figura 1.33, P es un punto tal que el triángulo de área A_1 es tres veces el área del triángulo de área A_2. Hallar la norma del vector **V**.
19. En la Figura 1.34 , OABC es un cuadrado, P , Q , R y S son puntos medios de

los lados $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Hallar $\|\vec{ST} + \vec{BH}\|$ si T es punto medio de $\vec{PQ}$ y H es punto medio de $\overline{QR}$.
20. En la Figura 1.35, si **S** = **A** + **B** + **C**, hallar **S** sabiendo que su segunda componente es cero, que ||**B**|| = 20 , ||**A**|| = $10\sqrt{2}$ y que la primera componente de **C** es 20, (Asumir Sen 37º = 3/5).

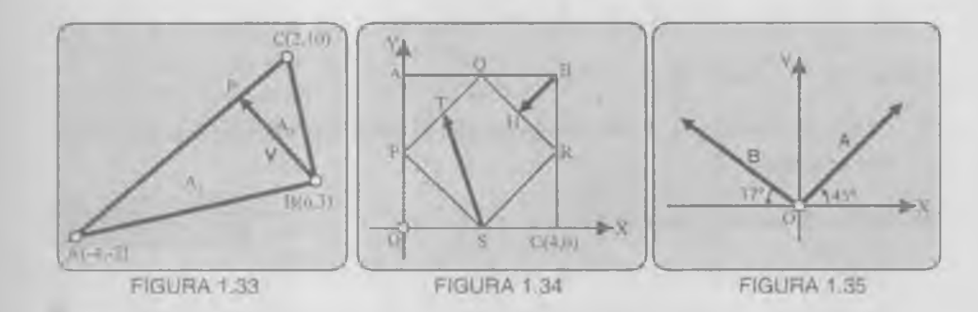


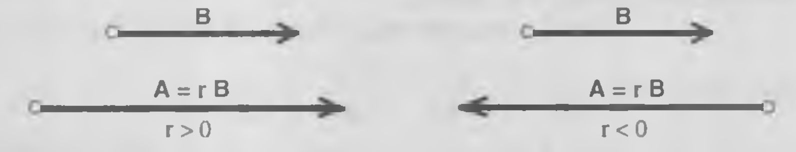
FIGURA 1.33 FIGURA 1.34 FIGURA 1.35

1.7 VECTORES PARALELOS

Dos vectores **A** y **B**, no nulos, son paralelos o proporcionales si y sólo si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro, esto es
$$\mathbf{A} \parallel \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A} = r\,\mathbf{B} \;,\; \forall r \in \mathbb{R}$$

OBSERVACIONES 1.5

a) Si r > 0 y **B** ≠ **O** ⇒ **A** y r **B** tienen la misma dirección y sentido.
Si r < 0 y **B** ≠ **O** ⇒ **A** y r **B** tienen la misma dirección y sentidos opuestos.



b) Es conveniente establecer que el vector nulo **O** es paralelo a todo vector, esto es:
$$\mathbf{O} \parallel \mathbf{A} \text{ ó } \mathbf{A} \parallel \mathbf{O} \;,\; \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^2$$
En efecto, si **O** || **A** ⇒ **O** = r **A** = 0 **A** , 0 ∈ **R**
c) Todo vector es paralelo a si mismo.
En efecto, si 1 ∈ **R** ⇒ **A** = 1**A** . por lo que **A** || **A** , ∀**A** ∈ $\mathbb{R}^2$

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Determinar si los vectores dados son paralelos

1. $A = \langle 4, -1\rangle$, $B = \langle -12, 3\rangle$
2. $A = \langle 3, -6\rangle$, $B = \langle 1, 2\rangle$

Solución. 1. Si $A \parallel B \Rightarrow \langle 4, -1\rangle = r\langle -12, 3\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -12r \Rightarrow r = -1/3 \\ -1 = 3r \Rightarrow r = -1/3 \end{cases}$

Como r es único y $r < 0$, **A** y **B** son paralelos, tienen la misma dirección y sentidos opuestos.

2. Si $A \parallel B \Rightarrow \langle 3, -6\rangle = r\langle 1, 2\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = r \Rightarrow r = 3 \\ -6 = 2r \Rightarrow r = -3 \end{cases}$

Como r no es único $\Rightarrow A \nparallel B$, es decir , no existe ningún $r \in R$ que cumple $\langle 3, -6\rangle = r\langle 1, 2\rangle$, pues esto implicaría que $3 = r = -3$, lo cual es absurdo. ■

Ejemplo 2 Demostrar que si **A** . **B** $\in R^2$ son vectores paralelos y $B \neq O$ entonces existe un escalar r para el cual se tiene : **A** = r **B**.

Demostración. Sean $A = \langle x_1, y_1\rangle$ y $B = \langle x_2, y_2\rangle$, y sean α_1 y α_2 los ángulos de dirección de **A** y **B** respectivamente. Por las ecuaciones (4) se tiene:

$$Sen\alpha_1 = \frac{y_1}{||A||} \quad , \quad Cos\alpha_1 = \frac{x_1}{||A||}$$

$$Sen\alpha_2 = \frac{y_2}{||A||} \quad , \quad Cos\alpha_2 = \frac{x_2}{||A||}$$

Por hipótesis **A** es paralelo a **B**, entonces :

$$m(\alpha_1) = m(\alpha_2) \text{ ó } m(\alpha_1) = m(\alpha_2) \pm 180^\circ$$

Si $m(\alpha_1) = m(\alpha_2) \Rightarrow = \frac{y_1}{||A||} = \frac{y_2}{||B||} \; , \; \frac{x_1}{||A||} = \frac{x_2}{||B||}$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{||A||}{||B||} y_2 \; , \; x_1 = \frac{||A||}{||B||} x_2$$

También , por hipótesis , $||B|| \neq 0$, por lo que $\frac{||A||}{||B||}$ es un número real r , entonces: $x_1 = r\,x_2$, $y_1 = r\,y_2$

Luego , $\langle x_1, y_1\rangle = r\langle x_2, y_2\rangle$, esto es : **A** = r **B** ■

Ejemplo 3 Demostrar que si **D** = **B** + **C** y $B \parallel A$, entonces
$D \parallel A \Leftrightarrow C \parallel A$

Demostración. ($\Rightarrow$) Demostraremos que si $D \parallel A \Rightarrow C \parallel A$

En efecto, si $D \parallel A \Rightarrow \exists r \in R \mid D = rA$

Por hipótesis, $B \parallel A \Rightarrow \exists s \in R \mid B = sA$

Luego, si $C = D - B = rA - sA = (r - s)A \Rightarrow C \parallel A$

($\Leftarrow$) Ahora probaremos que si : $C \parallel A \Rightarrow D \parallel A$

En efecto, si $C \parallel A \Rightarrow \exists t \in R \mid C = tA$

Por hipótesis , $B \parallel A \Rightarrow \exists s \in R \mid B = sA$

Luego , si $D = B + C = sA + tA = (s + t)A \Rightarrow D \parallel A$ ■

Ejemplo 4 Si $A = \langle 1 - 2m, 1\rangle$ y $B = \langle -7, m + 2\rangle$, hallar los valores de m , de modo que **A** sea paralelo a **B**.

Solución. Si $A \parallel B \Rightarrow \exists r \in R \mid A = rB$

$$\Rightarrow \langle 1 - 2m, 1\rangle = r\langle -7, m + 2\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m = -7r & (1) \\ 1 = r(m + 2) & (2) \end{cases}$$

Al dividir (1) entre (2) obtenemos la ecuación

$$2m^2 + 3m - 9 = 0 \Leftrightarrow m = -3 \text{ ó } m = 3/2$$ ■

Ejemplo 5 Si al vector $A = \langle 1, 18\rangle$ lo expresamos como **A** = **X** + **Y** , donde $X \parallel B$ e $Y \parallel C$. Si $B = \langle -1, 4\rangle$ y $C = \langle 2m, 3m\rangle$, hallar el vector **X**.

Solución. Si $X \parallel B \Rightarrow \exists r \in R \mid X = r\langle -1, 4\rangle$

$Y \parallel C \Rightarrow \exists s \in R \mid Y = s\langle 2m, 3m\rangle = sm\langle 2, 3\rangle = t\langle 2, 3\rangle$

Luego, si $A = X + Y \Rightarrow \langle 1, 18\rangle = r\langle -1, 4\rangle + t\langle 2, 3\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -r + 2t & (1) \\ 18 = 4r + 3t & (2) \end{cases}$

Resolviendo (1) y (2) por simultáneas obtenemos : r = 3 y t = 2

$$\therefore X = 3\langle -1, 4\rangle = \langle -3, 12\rangle$$ ■

Ejemplo 6 Si $A = \langle m, 2m\rangle$, $A - B = \langle 2m, p\rangle$, $A \parallel B$ y la norma de **A** - **B** es 20, hallar la norma de **B**.

Solución. Si $B \parallel A \Rightarrow B = rA = r\langle m, 2m\rangle \Rightarrow B = rm\langle 1, 2\rangle$ (1)

$A - B = \langle 2m, p\rangle \Rightarrow \langle m, 2m\rangle - rm\langle 1, 2\rangle = \langle 2m, p\rangle$

$\Rightarrow \langle m - rm, 2m - 2\rangle = \langle 2m, p\rangle$

Por la igualdad de vectores se sigue que : m - r m = 2 m , de donde , r = -1

Luego, en (1): $\mathbf{B} = -m\langle 1 , 2\rangle \Rightarrow ||\mathbf{B}|| = |-m|\ \sqrt{1+4} = m\sqrt{5}$ (2)
Si $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \langle m , 2m\rangle + m\langle 1 , 2\rangle = 2m\langle 1 , 2\rangle \Rightarrow ||\mathbf{A} - \mathbf{B}|| = 2m\sqrt{5}$
Como $||\mathbf{A} - \mathbf{B}|| = 20 \Rightarrow 2m\sqrt{5} = 20 \Rightarrow m = 2\sqrt{5}$
Por lo tanto, en (2), se tiene: $||\mathbf{B}|| = (2\sqrt{5})\sqrt{5} = 10$ ■

Ejemplo 7 El vector $\mathbf{A} = \langle 3 , 0\rangle$ se descompone en dos vectores **B** y **C** paralelos a los vectores $\langle 2r , -3r/2\rangle$ y $\langle p , -3p\rangle$ respectivamente, donde $r \neq 0$ y $p \neq 0$. Hallar las longitudes de **B** y **C**.

Solución. Si $\mathbf{B} \,||\, \langle 2r , -3r/2\rangle \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{r}{2}\langle 4 , -3\rangle = s\langle 4 , -3\rangle$
$\mathbf{C} \,||\, \langle p , -3p\rangle \Rightarrow \mathbf{C} = p\langle 1 , -3\rangle$
Si $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C} \Rightarrow \langle 3 , 0\rangle = s\langle 4 , -3\rangle + p\langle 1 , -3\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 4s + p \\ 0 = -3s - 3p \end{cases}$
Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos, $s = 1$ y $p = -1$
Luego: $\mathbf{B} = \langle 4 , -3\rangle \Rightarrow ||\mathbf{B}|| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = 5$
$\mathbf{C} = -\langle 1 , -3\rangle = \langle -1 , 3\rangle \Rightarrow ||\mathbf{C}|| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$ ■

Ejemplo 8 En la Figura 1.36 se tiene un exágono regular cuyo lado mide a unidades. Si $||\mathbf{V}_1|| = ||\mathbf{V}_2|| = ||\mathbf{V}_3|| = ||\mathbf{V}_4|| = ||\mathbf{V}_5|| = a$, hallar $||\mathbf{S}||$, donde $\mathbf{S} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4 + \mathbf{V}_5$.

Solución. $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_4$ y $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_3$ por ser paralelos y de la misma magnitud, dirección y sentido. Entonces: $\mathbf{S} = 2\mathbf{V}_1 + 2\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_5$

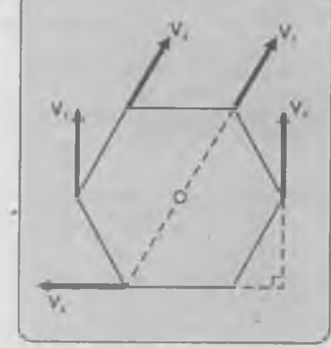


FIGURA 1.36

Trasladando estos vectores a un sistema de ejes rectangulares (Figura 1.36a) se tiene:
$\mathbf{V}_1 = a\,(\text{Cos } 90°, \text{Sen } 90°) = a\,\langle 0 , 1\rangle$
$\mathbf{V}_2 = a\,(\text{Cos } 60°, \text{Sen } 60°) = a\,\langle 1/2 , \sqrt{3}/2\rangle$
$\mathbf{V}_5 = a\,(\text{Cos } 180°, \text{Sen } 180°) = a\,\langle -1 , 0\rangle$
Luego: $\mathbf{S} = 2a\,\langle 0 , 1\rangle + a\,\langle 1 , \sqrt{3}\rangle + a\,\langle -1 , 0\rangle$
$= a\,\langle 0 , 2 + \sqrt{3}\rangle \Rightarrow ||\mathbf{S}|| = a(2 + \sqrt{3})$ ■

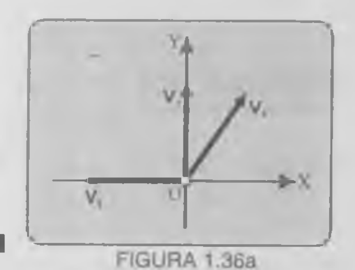


FIGURA 1.36a

Ejemplo 9 Sea el ΔABC y sean $M(2 , 5)$ y $P(4 , 2)$ puntos medios de los lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ respectivamente. Si $\overrightarrow{AB} \,||\, \langle 3 , 1\rangle$ y $\overrightarrow{CB} \,||\, \langle 1 , 4\rangle$, hallar los vértices del triángulo.

Solución. Como los puntos A, M y B son colineales, entonces: $\overrightarrow{MB} \,||\, \overrightarrow{AB} \,||\, \langle 3 , 1\rangle \Rightarrow \overrightarrow{MB} = r\langle 3 , 1\rangle$
Luego: $\mathbf{B} - \mathbf{M} = r\langle 3 , 1\rangle \Rightarrow \mathbf{B} = \langle 2 , 5\rangle + r\langle 3 , 1\rangle$ (1)
Análogamente:
$\overrightarrow{PB} = s\langle 1 , 4\rangle \Rightarrow \mathbf{B} = \langle 4 , 2\rangle + s\langle 1 , 4\rangle$ (2)
$(1) = (2) \Rightarrow \langle 2 , 5\rangle + r\langle 3 , 1\rangle = \langle 4 , 2\rangle + s\langle 1 , 4\rangle$
$\Rightarrow \langle -2 , 3\rangle = s\langle 1 , 4\rangle - r\langle 3 , 1\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = s - 3r \\ 3 = 4s - r \end{cases}$

FIGURA 1.37

Resolviendo el sistema obtenemos: $r = s = 1$
Entonces, en (1): $\mathbf{B} = \langle 2 , 5\rangle + \langle 3 , 1\rangle = \langle 5 , 6\rangle \Rightarrow B(5 , 6)$
M es punto medio de $\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$
$\Rightarrow \mathbf{M} - \mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{A} = 2\mathbf{M} - \mathbf{B}$
$\Rightarrow \mathbf{A} = 2\langle 2 , 5\rangle - \langle 5 , 6\rangle = \langle -1 , 4\rangle \Rightarrow A(-1 , 4)$
P es punto medio de $\overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PB} \Rightarrow \mathbf{P} - \mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{C} = 2\mathbf{P} - \mathbf{B}$
$\Rightarrow \mathbf{C} = 2\langle 4 , 2\rangle - \langle 5 , 6\rangle = \langle 3 , -2\rangle \Rightarrow C(3 , -2)$ ■

Ejemplo 10 El punto $P(-3 , 1)$ es un vértice del rombo PQRS, tal que $\overrightarrow{PQ} = \langle 4 , 2\rangle$ y el lado $\overrightarrow{PS}$ se ha obtenido del lado $\overrightarrow{PQ}$ mediante un giro de 60º en el sentido antihorario. Hallar los demás vértices del rombo.

Solución. Si α es el ángulo de dirección del vector $\overrightarrow{PQ} = \langle 4 , 2\rangle$, entonces, $\text{Tg}\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
de donde se tiene: $\text{Sen}\alpha = 1/\sqrt{5}$ y $\text{Cos}\alpha = 2/\sqrt{5}$
Si $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{Q} - \mathbf{P} = \langle 4 , 2\rangle \Rightarrow \mathbf{Q} = \mathbf{P} + \langle 4 , 2\rangle$
$\Rightarrow \mathbf{Q} = \langle -3 , 1\rangle + \langle 4 , 2\rangle = \langle 1 , 3\rangle$
es el vector de posición del punto Q, por lo que: $Q(1 , 3)$
Por ser lados de un rombo:
$||\overrightarrow{PS}|| = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{5}$
Sea $\boldsymbol{u}$ un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{PS}$ cuyo ángulo de dirección es $\alpha + 60°$, entonces:

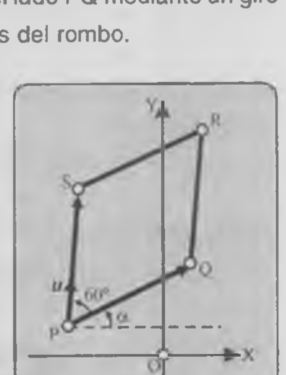


FIGURA 1.38

$\boldsymbol{u} = \langle \text{Cos}(\alpha + 60°) , \text{Sen}(\alpha + 60°)\rangle$ (1)
$\text{Cos}(\alpha + 60°) = \text{Cos}\alpha\ \text{Cos}60° - \text{Sen}\alpha\ \text{Sen}60° = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}}{10}(2 - \sqrt{3})$

$Sen(\alpha + 60°) = Sen\alpha\ Cos60° + Cos\alpha\ Sen60° = (\frac{2}{\sqrt{5}})(\frac{1}{2}) + (\frac{2}{\sqrt{5}})(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{5}}{10}(1 + 2\sqrt{3})$

Luego, en (1) : $\mathbf{u} = \langle \frac{\sqrt{5}}{10}(2 - \sqrt{3})\ ,\ \frac{\sqrt{5}}{10}(1 + 2\sqrt{3}) \rangle$

Ahora, si $\vec{PS} = ||\vec{PS}||\ \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{S} - \mathbf{P} = 2\sqrt{5}\langle \frac{\sqrt{5}}{10}(2 - \sqrt{3})\ ,\ \frac{\sqrt{5}}{10}(1 + 2\sqrt{3})\rangle$

$\Rightarrow \mathbf{S} = \langle -3\ ,\ 1\rangle + \langle 2 - \sqrt{3}\ ,\ 1 + 2\sqrt{3}\rangle = \langle -1 - \sqrt{3}\ ,\ 2 + 2\sqrt{3}\rangle$

es el vector de posición del vértice S $\Rightarrow S(-1 - \sqrt{3}\ ,\ 2 + 2\sqrt{3})$

Como $\vec{SR} = \vec{PQ} = \langle 4\ ,\ 2\rangle \Rightarrow \mathbf{R} - \mathbf{S} = \langle 4\ ,\ 2\rangle$

$\Rightarrow \mathbf{R} = \langle -1 - \sqrt{3}\ ,\ 2 + 2\sqrt{3}\rangle + \langle 4\ ,\ 2\rangle = \langle 3 - \sqrt{3}\ ,\ 4 + 2\sqrt{3}\rangle$

Por lo que : $R\ (3 - \sqrt{3}\ ,\ 4 + 2\sqrt{3})$ ■

Ejemplo 11 Si M(11/2 , 7/2) , N(8 , 6) , P(9/2 , 13/2) y Q(2 , 4) son los puntos medios de los lados del trapecio ABCD y $||\vec{DC}|| = \sqrt{10}$, hallar los vértices del trapecio.

Solución. $\vec{QN} = \mathbf{N} - \mathbf{Q} = \langle 8\ ,\ 6\rangle - \langle 2\ ,\ 4\rangle = \langle 6\ ,\ 2\rangle$

Un vector unitario en la dirección de $\vec{QN}$ es $\mathbf{u} = \frac{\vec{QN}}{||\vec{QN}||} = \frac{\langle 6\ ,\ 2\rangle}{\sqrt{40}} = \frac{\langle 3\ ,\ 1\rangle}{\sqrt{10}}$

Como $\vec{DC} \parallel \vec{QN} \Rightarrow \vec{DC} = ||\vec{DC}||\ \mathbf{u} = \langle 3\ ,\ 1\rangle$

$\vec{DP} = \frac{1}{2}\vec{DC} \Rightarrow \mathbf{P} - \mathbf{D} = \langle 3/2\ ,\ 1/2\rangle$

$\Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{P} - \langle 3/2\ ,\ 1/2\rangle = \langle 3\ ,\ 6\rangle$

$\vec{DQ} = \vec{QA} \Rightarrow \mathbf{Q} - \mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{Q} \Leftrightarrow \mathbf{A} = 2\mathbf{Q} - \mathbf{D}$

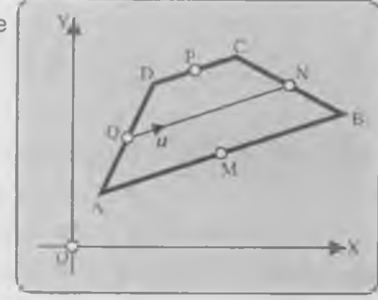


FIGURA 1.39

Análogamente :

$\vec{AM} = \vec{MB} \Rightarrow \mathbf{B} = 2\mathbf{M} - \mathbf{A} = 2\langle 11/2\ ,\ 7/2\rangle - \langle 1\ ,\ 2\rangle = \langle 10\ ,\ 5\rangle$

$\vec{NC} = \vec{BN} \Rightarrow \mathbf{C} = 2\mathbf{N} - \mathbf{B} = 2\langle 8\ ,\ 6\rangle - \langle 10\ ,\ 5\rangle = \langle 6\ ,\ 7\rangle$

Por lo tanto, los vértices del trapecio son :

A(1 , 2) , B(10 , 5) , C(6 , 7) y D(3 , 6) ■

EJERCICIOS : *Grupo 6*

1. Determine si los siguientes pares de vectores son paralelos. Cuáles tienen el mismo sentido y cuáles sentido opuesto.

a) $\mathbf{A} = \langle -8\ ,\ -7\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 32\ ,\ 28\rangle$ c) $\mathbf{A} = \langle -3/2\ ,\ 3\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 1/3\ ,\ -2/3\rangle$

b) $\mathbf{A} = \langle 3\ ,\ 2\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 2\ ,\ 4/3\rangle$ d) $\mathbf{A} = \langle 4\ ,\ -2\rangle$, $\mathbf{B} = \langle -1\ ,\ 1/2\rangle$

2. Demostrar que si $\mathbf{A} \parallel \mathbf{C}$, $\mathbf{B} \parallel \mathbf{C}$ y $\mathbf{C} \neq \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$

3. Demostrar que para vectores no nulos $\mathbf{A}$, $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B_1}$
$$\mathbf{A} \parallel \mathbf{A_1}\ ,\ \mathbf{B} \parallel \mathbf{B_1}\ \text{y}\ \mathbf{A} \parallel \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A_1} \parallel \mathbf{B_1}$$

4. Demostrar que si **A** y **B** tienen la misma dirección y sentido entonces
$$||\mathbf{A} + \mathbf{B}|| = ||\mathbf{A}|| + ||\mathbf{B}||$$

5. Si $\mathbf{A} = \langle 2\ ,\ 2m - 3\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 1 - m\ ,\ -5\rangle$, determinar los valores de m de modo que **A** y **B** sean paralelos.

6. Si $\mathbf{A} = \langle m\ ,\ 5\rangle + \langle 3\ ,\ 3\rangle$, $\mathbf{B} = 4\langle -m\ ,\ -3\rangle - 2\langle 1\ ,\ 2\rangle$ y $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$, hallar el valor de m.

7. Dados los vectores $\mathbf{A} = \langle a\ ,\ 3m\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle -2m\ ,\ b\rangle$, hallar $a + b$ tales que $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle 8\ ,\ -4\rangle$ y sea $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$.

8. Sean los vectores **A** y **B**, tales que : $\mathbf{A} = \langle a\ ,\ 2a\rangle$, $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \langle 2a\ ,\ p\rangle$, $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$ y la norma de **A** - **B** es $\sqrt{112}$. Hallar la norma de **B**.

9. El vector $\mathbf{A} = \langle x\ ,\ y\rangle$ es paralelo al vector $\mathbf{B} = \langle 2\ ,\ 4\rangle$, tal que $\mathbf{u} = \langle x/\sqrt{5}\ ,\ y/\sqrt{5}\rangle$ es un vector unitario paralelo a ambos. Hallar el vector **A**.

10. Sean **A** y **B** dos vectores en $\mathbf{R}^2$, tales que **B** es el inverso aditivo de **A**. Si **B** tiene el mismo sentido que el vector $\mathbf{C} = \langle -1/3\ ,\ 1/4\rangle$ y $||\mathbf{A}|| = 5$, hallar $\mathbf{X} = \mathbf{A} + 2\mathbf{B}$.

11. Hallar la norma de la suma de los vectores unitarios $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, si $\mathbf{u} \parallel \mathbf{A}$ y $\mathbf{v} \parallel \mathbf{B}$ sabiendo que $\mathbf{A} = \langle 4\ ,\ -3\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle -5\ ,\ 0\rangle$

12. Los vectores **A** y **B** son tales que **A** es del mismo sentido que $\mathbf{B} = \langle 1\ ,\ 3\rangle$ y $\frac{\mathbf{A}}{||\mathbf{A}||} = \langle \frac{x}{\sqrt{40}}\ ,\ \frac{y}{\sqrt{40}}\rangle$; hallar el valor de $2x - \frac{1}{2}y$

13. El punto P(2 , -3) es extremo del vector $\vec{PR}$, el punto Q(1 , -2) alineado con P y R, dista de P la quinta parte de $||\vec{PR}||$. Hallar R.

14. Si $\mathbf{A} = \langle a\ ,\ b\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 1/2,\ -4/3\rangle$ son dos vectores en $\mathbf{R}^2$, hallar $a + b$ sabiendo que $||\mathbf{A}|| = \sqrt{73}/3$ y que **A** y **B** tiene sentidos opuestos.

15. El vector $\mathbf{C} = \langle 2\ ,\ -1\rangle$ es expresado como $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, donde los vectores **A** y **B** son paralelos a $\mathbf{X} = \langle 3m\ ,\ 4m\rangle$ e $\mathbf{Y} = \langle -3n\ ,\ -n\rangle$, respectivamente, siendo $m \neq 0$ y $n \neq 0$. Hallar **A** - **B**.

16. Dados los vértices consecutivos de un paralelogramo A(7 , -1) , B(-3 , 1) y C(-5 , 5) ; determinar el cuarto vértice y la longitud de la diagonal $\vec{BD}$.

17. En la Figura 1.40, sea O la intersección de las diagonales de un cuadrado ABCD. Si O es el baricentro del triángulo isósceles APD con $||\vec{AP}|| = ||\vec{PD}||$, hallar el vector $\vec{NQ}$.

18. Si M(9/2 , -3) , N(2 , 6) , P(-7/2 , 9) y Q(-1 , -1) son los puntos medios de los lados del trapecio ABCD y $\|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{52}$, hallar los vértices del trapecio.

19. En la Figura 1.41, ABCD es un cuadrado de lado 3a y A' B' C' D' es un cuadrado de lado a , si la norma de $\overrightarrow{D'D}$ es a, hallar el vector $\overrightarrow{B'P}$.

20. Sea el triángulo ABC y sean M(1 , 9) y N(6 , 2) puntos medios de los lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ respectivamente. Si $\overrightarrow{AB} \parallel \langle 1 , 1\rangle$ y $\overrightarrow{BC} \parallel \langle 3 , 1\rangle$, hallar los vértices del triángulo.

21. Dados los vectores **A** = $\langle 2a , 2\rangle$, **B** = $\langle 6 , n\rangle$, **C** = $\langle c , 3n\rangle$, si **A** $\parallel$ **B** $\parallel$ **C**, calcular el valor de $an + c$.

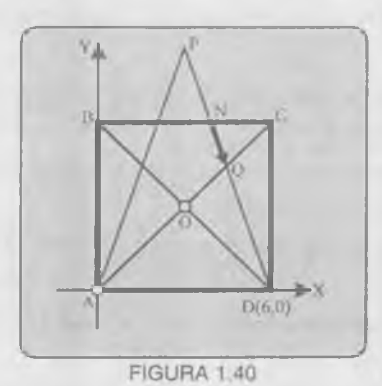


FIGURA 1.40

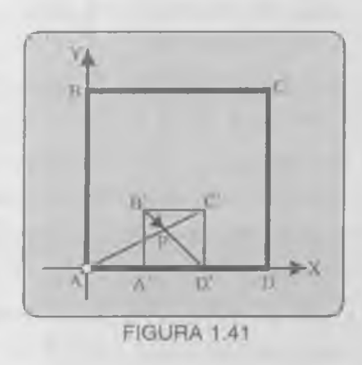


FIGURA 1.41

1.8 PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Dados los vectores **A** = $\langle a_1 , a_2\rangle$ y **B** = $\langle b_1 , b_2\rangle$, el producto escalar o interno de **A** y **B** se denota por **A** • **B** y se define por :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \langle a_1 , a_2\rangle \cdot \langle b_1 , b_2\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 \qquad (10)$$

OBSERVACIONES 1.6

1. El producto escalar de vectores es una operación cuyo resultado es una escalar y no un vector.
   Por ejemplo , si **A** = $\langle 2 , -3\rangle$ y **B** = $\langle 4 , 1\rangle$, entonces según (10)
   $$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (2)(4) + (-3)(1) = 8 - 3 = 5$$
2. Si **A** , **B** $\in \mathbf{R}^n$, entonces
   $$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

TEOREMA 1.6 ***PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR***

Si **A**, **B** y **C** son vectores en $\mathbf{R}^2$ y $r \in \mathbf{R}$ es un escalar, entonces se cumplen las siguientes propiedades :

PE_1 : **A** • **B** = **B** • **A** — Conmutatividad

PE_2 : r(**A** • **B**) = (r**A**) • **B** — Asociatividad escalar

PE_3 : **C** • (**A** + **B**) = **C** • **A** + **C** • **B**
(**A** + **B**) • **C** = **A** • **C** **B** • **C** — Distribuidad

$P.E_4$: **A** • **A** = $\|\mathbf{A}\|^2 > 0$ — Magnitud respecto al producto escalar

$P.E_5$: **A** • **A** = 0 $\Leftrightarrow$ **A** = **O**

La prueba de estas propiedades son muy simples, por lo que demostraremos la primera y la cuarta, dejando como ejercicio las demostraciones restantes. Para demostrar la primera propiedad, sean **A** = $\langle a_1 , a_2\rangle$ y **B** = $\langle b_1 , b_2\rangle$

$$\Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1b_1 + a_2b_2 = b_1a_1 + b_2a_2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

Para la cuarta propiedad, sea **A** = $\langle a_1 , a_2\rangle$, entonces

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \langle a_1 , a_2\rangle \cdot \langle a_1 , a_2\rangle = (a_1)^2 + (a_2)^2$$
$$= (\sqrt{a_1^2 + a_2^2})^2 = \|\mathbf{A}\|^2$$

INTERPRETACION GEOMETRICA DEL PRODUCTO ESCALAR EN $\mathbf{R}^2$

Sean **A** y **B** dos vectores y **A - B** (el vector que va de **B** a **A**). Si **A** es perpendicular a **B** , ocurre que la representación geométrica de los vectores **A** , **B** y **A - B** es un triángulo rectángulo, para los cuales, por aplicación del teorema de Pitágoras se tiene que :

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{A}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2$$
$$\Rightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \|\mathbf{A}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2 \qquad (PE_4)$$
$$\Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \|\mathbf{A}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2 \qquad (PE_3)$$
$$\Rightarrow \|\mathbf{A}\|^2 - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \|\mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{A}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2 \qquad (PE_4)$$

de donde : $-2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$

Como hemos establecido la condición de ortogonalidad para **A** y **B**, entonces podemos dar la siguiente definición.

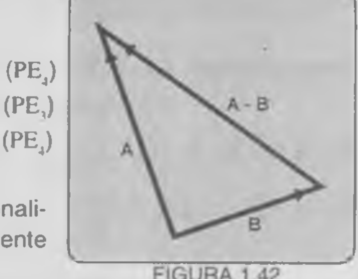


FIGURA 1.42

DEFINICION 1.12 ***VECTORES ORTOGONALES***

Dos vectores **A** y **B** son ortogonales si y sólo si **A** • **B** = 0 (El vector nulo **O** se considera ortogonal al cualquier vector)

Si es el caso que **A** y **B** son ambos no nulos, entonces se dice que los vectores son ortogonales y anotaremos :

$$\mathbf{A} \perp \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (11)$$

Por ejemplo, si $A = \langle 1/2, -3 \rangle$ y $B = \langle -2, -1/3 \rangle$, entonces según (10)

$$A \cdot B = (1/2)(-2) + (-3)(-1/3) = -1 + 1 = 0$$

Como A y B no son nulos, entonces $A \perp B$

DEFINICION 1.13 *El vector* $A^{\perp}$

Para cada vector $A = \langle a_1, a_2 \rangle \in R^2$, definimos un correspondiente vector $A^{\perp} \in R^2$, que se lee *ortogonal* a A, mediante

$$A^{\perp} = \langle -a_2, a_1 \rangle \qquad (12)$$

Geométricamente el vector $A^{\perp}$ se obtiene haciendo rotar el vector A, sobre su punto inicial, un ángulo de 90º en dirección contraria a las agujas del reloj. Se verifica luego que si $A \perp A^{\perp} \Rightarrow A \cdot A^{\perp} = 0$

En efecto, $A \cdot A^{\perp} = \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle -a_2, a_1 \rangle$

$= -a_1a_2 + a_2a_1 = 0$

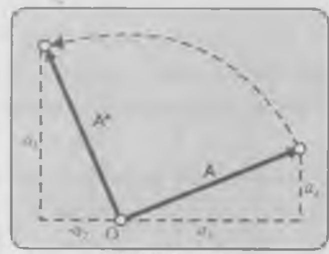


FIGURA 1.43

TEOREMA 1.7 Dados los vectores $A = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $B = \langle b_1, b_2 \rangle$, ambos diferentes de O, se tiene que :

$$A \perp B \Leftrightarrow A \parallel B^{\perp} \qquad (13)$$

Demostración. En efecto, si $B = \langle b_1, b_2 \rangle$, $B \neq O \Rightarrow b_1 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$

Supongamos que $b_1 \neq 0$

$$A \perp B \Rightarrow A \cdot B = \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{b_2}{b_1}a_2$$

Por lo que : $A = \left\langle -\frac{b_2}{b_1}a_2, a_2 \right\rangle = \frac{a_2}{b_1}\langle -b_2, b_1 \rangle$

$$A = \frac{a^2}{b}B^{\perp} = rB^{\perp} \Rightarrow A \parallel B^{\perp}$$

TEOREMA 1.8 Sean A y B dos vectores en R^2, ambos diferentes de O, entonces

$$A \parallel B \Leftrightarrow A \cdot B^{\perp} = A^{\perp} \cdot B = 0 \qquad (14)$$

La demostración se deja como ejercicio.

TEOREMA 1.9 *Desigualdad de Cauchy - Schwartz*

Sean A y B vectores en R^2, entonces se cumple

1. $|A \cdot B| < \|A\| \, \|B\|$
2. $|A \cdot B| = \|A\| \, \|B\| \Leftrightarrow A \parallel B$

Demostración.

1. Si A = O ó B = O, entonces se nota claramente que el teorema es válido.
   Supongamos que $A \neq O$ y $B \neq O$ y consideremos la función para un número $r \in R$
   $$f(r) = \|A + rB\|^2 = (A + rB) \cdot (A + rB) \qquad (1)$$
   y ocurre que $f(r) \geq 0$, $\forall r \in R$
   Desarrollando (1) nos dá el polinomio de segundo grado :
   $$f(r) = (B \cdot B)r^2 + 2(A \cdot B)r\,(A \cdot A)$$
   Completando el cuadrado para r se tiene :
   $$f(r) = (B \cdot B)\left[r^2 + \frac{2(A \cdot B)}{(B \cdot B)}r + \frac{(A \cdot B)^2}{(B \cdot B)^2}\right] - \frac{(A \cdot B)^2}{(B \cdot B)} + (A \cdot A)$$
   $$= (B \cdot B)\left(r + \frac{A \cdot B}{B \cdot B}\right)^2 + \frac{(A \cdot A)(B \cdot B) - (A \cdot B)^2}{B \cdot B}$$
   Si hacemos $(r_0) = -\frac{A \cdot B}{B \cdot B} \Rightarrow f(r_0) = \frac{(A \cdot B)(B \cdot B) - (A \cdot B)^2}{B \cdot B}$ (2)
   Como $f(r_0) \geq 0$ y $B \cdot B = \|B\|^2 > 0$, implica que
   $$(A \cdot A)(B \cdot B) - (A \cdot B)^2 \geq 0 \Rightarrow (A \cdot B)^2 \leq (A \cdot A)(B \cdot B)$$
   $$\Rightarrow |A \cdot B|^2 \leq \|A\|^2 \, \|B\|^2$$
   $$\Rightarrow |A \cdot B| \leq \|A\| \, \|B\|$$
2. $|A \cdot B| = \|A\| \, \|B\| \Leftrightarrow A \parallel B$
   Probaremos que si $|A \cdot B| = \|A\| \, \|B\| \Rightarrow A \parallel B$
   En efecto, si $|A \cdot B| = \|A\| \, \|B\| \Rightarrow (A \cdot B)^2 = \|A\|^2 \, \|B\|^2$
   $$\Rightarrow (A \cdot B)^2 = (A \cdot A)(B \cdot B)$$
   Sustituyendo en (2) ocurre que : $f(r_0) = |A + r_0B| = 0$
   $$\Rightarrow A + r_0B = A - \left(\frac{A \cdot B}{B \cdot B}\right)B = 0 \Rightarrow A = rB \Rightarrow A \parallel B$$
   Probaremos ahora que si $A \parallel B \Rightarrow |A \cdot B| = \|A\| \, \|B\|$
   En efecto, si $A \parallel B \Rightarrow A = rB$
   Luego, $|A \cdot B| = |(rB) \cdot B| = |r(B \cdot B)| = |r| \, \|B\|^2$
   $= |r| \, \|B\| \, \|B\| = \|rB\| \, \|B\|$
   $= \|A\| \, \|B\|$ ■

> *TEOREMA 1.10* *Desigualdad triangular*
>
> Sean **A** y **B** vectores en $\mathbb{R}^2$, entonces
> $$||\mathbf{A} + \mathbf{B}|| \leq ||\mathbf{A}|| + ||\mathbf{B}||$$
> Más aún : $||\mathbf{A} + \mathbf{B}|| = ||\mathbf{A}|| + ||\mathbf{B}||$ si y sólo si un vector es un múltiplo escalar no negativo del otro.

Demostración. En efecto :

$$||\mathbf{A} + \mathbf{B}||^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})$$
$$= ||\mathbf{A}||^2 + 2\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + ||\mathbf{B}||^2$$
$$\leq ||\mathbf{A}||^2 + 2\,|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| + ||\mathbf{B}||^2 \qquad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \leq |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|)$$

Por la desigualdad (1) del teorema de Schwartz, se sigue que

$$||\mathbf{A} + \mathbf{B}||^2 \leq ||\mathbf{A}||^2 + 2||\mathbf{A}||\;||\mathbf{B}|| + ||\mathbf{B}||^2$$
$$\leq (||\mathbf{A}|| + ||\mathbf{B}||)^2$$

Extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros obtenemos lo deseado, esto es :

$$||\mathbf{A} + \mathbf{B}|| \leq ||\mathbf{A}|| + ||\mathbf{B}|| \qquad \blacksquare$$

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Demostrar que : $||\mathbf{A} + \mathbf{B}||^2 = ||\mathbf{A}||^2 + ||\mathbf{B}||^2 + 2\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

Demostración. En efecto : $||\mathbf{A} + \mathbf{B}||^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})$ (PE_4)

$$= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \qquad (PE_3)$$
$$= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \qquad (PE_2)$$
$$= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + 2\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \qquad (PE_1)$$
$$\therefore\; ||\mathbf{A} + \mathbf{B}||^2 = ||\mathbf{A}||^2 + ||\mathbf{B}||^2 + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad \blacksquare \qquad (PE_4)$$

Ejemplo 2 Demostrar que **A** + **B** y **A** - **B** son ortogonales $\Leftrightarrow ||\mathbf{A}|| = ||\mathbf{B}||$

Demostración. Demostraremos primero la ortogonalidad

En efecto, por hipótesis : $||\mathbf{A}|| = ||\mathbf{B}|| \Rightarrow ||\mathbf{A}||^2 = ||\mathbf{B}||^2$

$$\Rightarrow ||\mathbf{A}||^2 - ||\mathbf{B}||^2 = 0$$
$$\Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 0$$

Por tanto, según (11), **A** + **B** y **A** - **B** son ortogonales.

Ahora demostraremos la igualdad de las magnitudes.

En efecto, por hipótesis , **A** + **B** y **A** - **B** son ortogonales

$$\Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = 0$$
$$\Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\Rightarrow ||\mathbf{A}||^2 - ||\mathbf{B}||^2 = 0 \Rightarrow ||\mathbf{A}||^2 = ||\mathbf{B}||^2$$
$$\therefore\; ||\mathbf{A}|| = ||\mathbf{B}|| \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 3 Demostrar que : $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\perp} = \mathbf{A}^{\perp} + \mathbf{B}^{\perp}$

Demostración. En efecto, sean : $\mathbf{A} = \langle a_1 , a_2 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle b_1 , b_2 \rangle$

Entonces : $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle a_1 + b_1 , a_2 + b_2 \rangle$

Por la definición 1.12 : $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\perp} = \langle -a_2 - b_2 , a_1 + b_1 \rangle$

$$= \langle -a_2 , a_1 \rangle + \langle -b_2 , b_1 \rangle$$
$$\therefore\; (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\perp} = \mathbf{A}^{\perp} + \mathbf{B}^{\perp} \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4 Demostrar que si **A**, **B** y **C** son vectores en $\mathbb{R}^2$, entonces el vector $\mathbf{V} = (\mathbf{B}^{\perp} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A} - (\mathbf{A}^{\perp} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B}$ es paralelo al vector **C**.

Demostración. Por el teorema 1.8 sabemos que $\mathbf{A} \,||\, \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{\perp} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{\perp} = 0$

$$\Rightarrow \mathbf{V}^{\perp} \cdot \mathbf{C} = [\,(\mathbf{B}^{\perp} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A} - (\mathbf{A}^{\perp} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B}\,]^{\perp} \cdot \mathbf{C}$$
$$= [\,(\mathbf{B}^{\perp} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}^{\perp} - (\mathbf{A}^{\perp} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B}^{\perp}\,] \cdot \mathbf{C} \qquad \text{(Ejemplo 3)}$$
$$= (\mathbf{B}^{\perp} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{A}^{\perp} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A}^{\perp} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B}^{\perp} \cdot \mathbf{C}) \qquad (PE_1)$$

Por lo tanto, si $\mathbf{V}^{\perp} \cdot \mathbf{C} = 0 \Rightarrow \mathbf{V} \,||\, \mathbf{C}$ $\blacksquare$

Ejemplo 5 Si $\mathbf{i} = \langle 1 , 0 \rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0 , 1 \rangle$, resolver la ecuación

$$2(\langle 1/2 , 6 \rangle + \mathbf{i}^{\perp} - \mathbf{x}) = \mathbf{j}^{\perp} - 2\mathbf{x}^{\perp}$$

Solución. Sea el vector $\mathbf{x} = \langle x_1 , x_2 \rangle$, entonces

$$2(\langle 1/2 , 6 \rangle + \langle 1 , 0 \rangle^{\perp} - \langle x_1 , x_2 \rangle) = \langle 0 , 1 \rangle^{\perp} - 2\langle x_1 , x_2 \rangle^{\perp}$$
$$\Rightarrow \langle 1 , 12 \rangle + \langle 0 , 2 \rangle - 2\langle x_1 , x_2 \rangle = \langle -1 , 0 \rangle - 2\langle -x_2 , x_1 \rangle$$
$$\Rightarrow \langle 2 , 14 \rangle = 2\langle x_1 , x_2 \rangle - 2\langle -x_2 , x_1 \rangle$$
$$\Rightarrow \langle 1 , 7 \rangle = \langle x_1 + x_2 , x_2 - x_1 \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x_1 + x_2 \\ 7 = x_2 - x_1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos : $x_1 = -3$, $x_2 = 4$

$$\therefore\; \mathbf{x} = \langle -3 , 4 \rangle \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 6 Sean **A** , **B** $\in \mathbb{R}^2$, demostrar que si $2\mathbf{A}^{\perp} - \mathbf{B} = 2\mathbf{B}^{\perp} - \mathbf{A}$, entonces **A** + **B** es ortogonal a **A** - **B**.

Demostración. En efecto, si $2\mathbf{A}^{\perp}\cdot\mathbf{B}=2\mathbf{B}^{\perp}\cdot\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=2(\mathbf{B}^{\perp}-\mathbf{A}^{\perp})$ (1)

Aplicando el ortogonal a cada miembro de (1) se tiene :

$(\mathbf{A}-\mathbf{B})^{\perp}=2(\mathbf{B}^{\perp}-\mathbf{A}^{\perp})^{\perp}$; pero como , $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\perp}=\mathbf{A}^{\perp}+\mathbf{B}^{\perp}$ y $(\mathbf{A}^{\perp})^{\perp}=-\mathbf{A}$

$\Rightarrow \mathbf{A}^{\perp}-\mathbf{B}^{\perp}=2(-\mathbf{B}+\mathbf{A})$, de donde : $4(\mathbf{A}-\mathbf{B})=2(\mathbf{A}^{\perp}-\mathbf{B}^{\perp})$ (2)

Sumando (1) y (2) obtenemos : $5(\mathbf{A}-\mathbf{B})=\mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{O}$

Por lo tanto , $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{O}=0 \Rightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{B})\perp(\mathbf{A}-\mathbf{B})$ ■

Ejemplo 7 Hallar la norma del vector $\mathbf{B}=\langle -3m , m\rangle$, sabiendo que ha sido descompuesto en el vector $\mathbf{A}=\langle -5 , 3\rangle$ y en otro vector paralelo al vector $\mathbf{C}=\langle 1 , 1\rangle$

Solución. Si $\mathbf{B}=m\langle -3 , 1\rangle \Rightarrow ||\mathbf{B}||=|m|\sqrt{(-3)^2+(1)^2}=|m|\sqrt{10}$ (1)

y si $\mathbf{B}=\mathbf{A}+r\,\mathbf{C} \Rightarrow m\langle -3 , 1\rangle=\langle -5 , 3\rangle+r\langle 1 , 1\rangle$

Multiplicando escalarmente, cada miembro por $\langle 1 , 1\rangle^{\perp}$, se tiene :

$m\langle -3 , 1\rangle\cdot\langle -1 , 1\rangle=\langle -8 , 3\rangle\cdot\langle -1 , 1\rangle+r\langle 1 , 1\rangle\cdot\langle -1 , 1\rangle$

$\Rightarrow m(3+1)=(5+3)+r(0)$, de donde : $m=2$

Por tanto, en (1), se obtiene lo deseado : $||\mathbf{B}||=2\sqrt{10}$ ■

Ejemplo 8 Si $\mathbf{A}=\langle -6 , 15\rangle$, $\mathbf{B}=\langle -2 , 9\rangle$ y $\mathbf{C}=\langle -2m , 3m\rangle$ y se sabe que $\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\mathbf{A}$, $\mathbf{X}\parallel\mathbf{B}$ e $\mathbf{Y}\parallel\mathbf{C}$; hallar $\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}^{\perp}$

Solución. Si $\mathbf{X}\parallel\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{X}=t\langle -2 , 9\rangle$, y si $\mathbf{Y}\parallel\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{Y}=m\langle -2 , 3\rangle$

Luego si $\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\mathbf{A} \Rightarrow t\langle -2 , 9\rangle+m\langle -2 , 3\rangle=\langle -6 , 15\rangle$ (1)

Usaremos un método más directo para calcular t y m.

Para calcular t , multiplicamos escalarmente la ecuación (1) por $\langle -2 , 3\rangle^{\perp}$

$$t\langle -2 , 9\rangle\cdot\langle -3 , -2\rangle+m(0)=\langle -6 , 15\rangle\cdot\langle -3 , 2\rangle \Rightarrow t=\frac{\langle -6 , 15\rangle\cdot\langle -3 , -2\rangle}{\langle -2 , 9\rangle\cdot\langle -3 , -2\rangle}=1$$

Para calcular m , multiplicamos escalarmente la ecuación (1) por $\langle -2 , 9\rangle^{\perp}$

$$t(0)+m\langle -2 , 3\rangle\cdot\langle -9 , -2\rangle=\langle -6 , 15\rangle\cdot\langle -9 , -2\rangle \Rightarrow m=\frac{\langle -6 , 15\rangle\cdot\langle -9 , -2\rangle}{\langle -2 , 3\rangle\cdot\langle -9 , -2\rangle}=2$$

Luego , $\mathbf{X}=\langle -2 , 9\rangle$ y $\mathbf{Y}=\langle -4 , 6\rangle \Rightarrow \mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}^{\perp}=\langle -2 , 9\rangle\cdot\langle -6 , -4\rangle=-24$ ■

Ejemplo 9 Si $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{O}$ y $||\mathbf{A}||=2$, $||\mathbf{B}||=5$, $||\mathbf{C}||=8$; hallar $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

Solución. $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B}=-\mathbf{C} \Rightarrow ||\mathbf{A}+\mathbf{B}||=||-\mathbf{C}||$

Elevando al cuadrado ambos miembros se tiene :

$||\mathbf{A}||^2+2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+||\mathbf{B}||^2=||\mathbf{C}||^2 \Rightarrow 4+2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+25=64$

$\Rightarrow \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=35/2$ ■

Ejemplo 10 Dados tres vectores unitarios **a** , **b** y **c** que satisfacen la condición $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{O}$. Hallar el valor de $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$

Solución. Si $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{O} \Rightarrow (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2=\mathbf{O}^2$

$\Rightarrow ||\mathbf{a}||^2+||\mathbf{b}||^2+||\mathbf{c}||^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=0$

Como a, **b** y **c** son unitarios $\Rightarrow 1+1+1+2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})=0$

$\Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=-3/2$ ■

Ejemplo 11 Dado vector $\mathbf{B}=\langle 2 , 3\rangle$ y la función $f:\mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R} \mid f(\mathbf{P})=\mathbf{P}\cdot\mathbf{B}$. El vector **A** es tal que $f(\mathbf{A})=-16$ y $\mathbf{A}\parallel\mathbf{C}=\langle 1 , 2\rangle$. Calcular $||\mathbf{A}||$.

Solución. Si $f(\mathbf{P})=\mathbf{P}\cdot\mathbf{B} \Rightarrow f(\mathbf{A})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=-16$

$\mathbf{A}\parallel\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A}=r\,\mathbf{C}=r\langle 1 , 2\rangle \Rightarrow ||\mathbf{A}||=|r|\sqrt{5}$ (1)

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=-16 \Rightarrow r\langle 1 , 2\rangle\cdot\langle 2 , 3\rangle=-16 \Rightarrow r(2+6)=-16 \Leftrightarrow r=-2$

Por lo tanto, en (1) : $||\mathbf{A}||=2\sqrt{5}$ ■

Ejemplo 12 Dados los vectores $\mathbf{A}=\langle m , 3p\rangle$ y $\mathbf{B}=\langle -2p , n\rangle$, calcular la norma de $\mathbf{A}-\mathbf{B}^{\perp}$, sabiendo que $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\langle 8 , -4\rangle$ y $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{\perp}=0$.

Solución. Si $\langle m , 3p\rangle+\langle -2p , n\rangle=\langle 8 , -4\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} m-2p=8 \Rightarrow m=2p+8 & (1)\\ 3p+n=-4 \Rightarrow n=-3p-4 & (2)\end{cases}$

y si $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{\perp}=0 \Rightarrow \langle m , 3p\rangle\cdot\langle -n , -2p\rangle=0 \Rightarrow -mn-6p^2=0 \Rightarrow mn=-6p^2$ (3)

Sustituyendo (1) y (2) en (3) se tiene : $(2p+8)(-3p-4)=-6p^2$, de donde , $p=-1$

Luego, en (1) y (2) obtenemos : $m=6$ y $n=1$, entonces , $\mathbf{A}=\langle 6 , -3\rangle$ y $\mathbf{B}=\langle 2 , -1\rangle$

Por tanto , $\mathbf{A}-\mathbf{B}^{\perp}=\langle 6 , 3\rangle-\langle 1 , 2\rangle=\langle 5 , -5\rangle \Rightarrow ||\mathbf{A}-\mathbf{B}^{\perp}||=5\sqrt{2}$ ■

Ejemplo 13 Si a y b son vectores tales que $||\mathbf{a}||<1$ y $||\mathbf{b}||<1$, demostrar que $\forall t\in[0 , 1]$, $||\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})||<1$

Demostración. En efecto , si $||\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})||=||(1-t)\mathbf{a}+t\,\mathbf{b}||$, entonces por la desigualdad triangular :

$||\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})|| \leq ||(1-t)\mathbf{a}||+||t\,\mathbf{b}||$

$\Rightarrow ||\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})|| \leq |1-t|\,||\mathbf{a}||+|t|\,||\mathbf{b}||$ (1)

Como $t\in[0 , 1]$, esto es , $t>0 \Rightarrow |t|=t$,

$0\leq t\leq 1 \Rightarrow -1\leq -t\leq 0 \Rightarrow 0\leq 1-t\leq 1 \Rightarrow |1-t|=1-t$,

Por hipótesis : $||\mathbf{a}||<1 \Rightarrow (1-t)||\mathbf{a}||<1-t$, con $t\neq 1$

$||\mathbf{b}||<1 \Rightarrow t||\mathbf{b}||<t$, con $t\neq 0$

Por lo tanto , en (1) podemos escribir

$||\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})||<(1-t)+t \Rightarrow ||\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})||<1$ ■

Ejemplo 14 Demostrar que si $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle \|\mathbf{B}\|, \|\mathbf{A}\| \rangle$, entonces $\mathbf{A}$ es ortogonal a $\mathbf{B}$.

Demostración. Por hipótesis : $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle \|\mathbf{B}\|, \|\mathbf{A}\| \rangle$, entonces multiplicando escalarmente cada miembro por si mismo, se tiene :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \langle \|\mathbf{B}\|, \|\mathbf{A}\| \rangle \cdot \langle \|\mathbf{B}\|, \|\mathbf{A}\| \rangle$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{B}\|^2 + \|\mathbf{A}\|^2 \qquad (\text{PE}_4 \text{ y Producto escalar})$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{A}\|^2 + 2\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \|\mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{B}\|^2 + \|\mathbf{A}\|^2$$

de donde obtenemos : $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} \perp \mathbf{B}$ ■

Ejemplo 15 Dados los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tales que $\mathbf{A} - \mathbf{B} \neq \mathbf{O}$, demostrar que:

$$\left| \frac{\|\mathbf{A}\| - \|\mathbf{B}\|}{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|} \right| \leq 1$$

Demostración. Si escribimos $\|\mathbf{A}\| = \|(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + \mathbf{B}\|$, entonces por la desigualdad triangular : $\|\mathbf{A}\| \leq \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| + \|\mathbf{B}\|$

$$\Rightarrow \|\mathbf{A}\| - \|\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$$

Como $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$ es positivo , entonces : $\dfrac{\|\mathbf{A}\| - \|\mathbf{B}\|}{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|} \leq 1$ (1)

Análogamente si escribimos : $\|-\mathbf{B}\| = \|-\mathbf{B} + \mathbf{A} - \mathbf{A}\|$

y dado que $\|-\mathbf{B}\| = \|\mathbf{B}\| \Rightarrow \|\mathbf{B}\| = \|(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + (-\mathbf{A})\|$

$$\Rightarrow \|\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| + \|-\mathbf{A}\|$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{B}\| - \|\mathbf{A}\| \leq \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$$

Multiplicando por -1 se tiene : $\|\mathbf{A}\| - \|\mathbf{B}\| \geq -\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| \Rightarrow \dfrac{\|\mathbf{A}\| - \|\mathbf{B}\|}{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|} \geq -1$ (2)

De (1) y (2) se sigue que : $-1 \leq \dfrac{\|\mathbf{A}\| - \|\mathbf{B}\|}{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|} \leq 1 \Leftrightarrow \left| \dfrac{\|\mathbf{A}\| - \|\mathbf{B}\|}{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|} \right| \leq 1$ ■

Ejemplo 16 En la Figura 1.44 , A , C y E son puntos correspondientes a vértices de un triángulo equilátero inscrito y los segmentos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ son tangentes a la circunferencia tales que

$$\|\overrightarrow{AB}\| = 3 , \; \|\overrightarrow{CD}\| = 4 , \; \|\overrightarrow{EF}\| = 5$$

Si $\mathbf{S} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ y $\mathbf{U} = \langle 2 , 2\sqrt{3} \rangle$, hallar $\mathbf{S} \cdot \mathbf{U}$

Solución. Trasladamos los segmentos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ sobre un sistema cartesiano de modo que sus puntos iniciales coincidan con el origen. Entonces

$\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| \langle \text{Cos } 0^\circ , \text{Sen } 0^\circ \rangle = 3\langle 1 , 0 \rangle$

$\overrightarrow{EF} = \|\overrightarrow{EF}\| \langle \text{Cos } 120^\circ , \text{Sen } 120^\circ \rangle = 5\langle -1/2 , \sqrt{3}/2 \rangle$

$\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{CD}\| \langle \text{Cos } 240^\circ , \text{Sen } 240^\circ \rangle = 4\langle -1/2 , -\sqrt{3}/2 \rangle$

Luego : $\mathbf{S} = \langle 3 , 0 \rangle + \langle -5/2 , 5\sqrt{3}/2 \rangle + \langle -2 , -2\sqrt{3} \rangle = \langle -3/2 , \sqrt{3}/2 \rangle$

$$\therefore \mathbf{S} \cdot \mathbf{U} = \frac{1}{2}\langle -3 , \sqrt{3} \rangle \cdot 2\langle 1 , \sqrt{3} \rangle = -3 + 3 = 0$$ ■

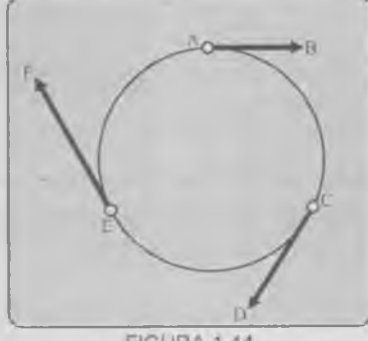


FIGURA 1.44

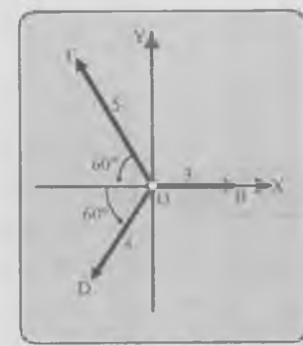


FIGURA 1.44a

Ejemplo 17 Un triángulo DEF de encuentra sobre un plano inclinado como se muestra en la Figura 1.45. Hallar el vector $\overrightarrow{DF}$

FIGURA 1.45

Solución. En el ΔDEF : $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$ (1)

$$\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{(5)^2 + (12)^2} = 13$$

Un vector unitario en el sentido de $\overrightarrow{OA}$ es :

$$\boldsymbol{u} = \frac{\langle 12 , 5 \rangle}{13}$$

Entonces : $\overrightarrow{DE} = 3\,\boldsymbol{u} = \langle \frac{36}{13} , \frac{15}{13} \rangle$

$$\overrightarrow{EF} = 2\,\boldsymbol{u}^\perp = 2\,\langle -\frac{5}{13} , \frac{12}{13} \rangle = \langle -\frac{10}{13} , \frac{24}{13} \rangle$$

Por lo tanto , en (1) : $\overrightarrow{DF} = \langle \frac{36}{13} , \frac{15}{13} \rangle + \langle -\frac{10}{13} , \frac{24}{13} \rangle = \langle 2 , 3 \rangle$ ■

Ejemplo 18 En la Figura 1.46 , m ($\measuredangle$ABC) = 90º y $\|\overrightarrow{OB}\| = 3$. Hallar el valor de x , si :

$$x = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$$

Solución. En la figura dada se tiene : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow x = \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC})$

$= ||\overrightarrow{OB}||^2 + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}$

$= ||\overrightarrow{OB}||^2 + \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = ||\overrightarrow{OB}||^2 + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}$

Como $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\therefore\ x = ||\overrightarrow{OB}||^2 = (3)^2 = 9$ ■

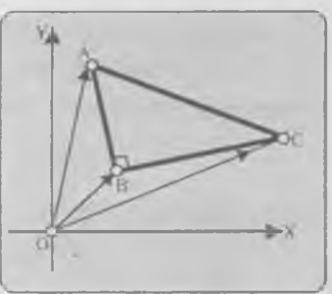


FIGURA 1.46

Ejemplo 19 Sea ABCD un rectángulo, una de cuyas diagonales tiene por extremos A(-6 , 1) y C(-2 , 8). Si los lados de mayor longitud tienen el mismo sentido del vector **S** = ⟨2 , 1⟩ , hallar los vértices B y D.

Solución. $\overrightarrow{AC} = \mathbf{C} - \mathbf{A} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \langle -2, 8\rangle - \langle -6, 1\rangle = \langle 4, 7\rangle$

Si $\overrightarrow{AB} \,||\, \mathbf{S} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = r\langle 2, 1\rangle$

$\overrightarrow{BC} \,||\, \mathbf{S}^{\perp} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = t\langle -1, 2\rangle$

Dado que : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \langle 4, 7\rangle = r\langle 2, 1\rangle + t\langle -1, 2\rangle$

De donde obtenemos : $r = 3$ y $t = 2$

Luego, si : $\overrightarrow{AB} = 3\langle 2, 1\rangle = \langle 6, 3\rangle$, entonces

$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \overrightarrow{AB} = \langle -6, 1\rangle + \langle 6, 3\rangle = \langle 0, 4\rangle \Rightarrow B(0, 4)$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = 2\langle -1, 2\rangle = \langle -2, 4\rangle$

$\Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{A} + \overrightarrow{AD} = \langle -6, 1\rangle + \langle -2, 4\rangle = \langle -8, 5\rangle \Rightarrow D(-8, 5)$ ■

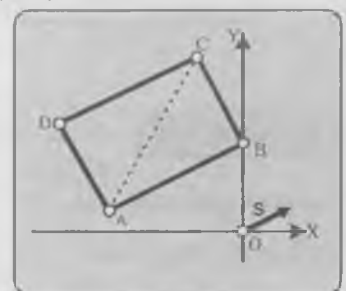


FIGURA 1.47

Ejemplo 20 En la Figura 1.48 , los triángulos OCB , PBS y RST son todos ellos semejantes. Hallar $\overrightarrow{RT}$ si P y R son puntos medios de $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{PS}$, respectivamente.

Solución. La Figura 1.48 muestra tres triángulos rectángulos isósceles, en donde :

$||\overrightarrow{OB}|| = 4\sqrt{2}$ y $||\overrightarrow{PS}|| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4$

Un vector unitario en el sentido de $\overrightarrow{OB}$ es :

$$\boldsymbol{u} = \frac{\langle 4, 4\rangle}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\langle 1, 1\rangle$$

Luego : $\overrightarrow{PB} = 2\sqrt{2}\,\boldsymbol{u} = 2\langle 1, 1\rangle$, $\overrightarrow{BS} = 2\sqrt{2}\,\boldsymbol{u}^{\perp} = 2\langle -1, 1\rangle$

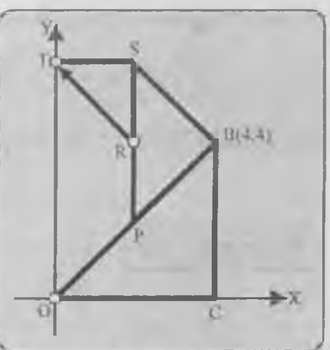


FIGURA 1.48

Si $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BS} \Rightarrow \overrightarrow{PS} = 2\langle 1, 1\rangle + 2\langle -1, 1\rangle = \langle 0, 4\rangle$

Un vector unitario en el sentido de $\overrightarrow{PS}$ es : $\mathbf{v} = \dfrac{\langle 0, 4\rangle}{4} = \langle 0, 1\rangle$

Entonces : $\overrightarrow{RS} = 2\,\mathbf{v} = \langle 0, 2\rangle$ y $\overrightarrow{ST} = 2\,\mathbf{v}^{\perp} = \langle -2, 0\rangle$

$\therefore\ \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} = \langle -2, 2\rangle$ ■

Ejemplo 21 En la Figura 1.49, ABCD es un cuadrado y ABE un triángulo equilátero. Si A(4 , 9) y C(6 , -5), hallar el vector

$$\mathbf{V} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AB}$$

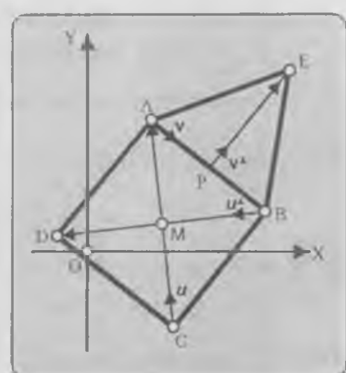


FIGURA 1.49

Solución. Si $\overrightarrow{CA} = \mathbf{A} - \mathbf{C} = \langle 4, 9\rangle - \langle 6, -5\rangle$

$\Rightarrow \overrightarrow{CA} = \langle -2, 14\rangle$

$||\overrightarrow{CA}|| = \sqrt{(-2)^2 + (14)^2} = 10\sqrt{2}$

$||\overrightarrow{DA}|| = ||\overrightarrow{CA}||\ \text{Cos}\ 45° = 10\sqrt{2}\,(1/\sqrt{2}) = 10$

Un vector unitario en el sentido de $\overrightarrow{CA}$ es :

$$\boldsymbol{u} = \frac{\overrightarrow{CA}}{||\overrightarrow{CA}||} = \frac{\langle -2, 14\rangle}{10\sqrt{2}} = \frac{\langle -1, 7\rangle}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \boldsymbol{u}^{\perp} = \frac{\langle -7, -1\rangle}{5\sqrt{2}}$$

M es punto medio de $\overrightarrow{CA} \Rightarrow \mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{C}) = \langle 5, 2\rangle$

$\overrightarrow{MD} = ||\overrightarrow{MD}||\,\boldsymbol{u}^{\perp} = 5\sqrt{2}\,\dfrac{\langle -7, -1\rangle}{5\sqrt{2}} = \langle -7, -1\rangle \Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{M} + \langle -7, -1\rangle \Rightarrow \mathbf{D} = \langle -2, 1\rangle$

También : $\mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{D}) \Rightarrow \mathbf{B} = 2\,\mathbf{M} - \mathbf{D} = 2\langle 5, 2\rangle - \langle -2, 1\rangle \Rightarrow \mathbf{B} = \langle 12, 3\rangle$

$\overrightarrow{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = \langle 12, 3\rangle - \langle 4, 9\rangle = \langle 8, -6\rangle$

Un vector unitario en el sentido de $\overrightarrow{AB}$ es : $\mathbf{v} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||} = \dfrac{\langle 8, -6\rangle}{10} = \dfrac{\langle 4, -3\rangle}{5}$

$||\overrightarrow{PE}||$ es la altura del triángulo equilátero AEB $\Rightarrow ||\overrightarrow{PE}|| = 10\,(\sqrt{3}/2) = 5\sqrt{3}$

Luego : $\overrightarrow{PE} = ||\overrightarrow{PE}||\ \mathbf{v}^{\perp} = 5\sqrt{3}\,\dfrac{\langle 3, 4\rangle}{5} = \sqrt{3}\,\langle 3, 4\rangle$

$\mathbf{P} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \langle 8, 6\rangle \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{P} + \sqrt{3}\langle 3, 4\rangle = \langle 8 + 3\sqrt{3}, 6 + 4\sqrt{3}\rangle$

$\overrightarrow{DE} = \mathbf{E} - \mathbf{D} = \langle 8 + 3\sqrt{3}, 6 + 4\sqrt{3}\rangle - \langle -2, 1\rangle = \langle 10 + 3\sqrt{3}, 5 + 4\sqrt{3}\rangle$

$\therefore\ \mathbf{V} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AB} = \langle 18 + 3\sqrt{3}, -1 + 4\sqrt{3}\rangle$ ■

Ejemplo 22 En la Figura 1.50, ABCD es un trapecio, el ΔADB es isósceles ($\|\overline{AD}\| = \|\overline{BD}\|$) y el ΔBDC es rectángulo en D y tiene la hipotenusa $\overline{BC}$ de longitud $10\sqrt{2}$ unidades. Si el ángulo BCD mide 37º (considerar Tg37º = 3/4), B(-2 , 4) y D(4 , -2) , hallar el vector $\overrightarrow{AC}$.

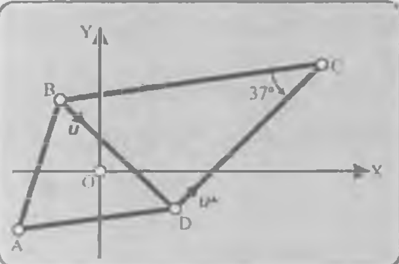


FIGURA 1.50

Solución. $\overrightarrow{BD} = \mathbf{D} - \mathbf{B} = \langle 4, -2\rangle - \langle -2, 4\rangle = \langle 6, -6\rangle$

$\|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{(6)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$

Un vector unitario en el sentido de BD es : $\boldsymbol{u} = \dfrac{\langle 6, -6\rangle}{6\sqrt{2}} = \dfrac{\langle 1, -1\rangle}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boldsymbol{u}^{\perp} = \dfrac{\langle 1, 1\rangle}{\sqrt{2}}$

En el triángulo rectángulo BDC : $\|\overline{DC}\| = \|\overline{BD}\|$ Cotg 37° $= 6\sqrt{2}\,(4/3) = 8\sqrt{2}$

$$\overrightarrow{DC} = \|\overrightarrow{DC}\|\,\boldsymbol{u}^{\perp} = 8\sqrt{2}\left(\frac{\langle 1, 1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = 8\langle 1, 1\rangle$$

Si $\overrightarrow{DC} = \langle 8, 8\rangle \Rightarrow \mathbf{C} - \mathbf{D} = \langle 8, 8\rangle \Rightarrow \mathbf{C} = \langle 4, -2\rangle + \langle 8, 8\rangle = \langle 12, 6\rangle$

$$\overrightarrow{BC} = \mathbf{C} - \mathbf{B} = \langle 12, 6\rangle - \langle -2, 4\rangle = 2\langle 7, 1\rangle$$

Un vector unitario en el sentido de $\overrightarrow{BC}$ es : $\mathbf{v} = \dfrac{\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \dfrac{2\langle 7, 1\rangle}{10\sqrt{2}} = \dfrac{\langle 7, 1\rangle}{5\sqrt{2}}$

El ΔADB es isósceles , entonces : $\|\overline{AD}\| = \|\overline{BD}\| = 6\sqrt{2}$

y como $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AD}\|\,\mathbf{v} = 6\sqrt{2}\left(\dfrac{\langle 7, 1\rangle}{5\sqrt{2}}\right) = \dfrac{6}{5}\langle 7, 1\rangle$

$$\overrightarrow{AD} = \mathbf{D} - \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{D} - \overrightarrow{AD} = \langle 4, -2\rangle - \frac{6}{5}\langle 7, 1\rangle = \langle -22/5, -16/5\rangle$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AC} = \mathbf{C} - \mathbf{A} = \langle 12, 6\rangle - \langle -22/5, -16/5\rangle = \langle 82/5, 46/5\rangle$$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 7*

1. Sean **A** y **B** vectores en $\mathbb{R}^2$. Utilizando las propiedades del producto escalar demostrar :
   a) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|^2 - \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2 = 4\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
   b) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|^2 + \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2 = 2\,(\|\mathbf{A}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2)$
2. Demostrar que los vectores **A** y **B** en $\mathbb{R}^2$ son ortogonales, si y sólo si $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{A}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2$
3. Dados los vectores **A** y **B** en $\mathbb{R}^2$, demostrar que :

   a) $(\mathbf{A}^{\perp})^{\perp} = -\mathbf{A}$ c) $\mathbf{A}^{\perp} \cdot \mathbf{B}^{\perp} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
   b) $\mathbf{A}^{\perp} \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{\perp}$ d) $\|\mathbf{A}^{\perp}\| = \|\mathbf{A}\|$
4. Dados los vectores **A** y **B** en $\mathbb{R}^2$, demostrar que :
   a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -\|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\| \Leftrightarrow$ **A** y **B** tienen sentido opuestos
   b) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \Leftrightarrow$ **A** y **B** tienen el mismo sentido
5. Deducir de la desigualdad triangular que si **A** y **B** están en $\mathbb{R}^2$, entonces
   $$\big|\|\mathbf{A}\| - \|\mathbf{B}\|\big| \le \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$$
   (Sugerencia : escribir **A** = **B** - (**B** - **A**) y aplicar la desigualdad triangular)
6. Demostrar que si **A** y **B** son vectores paralelos en $\mathbb{R}^2$, entonces
   $$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|$$
7. Si **A** y **B** son vectores en $\mathbb{R}^2$, demostrar que
   a) $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{\perp}| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|$
   b) $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{\perp}| = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\| \Leftrightarrow \mathbf{A} \perp \mathbf{B}$
8. Demostrar mediante un contraejemplo que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ no implica ni que **A** = **C** , ni que **A** = **O**
9. Demostrar que el vector $\mathbf{V} = \mathbf{B} - \dfrac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|^2}\mathbf{A}$, es perpendicular al vector **A**
10. Demostrar que **A** + **B** y **A** - **B** son perpendiculares si y sólo si $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{B}\|$.
11. Si $\mathbf{A} = \langle 2, -3\rangle$, $\mathbf{B} = \langle -2, 1\rangle$ y $\mathbf{C} = \langle 3, 2\rangle$, hallar un vector unitario ortogonal al vector $\mathbf{V} = 5\,\mathbf{A} - 3\,(\mathbf{B} + \mathbf{C})$.
12. Si $\mathbf{A} = \langle 4m, m - 3\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 2, m + 3\rangle$, hallar los valores de m tales que **A** sea perpendicular a **B**.
13. Si $\boldsymbol{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores unitarios y paralelos , hallar la norma de $\boldsymbol{u}^{\perp} + \mathbf{v}$
14. Si a , b y a + b son vectores unitarios , hallar la norma del vector a - b
15. Si $\mathbf{A} = \langle 1, x\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 2x, x\rangle$ y $\mathbf{C} = \langle 2x, -1\rangle$, en donde x es un número real; hallar la suma de los elementos del conjunto $M = \{(x, y) \mid (\mathbf{A} - \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} - 1\}$
16. Sean **A** , **B** $\in \mathbb{R}^2$, ambos unitarios, demostrar que $\left\|\frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{1}{3}\mathbf{B}\right\| < 1$
17. Si $m \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{u} = \langle m - 2, 5 - 3m\rangle$ es un vector unitario , hallar el valor de
   $$\|m\,(\boldsymbol{u} + 2\,\boldsymbol{u}^{\perp}) + 2\,\boldsymbol{u}^{\perp}\|$$
18. Sean los vectores $\mathbf{A} = \langle x, x + 4\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 5x - 5, x - 4\rangle$. Si $x > 0$ y $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -10$, hallar la norma de **A** + **B**.
19. Sean los vectores **A** . **B** y **C** tales que $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{26}$, $\|\mathbf{B}\| = 3\sqrt{2}$ y $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = 12$. Si **A** = **B** - **C** , hallar la norma de **C**.

20. Si $||A|| = \sqrt{2}$, $||B|| = 2$ y $A \cdot B = 1/4$, hallar las longitudes de los vectores $2A - 3B$ y $4A + B$.

21. Sean los vectores $A = \langle m^2 - 3 , m - 1\rangle$, $B = \langle 4/m^2 , 4/m\rangle$, donde $m \neq 0$ es un número real positivo. Si **A** y **B** son ortogonales, hallar $V = 9B - 4A$

22. Si $i = \langle 1 , 0\rangle$ y $j = \langle 0 , 1\rangle$, resolver para **x**

$$3\langle -2 , -3\rangle^{\perp} + \frac{1}{2}[\, x + i^{\perp} - \langle 3 , -1\rangle\,]^{\perp} = \langle 5 , 2\rangle^{\perp} - 2x^{\perp}$$

23. Sean los vectores **A**, **B** y **C** tales que $A = B + C$, $||A|| = 5$, $||B|| = 2\sqrt{5}$ y $B \cdot C = 10$; hallar $||C||$.

24. Si $A = \langle 2 , x\rangle$, $B = \langle x , -2x\rangle$ y $C = \langle x - 2 , x + 1\rangle$, donde $x > 0$ y si $(A + B) \cdot C = A \cdot B + 1$, hallar el vector $V = A + B + C$.

25. Hallar los valores de m para que los vectores
$A = \langle m + 3 , 2m - 4\rangle$ y $B = \langle m - 1 , m + 1\rangle$ sean paralelos.

26. Sea OAB el triángulo cuyos vértices son $O = \langle 0 , 0\rangle$, $A = \langle -8 , 0\rangle$ y $B = \langle 0 , 6\rangle$. Si $\overrightarrow{OM}$ es la altura relativa al vértice O, hallar el vector $\overrightarrow{OM}$.

27. Sea el rectángulo ABCD de área 48 u² y cuyos dos vértices consecutivos son A(-2 , 5) y B(2 , 1). Si la diagonal $\overrightarrow{AC}$ tiene el mismo sentido del vector $v = \langle 5 , 1\rangle$, hallar los vértices C y D.

28. Sean A(3 , 2) y C(10 , 6) vértices opuestos de una paralelogramo ABCD. Si se sabe que $||\overrightarrow{BD}|| = \sqrt{5}$ y $|\,||\overrightarrow{BD}|| - ||\langle -2 , 4\rangle||\,| = ||\overrightarrow{BD} + \langle 2 , -4\rangle||$, hallar los vértices B y D.

29. En el cuadrilátero PQRS, sean $a = \overrightarrow{PQ}$, $b = \overrightarrow{QR}$, $c = \overrightarrow{RS}$ y $d = \overrightarrow{SP}$. Hallar $c \cdot d$, si se sabe que: $||a + b|| = 7$, $||c|| = 3$ y $||d|| = 5$

30. Si $A = \langle -3 , 5\rangle$ y $B = \langle 4 , -3\rangle$, hallar la norma del vector **C**, si:
a) $C = (A + B) \cdot (A - 2B)B^{\perp}$ b) $C = (A \cdot B)B^{\perp} - (A^{\perp} \cdot B)C$

31. Si u es un vector unitario y **A**, **B** son vectores cualesquiera, demostrar que:

$$(A \cdot u)(B \cdot u) + (A \cdot u^{\perp})(B \cdot u^{\perp}) = A \cdot B$$

(Sugerencia : considerar $u = \langle \text{Cos}\alpha , \text{Sen}\alpha\rangle$, $A = \langle a_1 , a_2\rangle$ y $B = \langle b_1 , b_2\rangle$)

32. Sea A(6 , 2) uno de los vértices de un ΔABC. Si $\overrightarrow{AB}$ tiene la misma dirección y sentido que el vector $\langle 1 , -2\rangle$ y $\overrightarrow{AC}$ tiene la misma dirección y sentido que el vector $\langle 3 , 4\rangle$ tal que $||\overrightarrow{AB}|| = 3\sqrt{5}$ y $||\overrightarrow{AC}|| = 10$. Hallar el vector $\overline{AM}$, si $\overline{AM}$ es la mediana del triángulo trazada desde el vértice A.

RELACIONES ENTRE VECTORES

1.9 ANGULO ENTRE DOS VECTORES

Sean **A** y **B** dos vectores no nulos que tienen el mismo origen y sea $\theta \in [0 , \pi]$ el menor de los ángulos positivos formado por sus respectivos vectores de posición normales, como se ilustra en la Figura 1.51. El teorema siguiente muestra como calcular este ángulo mediante el producto escalar.

TEOREMA 1.11 *Angulo entre dos vectores*

Si θ es el ángulo entre dos vectores no nulos **A** y **B**, entonces

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{A \cdot B}{||A||\,||B||}$$

Demostración. En efecto, los vectores **A**, **B** y la diferencia **A - B** forman un triángulo cuyos lados miden $||A||$, $||B||$ y $||A - B||$.

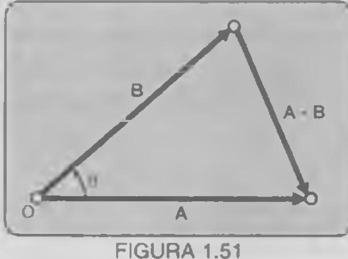


FIGURA 1.51

Por la ley de los cosenos, tenemos

$||A - B||^2 = ||A||^2 + ||B||^2 - 2||A||\,||B||\,\text{Cos}\theta$ (1)

Usando propiedades del producto escalar, podemos reescribir el primer miembro como

$$||A - B||^2 = (A - B) \cdot (A - B) = (A - B) \cdot A - (A - B) \cdot B$$
$$= A \cdot A - B \cdot A - A \cdot B + B \cdot B = ||A||^2 - 2\,A \cdot B + ||B||^2$$

que sustituido en (1) nos lleva a

$$||A||^2 - 2A \cdot B + ||B||^2 = ||A||^2 + ||B||^2 - 2\,||A||\,||B||\,\text{Cos}\theta$$

$$\Rightarrow \quad \text{Cos}\,\theta = \frac{A \cdot B}{||A||\,||B||} \qquad (15)$$

Nota. Si se conoce el ángulo entre dos vectores, entonces reescribiendo el Teorema 1.11 en la forma

$$A \cdot B = ||A||\,||B||\,\text{Cos}\theta \qquad (16)$$

obtenemos una forma alternativa para calcular el producto escalar.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Hallar el valor del ángulo que forma el vector **A** que va de P(4 , 5) a Q(6 , 4), con el vector **B** que va de S(-3 , 1) a T(-2 , -2).

Solución. $\mathbf{A} = \vec{PQ} = \mathbf{Q} - \mathbf{P} = \langle 6 , 4\rangle - \langle 4 , 5\rangle = \langle 2 , -1\rangle \Rightarrow ||\mathbf{A}|| = \sqrt{5}$

$\mathbf{B} = \vec{ST} = \mathbf{T} - \mathbf{S} = \langle -2 , -2\rangle - \langle -3 , 1\rangle = \langle 1 , -3\rangle \Rightarrow ||\mathbf{B}|| = \sqrt{10}$

Luego , por la fórmula (15) : $\text{Cos}\ \theta = \dfrac{\langle 2 , -1\rangle \cdot \langle 1 , -3\rangle}{(\sqrt{5})(\sqrt{10})} = \dfrac{2 + 3}{5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

En consecuencia , $\theta = 45°$ ■

Ejemplo 2 Hallar el norma del vector **D** , sabiendo que **A** y **B** forman un ángulo de 60º . **D** = **A** + **B** , $||\mathbf{A}|| = 3$ y $||\mathbf{B}|| = 5$.

Solución. Si $\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \Rightarrow ||\mathbf{D}|| = ||\mathbf{A} + \mathbf{B}||$

$\Rightarrow ||\mathbf{D}||^2 = ||\mathbf{A}||^2 + 2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + ||\mathbf{B}||^2$

Ahora, usando la forma alternativa del producto escalar , se tiene :

$||\mathbf{D}||^2 = ||\mathbf{A}||^2 + 2||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{B}||\ \text{Cos}\theta + ||\mathbf{B}||^2$

$= (3)^2 + 2(3)(5)(1/2) + (5)^2 = 49$

$\therefore ||\mathbf{D}|| = 7$ ■

Ejemplo 3 Calcular **A** • **B**. donde **A** y **B** son vectores de la Figura 1.52, para los cuales. $||\mathbf{A}|| = 4$ y $||\mathbf{B}|| = 2\sqrt{3}$

Solución. Si θ es el ángulo que forman ambos vectores, entonces :

$\theta = 90° - (12° + 18°) = 60°$

Luego, haciendo uso de la fórmula (16) se tiene :

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{B}||\ \text{Cos}\theta = (4)\ (3\sqrt{3})\text{Cos}\ 60°$

$\therefore \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 4\sqrt{3}$ ■

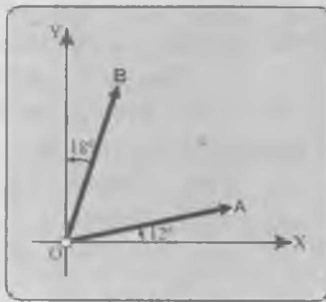


FIGURA 1.52

Ejemplo 4 Los vectores **A** y **B** forman entre si un ángulo de 30º y la norma de **A** es $\sqrt{48}$. Hallar la norma de **B** sabiendo que **A** - **B** es perpendicular al vector **A**.

Solución. Si $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \perp \mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{B})\cdot\mathbf{A} = 0$

$\Rightarrow \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow ||\mathbf{A}||^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

Usando la forma alternativa del producto escalar tenemos :

$||\mathbf{A}||^2 = ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{B}||\ \text{Cos}\ 30° \Rightarrow ||\mathbf{A}|| = ||\mathbf{B}||\ \text{Cos}\ 30$

Por lo que : $4\sqrt{3} = ||\mathbf{B}||\ (\sqrt{3}/2) \Rightarrow ||\mathbf{B}|| = 8$ ■

Ejemplo 5 Los vectores **A** y **B** forman un ángulo de π/6 radianes. Sabiendo que $||\mathbf{A}|| = \sqrt{3}$ y $||\mathbf{B}|| = 1$, hallar el ángulo entre los vectores **U** = **A** + **B** y **V** = **A** - **B**.

Solución. Haciendo uso de la fórmula (16) tenemos :

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{B}||\ \text{Cos}\ 30° = (\sqrt{3})\ (1)\ (\sqrt{3}/2) = 3/2$

$\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} = ||\mathbf{U}||\ ||\mathbf{V}||\text{Cos}\theta$

$\Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{B})\cdot(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = ||\mathbf{A} + \mathbf{B}||\ ||\mathbf{A} - \mathbf{B}||\ \text{Cos}\theta$

$\Rightarrow ||\mathbf{A}||^2 - ||\mathbf{B}||^2 = \sqrt{||\mathbf{A} + \mathbf{B}||^2\ ||\mathbf{A} - \mathbf{B}||^2}\ \text{Cos}\theta$

$\Rightarrow (\sqrt{3})^2 - (1)^2 = \sqrt{(||\mathbf{A}||^2 + 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + ||\mathbf{B}||^2)\ (||\mathbf{A}||^2 - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + ||\mathbf{B}||^2)}\ \text{Cos}\theta$

$\Rightarrow 2 = \sqrt{[\ 3 + 2(3/2) + 1]\ [\ 3 - 2(3/2) + 1]}\ \text{Cos}\theta$

de donde : $\text{Cos}\theta = 2/\sqrt{7} \Rightarrow \theta = \text{arc Cos}(2/\sqrt{7})$ ■

Ejemplo 6 Los vectores **A** , **B** y **C** forman dos a dos un ángulo de 60º , sabiendo que $||\mathbf{A}|| = 4$, $||\mathbf{B}|| = 2$ y $||\mathbf{C}|| = 6$, determinar la norma del vector **V** = **A** + **B** + **C**.

Solución. Si $\mathbf{V} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \Rightarrow ||\mathbf{V}||^2 = ||\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}||^2$

$\Rightarrow ||\mathbf{V}||^2 = ||\mathbf{A}||^2 + ||\mathbf{B}||^2 + ||\mathbf{C}||^2 + 2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + 2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + 2\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$

Como el ángulo entre los vectores **A** y **B** , **A** y **C** , **B** y **C** es de 60°, entonces

$||\mathbf{V}||^2 = ||\mathbf{A}||^2 + ||\mathbf{B}||^2 + ||\mathbf{C}||^2 + 2\,(||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{B}|| + ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{C}|| + ||\mathbf{B}||\ ||\mathbf{C}||)\ \text{Cos}\ 60°$

$= 16 + 4 + 36 + 2\ (4 \times 2 + 4 \times 6 + 2 \times 6)\ (1/2) = 100$

$\therefore ||\mathbf{V}|| = 10$ ■

Ejemplo 7 Los vectores **A** y **B** tienen igual longitud y forman un ángulo de 60º. Si la longitud de **A** + **B** es 4 unidades mayor que la longitud de uno de ellos, hallar la longitud de **A**.

Solución. Si $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{B}||\ \text{Cos}\theta$ y $||\mathbf{A}|| = ||\mathbf{B}|| \Rightarrow 2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = ||\mathbf{A}||^2$ (1)

Además : $||\mathbf{A} + \mathbf{B}|| = 4 + ||\mathbf{A}||$, elevando al cuadrado se tiene

$||\mathbf{A}||^2 + 2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + ||\mathbf{B}||^2 = 16 + 8||\mathbf{A}|| + ||\mathbf{A}||^2$

Teniendo en cuenta (1), resulta que: $3||\mathbf{A}||^2 = 16 + 8||\mathbf{A}|| + ||\mathbf{A}||^2$

de donde : $||\mathbf{A}||^2 - 4||\mathbf{A}|| - 8 = 0 \Leftrightarrow ||\mathbf{A}|| = 2 \pm \sqrt{4+8}$

$\therefore ||\mathbf{A}|| = 2 + 2\sqrt{3}$ ■

Ejemplo 8 Si el vector $\mathbf{A} = \langle -\sqrt{8}, \sqrt{50}\rangle$ gira 45º en el sentido horario, se determina el vector $\mathbf{B} = \langle x, y\rangle$. Hallar $x + y$

Solución. Como $||\mathbf{B}|| = ||\mathbf{A}|| \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{8 + 50}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 58$ (1)

Si :

$$\text{Cos } 45° = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{B}||} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\langle -2\sqrt{2}, 5\sqrt{2}\rangle \cdot \langle x, y\rangle}{(\sqrt{58})(\sqrt{58})}$$

de donde obtenemos : $y = \frac{1}{5}(2x + 29)$ (2)

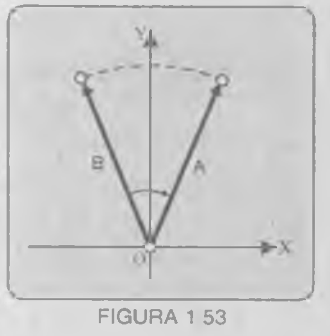


FIGURA 1.53

que sustituido en (1) da : $x^2 + 4x - 21 = 0 \Leftrightarrow x = -7$ ó $x = 3$

Elegimos $x = 3$ por cuanto el lado terminal de **B** está en el primer cuadrante. Luego, en (2) se tiene : $y = 7$

$\therefore x + y = 10$ ■

Ejemplo 9 En el cuadrado de la Figura 1.54, el lado mide a unidades. Hallar el valor del ángulo θ, si P y T son puntos que trisecan los lados del cuadrado.

Solución. Como P y T son puntos de trisección, entonces : $\vec{OP} = \langle a, a/3\rangle$ y $\vec{OT} = \langle a/3, a\rangle$

Luego : $||\vec{OP}|| = ||\vec{OT}|| = \sqrt{a^2 + (a/3)^2} = \frac{a}{3}\sqrt{10}$

$\vec{OP} \cdot \vec{OT} = \langle a, a/3\rangle \cdot \langle a/3, a\rangle = 2a^2/3$

$$\text{Si Cos}\theta = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OT}}{||\vec{OP}||\ ||\vec{OT}||} \Rightarrow \text{Cos}\theta = \frac{2a^2/3}{(a\sqrt{10}/3)^2} = \frac{3}{5}$$

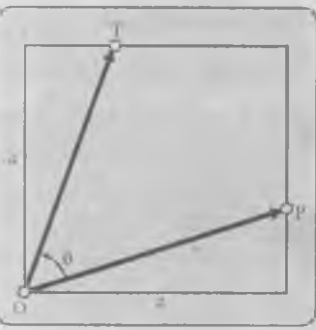


FIGURA 1.54

$\therefore \theta = \text{arc Cos } (3/5)$ ■

Ejemplo 10 Sean **A** y **B** vectores unitarios en $\mathbb{R}^2$. Demostrar que la suma es un vector unitario si y sólo si el ángulo formado por dichos vectores es de 120°

Demostración. (⇒) Probaremos primero que $||\mathbf{A} + \mathbf{B}|| = 1$

En efecto, por hipótesis θ = 120° es el ángulo entre los vectores **A** y **B**. Entonces :

$$||\mathbf{A} + \mathbf{B}||^2 = ||\mathbf{A}||^2 + ||\mathbf{B}||^2 + 2\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$
$$= ||\mathbf{A}||^2 + ||\mathbf{B}||^2 + 2||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{B}|| \text{ Cos}\theta$$
$$= 1 + 1 + 2\,(1)(1)(-1/2) = 1$$
$$\therefore ||\mathbf{A} + \mathbf{B}|| = 1$$

(⇐) Demostraremos ahora que **A** y **B** forman un ángulo de 120º.

En efecto, por hipótesis : $||\mathbf{A}|| = ||\mathbf{B}|| = ||\mathbf{A} + \mathbf{B}||$

Si $||\mathbf{A} + \mathbf{B}||^2 = 1 \Rightarrow ||\mathbf{A}||^2 + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \text{ Cos}\theta + ||\mathbf{B}||^2 = 1$

$\Rightarrow (1)^2 + 2||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{B}|| \text{ Cos}\theta + (1)^2 = 1$

$\Rightarrow 1 + 2(1)(1) \text{ Cos}\theta + 1 = 1 \Rightarrow \text{Cos}\theta = -1/2$

$\therefore \theta = 120°$ ■

Ejemplo 11 Sean **A** y **B** vectores en $\mathbb{R}^2$, **A** es un vector unitario, la suma de los componentes de **B** es 31 y el máximo valor de **A · B** es 41; hallar los vectores **A** y **B**.

Solución. Sean los vectores $\mathbf{A} = \langle x_1, y_1\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle x_2, y_2\rangle$

Si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{B}|| \text{ Cos}\theta$, y como $||\mathbf{A}|| = 1$ y $\text{Cos}\theta \in [-1, 1]$, el valor de **A · B** será máximo cuando Cosθ = 1 , luego :

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = ||\mathbf{B}|| \Rightarrow 41 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ (1)

Además , $x_2 + y_2 = 31 \Rightarrow y_2 = 31 - x_2$ (2)

Sustituyendo (2) en (1) se tiene : $41 = \sqrt{x_2^2 + (31 - x_2)^2}$

de donde obtenemos : $x_2^2 - 31x_2 - 360 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 40$ ó $x_2 = -9$

Por lo que, $y_2 = 9$ ó $y_2 = 40 \Rightarrow \mathbf{B} = \langle 40, -9\rangle$ ó $\mathbf{B} = \langle -9, 40\rangle$

Dado que el vector **A** es unittario entonces : $x_1^2 + y_1^2 = 1$ (3)

y si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 41 \Rightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 41 \Rightarrow \begin{cases} 40x_1 - 9y_1 = 41 & (4) \\ -9x_1 + 40y_1 = 41 & (5) \end{cases}$

De (3) ∩ (4) se tiene $\mathbf{A} = \langle 40/41, -9/41\rangle$, y de (3) ∩ (5) : $\mathbf{A} = \langle -9/41, 40/41\rangle$ ■

Ejemplo 12 Sean **A** y **B** y **C** vectores en $\mathbb{R}^2$. Suponer que $||\mathbf{A}|| = 1$, $||\mathbf{B}|| = 1$ y $||\mathbf{C}|| = 4$. Si $||\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C}|| = ||\mathbf{A} + 2\mathbf{B} + \mathbf{C}||$ y el ángulo entre **A** y **B** mide 45º, hallar el coseno del ángulo entre vectores **B** y **C**.

Solución. Si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{B}|| \text{ Cos}\theta \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (1)(1) \text{ Cos } 45° = \sqrt{2}/2$

Desarrollando los cuadrados $||\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C}||^2 = ||\mathbf{A} + 2\mathbf{B} + \mathbf{C}||^2$, tenemos:

$$||\mathbf{A}||^2 + ||\mathbf{B}||^2 + ||\mathbf{C}||^2 + 2(-\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) =$$
$$||\mathbf{A}||^2 + 4||\mathbf{B}||^2 + ||\mathbf{C}||^2 + 2(2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + 2\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$$

Simplificando se tiene : $||\mathbf{B}||^2 + 2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + 2\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} = 0$

$$\Rightarrow (1)^2 + 2(\sqrt{2}/2) + 2||\mathbf{B}||\ ||\mathbf{C}|| \operatorname{Cos}\theta = \ \Rightarrow \operatorname{Cos}\theta = -\frac{1+\sqrt{2}}{8}$$ ■

Ejemplo 13 En la Figura 1.55 , OACB es un paralelogramo. Si $\overrightarrow{OC} = \langle 5 , 3\rangle$, $\overrightarrow{BA} = \langle -3 , 9\rangle$ y θ es el ángulo determinado por $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}^{\perp}$, hallar el coseno de θ.

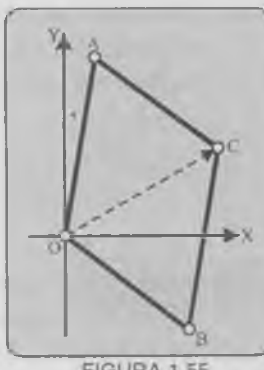


FIGURA 1.55

Solución. Si $\overrightarrow{BA} = \langle -3 , 9\rangle \Rightarrow \mathbf{A} - \mathbf{B} = \langle -3 , 9\rangle$ (1)

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$, pero como $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$, entonces

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle 5 , 3\rangle$ (2)

De (1) y (2) obtenemos :

$\mathbf{A} = \langle 1 , 6\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 4 , -3\rangle \Rightarrow \mathbf{B}^{\perp} = \langle 3 , 4\rangle$

$$\therefore \operatorname{Cos}\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{\perp}}{||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{B}||} = \frac{\langle 1 , 6\rangle \cdot \langle 3 , 4\rangle}{(\sqrt{1+36})(\sqrt{9+16})} = \frac{27}{5\sqrt{37}}$$ ■

Ejemplo 14 En el paralelogramo ABCD de la Figura 1.56, se tiene: $||\overrightarrow{AB}|| = 6$, $||\overrightarrow{AD}|| = 4$, m(∢A) = 60º; M y N son puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Hallar Cosθ , sabiendo que $||\mathbf{U}|| = 6$ y $||\mathbf{V}|| = 4\sqrt{13}$.

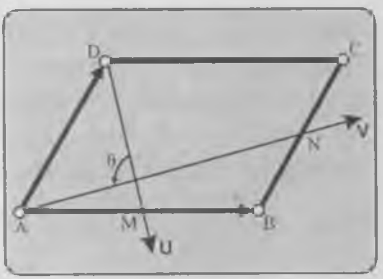


FIGURA 1.56

Solución. $\overrightarrow{AD} = 4\langle \operatorname{Cos}60^\circ , \operatorname{Sen}60^\circ\rangle = 2\langle 1 , \sqrt{3}\rangle$

$\overrightarrow{AB} = 6\langle \operatorname{Cos}0^\circ , \operatorname{Sen}0^\circ\rangle = 6\langle 1 , 0\rangle$

Luego, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \langle 3 , 0\rangle$ y $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \langle 1 , \sqrt{3}\rangle$

$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = \langle 3 , 0\rangle - \langle 2 , 2\sqrt{3}\rangle = \langle 1 , -2\sqrt{3}\rangle$

Un vector unitario en la dirección y sentido de $\overline{DM}$ es :

$$\mathbf{u} = \frac{\overline{DM}}{||\overline{DM}||} = \frac{\langle 1 , -2\sqrt{3}\rangle}{\sqrt{13}} \Rightarrow \mathbf{U} = ||\mathbf{U}||\ \mathbf{u} = \frac{6}{\sqrt{13}}\langle 1 , -2\sqrt{3}\rangle$$

Análogamente : $\overline{AN} = \overline{AB} + \overline{BN} = 6\langle 1 , 0\rangle + \langle 1 , \sqrt{3}\rangle = \langle 7 , \sqrt{3}\rangle$

Un vector unitario en la dirección y sentido $\overline{AN}$ es

$$\mathbf{v} = \frac{\overline{AN}}{||\overline{AN}||} = \frac{\langle 7 , \sqrt{3}\rangle}{2\sqrt{13}} \Rightarrow \mathbf{V} = ||\mathbf{V}||\ \mathbf{v} = (4\sqrt{13})\frac{\langle 7 , \sqrt{3}\rangle}{2\sqrt{13}} = 2\langle 7 , \sqrt{3}\rangle$$

$$\therefore \operatorname{Cos}\theta = \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}}{||\mathbf{U}||\ ||\mathbf{V}||} = \frac{12\langle 1 , -2\sqrt{3}\rangle \cdot \langle 7 , \sqrt{3}\rangle}{\sqrt{13}(6)\,(4\sqrt{13})} = \frac{1}{26}$$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 8*

1. Hallar la medida del ángulo entre los vectores **A** y **B**, si **A** va de P(2 , 5) a Q(4 , 4) y **B** va de S(3 , -2) a T(2 , 1).
2. Si ABC es un triángulo tal que $\overrightarrow{AC} = \langle 4 , 1\rangle$, $\overrightarrow{AB} = \langle -4 , -3\rangle$, hallar el coseno del ángulo que forma el vector $\overrightarrow{BC}$ con el vector unitario j = ⟨0 , 1⟩.
3. En un triángulo ABC se tiene : $\overrightarrow{AC} = \langle -2 , 4\rangle$ y $\overrightarrow{AB} = \langle 3 , -1\rangle$. Hallar el ángulo que forma el vector $\overrightarrow{BC}$ con el vector unitario $\mathbf{i}^{\perp}$.
4. En un triángulo ABC se tiene : $\overrightarrow{AB} = \langle 2\sqrt{6} , 2\sqrt{2}\rangle$ y $\overrightarrow{AC} = \langle \sqrt{6} , -\sqrt{2}\rangle$. Hallar la medida del ángulo formado por $\overrightarrow{BC}$ y el semieje positivo de las abscisas.
5. En un plano cartesiano, los puntos A(r , s) , B(n*a* + r , n*b* + s) y C(-m*b* + r , m*a* + s) son diferentes del origen y m ≠ 0 , n ≠ 0 . Hallar la medida del ángulo formado por los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.
6. Hallar el ángulo que forman el vector **A** que va de P(-1 , 3) a Q(6 , 4) con el vector **B** que va de S(5 , -1) a T(2 , -5).
7. Calcular **A** • **B** . donde **A** y **B** son los vectores de la Figura 1.57 , para los cuales: $||\mathbf{A}|| = 8$ y $||\mathbf{B}|| = \sqrt{72}$

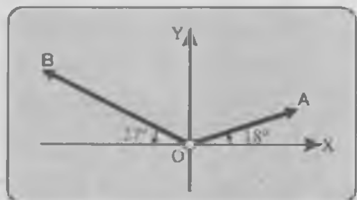


FIGURA 1.57

8. Calcular $||\mathbf{A} + \mathbf{B}||$ sabiendo que **A** y **B** forman un ángulo de 150º y que , $||\mathbf{A}|| = \sqrt{48}$ y $||\mathbf{B}|| = 6$
9. Los vectores **A** y **B** forman un ángulo de 60º, sabiendo que $||\mathbf{A}|| = 5$, $||\mathbf{B}|| = 8$, hallar $||\mathbf{A} + \mathbf{B}||$ y $||\mathbf{A} - \mathbf{B}||$.
10. Sean **A** , **B** y **C** vectores diferentes de **O**, y supuesto que el ángulo entre **A** y **C** es igual al ángulo ente **B** y **C**, para qué valor de t es el vector **C** perpendicular al vector **D** = $||\mathbf{B}||\,\mathbf{A} + t\mathbf{B}$.

11. Los vectores **A** y **B** forman un ángulo de 120º, sabiendo que $||\mathbf{A}|| = 3$ y $||\mathbf{B}|| = 5$, determinar, $||\mathbf{A}+\mathbf{B}||$ y $||\mathbf{A}-\mathbf{B}||$.

12. Qué condición deben satisfacer los vectores **A** y **B** para que el vector **A** + **B** bisecte al ángulo formado por los vectores **A** y **B**.

13. El vector $\mathbf{A} = \langle x , y\rangle$ se obtiene girando 60º al vector $\mathbf{B} = \langle -2 , 4\rangle$ en el sentido horario. Hallar el vector **A**.

14. Si $||\mathbf{A}|| = a$ y $||\mathbf{B}|| = b$, demostrar que el vector $\mathbf{C} = \dfrac{a\mathbf{B} + b\mathbf{A}}{a+b}$, biseca el ángulo formado por **A** y **B**.

15. Sean **A** y **B** dos vectores no nulos tales que $||\mathbf{A}|| = ||\mathbf{B}|| = m$. Si el ángulo entre **A** y **B** es $\pi/3$ radianes, y la norma de su diferencia es 2 - m ; hallar m.

16. Tres vectores **A**, **B** y $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^2$ satisfacen las siguientes propiedades : $||\mathbf{A}|| = ||\mathbf{C}|| = 5$, $||\mathbf{B}|| = 1$ y $||\mathbf{A}-\mathbf{B}+\mathbf{C}|| = ||\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}||$. Si el ángulo que forman **A** y **B** es $\pi/8$, hallar el que forman **B** y **C**.

17. Dados los vectores unitarios **a**, **b** y **c** tales que el ángulo entre **a** y **b** mide 30º y el ángulo entre **b** y **c** mide 60º, graficar el vector **a** + 2**b** - 3**c** y calcular su longitud.

18. En el paralelogramo ABCD de la Figura 1.58 se tienen : $||\overrightarrow{AB}|| = 3$, $||\overrightarrow{AD}|| = 6$, m(∢A) = 60º, P y Q son puntos de trisección de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Hallar Cosθ sabiendo que $||\mathbf{U}|| = 4\sqrt{7}$ y $||\mathbf{V}|| = 3\sqrt{19}$

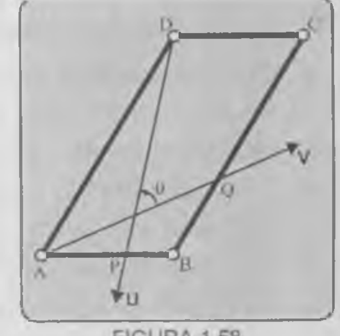


FIGURA 1.58

19. Dados tres vectores no nulos en $\mathbb{R}^2$, **A**, **B** y **C**. Supuesto que el ángulo que forman **A** y **C** es igual al que forman **B** y **C**. Demostrar que **C** es ortogonal al vector $||\mathbf{B}||\mathbf{A} - ||\mathbf{A}||\mathbf{B}$.

20. Los vectores **A** y **B** forman entre si un ángulo de 60º y el módulo de **A** es 6. Hallar $||\mathbf{B}||$ para que **A** - **B** forme con **A** un ángulo de 30º.

21. Los vectores **A** y **B** forman un ángulo de 30º. $||\mathbf{A}|| = \sqrt{3}$ y $||\mathbf{B}|| = 1$. Hallar el ángulo que forman los vectores **A** + **B** y **A** - **B**.

22. El punto A(4 , 2) es un vértice de un trapecio isósceles ABCD, cuyas bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ miden $10\sqrt{5}$ y $4\sqrt{5}$ unidades respectivamente. Si $\overline{AB}$ es paralelo al vector $\mathbf{U} = \langle 1 , 2\rangle$ y el lado $\overline{AD}$ es paralelo al vector $\mathbf{V} = \langle -2 , 3\rangle$, hallar los otros vértices del trapecio.

23. Los ángulos entre los vectores no nulos **B** y **C**, **A** y **C**, **A** y **B** son α, β y γ respectivamente, y los vectores **U** y **V** están definidos como

$$\mathbf{U} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \quad , \quad \mathbf{V} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{A}$$

Demostrar que si **U** y **V** son perpendiculares, entonces : Cosβ = Cosα Cosγ

24. Demostrar que si **A** y **B** son vectores de igual longitud entonces el vector **A** + **B** biseca el ángulo entre **A** y **B** y que **A** - **B** es ortogonal a **A** + **B**.

1.10 DESCOMPOSICION DE VECTORES

Sean los vectores **A** y **B** en $\mathbb{R}^2$. Si desde un punto de vista geométrico un vector **V** del plano podemos expresarlo, en forma única, como una suma de componentes vectoriales r**A** y t**B**, que son múltiplos escalares de **A** y **B**, entonces se dice que se ha efectuado una ***descomposición*** del vector **V** en sus componentes vectoriales paralelos a los vectores **A** y **B** (Figura 1.59), esto es :

$$\mathbf{V} = r\mathbf{A} + t\mathbf{B}$$

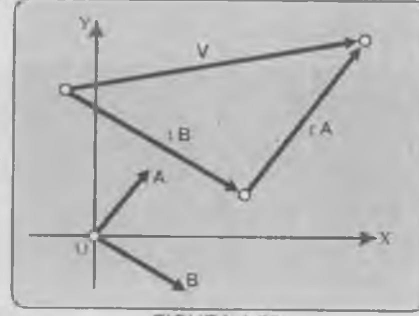


FIGURA 1.59

El conjunto β = {**A** , **B**} se llama base de $\mathbb{R}^2$, para cada vector $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^2$, y los números r y t se llaman *componentes escalares* de **V** en relación a la base β.

Si ocurre que los vectores **A** y **B** son unitarios y ortogonales entonces al conjunto {**A** , **B**} se le llama ***conjunto ortonormal.***

Definición 1.14 *Bases ortonormales*

Se dice que una base $\beta \in \mathbb{R}^2$ es una *base ortonormal* si el conjunto de vectores **A** y **B** que la constituyen es un conjunto ortonormal. Así, la base β = {**A** , **B**} es una base ortonormal si ocurre que :

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0 \text{ ó } \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = 1$$

Por ejemplo, consideremos el conjunto de vectores {**A** , **B**}, donde $\mathbf{A} = \langle 4 , -2\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 3 , 6\rangle$. Este es un conjunto ortogonal ($\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$) y es por lo tanto una base de $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, no es base ortonormal, pues los vectores **A** y **B** no son unitarios. Para obtener una base ortonormal bastará *normalizar* los vectores **A** y **B**. Así, si

$$u_1 = \frac{A}{||A||} = \frac{\langle 4, -2\rangle}{\sqrt{16+4}} = \frac{\langle 2, -1\rangle}{\sqrt{5}} \quad , \quad u_2 = \frac{B}{||B||} = \frac{\langle 3, 6\rangle}{\sqrt{9+36}} = \frac{\langle 1, 2\rangle}{\sqrt{5}}$$

entonces el conjunto $\{u_1, u_2\}$ constituye una base ortonormal en R^2.

Indudablemente existen muchas bases ortonormales en R^2, sin embargo, una base ortonormal de singular importancia lo constituye la base formada por los vectores unitarios ortogonales $i = \langle 1, 0\rangle$ y $j = \langle 0, 1\rangle$. Así, fijada la base $\beta = \{i, j\}$, llamada *base ortonormal canónica*, cada vector $V = \langle x, y\rangle$ en R^2, de origen O, se escribe en términos de esta base como

$$V = xi + yj$$

En efecto :

$$V = \langle x, y\rangle = \langle x, 0\rangle + \langle 0, y\rangle$$
$$= x\langle 1, 0\rangle + y\langle 0, 1\rangle$$
$$= xi + yj$$

que es la ***expresión analítica*** del vector V, en la cual los números x e y son sus *componentes escalares* y los vectores xi e yj *componentes vectoriales* (Figura 1.60)

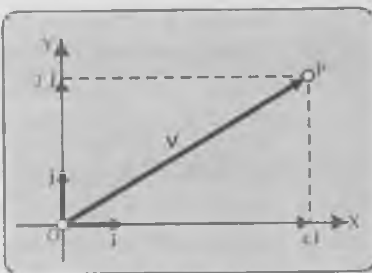


FIGURA 1.60

Definición 1.15 *COMBINACION LINEAL DE VECTORES*

Si $\beta = \{A, B\}$ es una base de R^2, entonces de dice que cada vector $V \in R^2$ es una *combinación lineal* de los vectores de β, si existen los números s y $t \in R$, tales que

$$V = sA + tB$$

Según esta definición, si la base β es ortonormal, todo vector $V \in R^2$, puede expresarse mediante una y sólo una combinación lineal de un par dado de vectores unitarios ortogonales u y $u^\perp$. Es decir, existe una y sólo una pareja de escalares s y t tales que

$$V = s\,u + t\,u^\perp \qquad (17)$$

Los escalares s y t pueden calcularse fácilmente tomando los productos escalares $V \cdot u$ y $V \cdot u^\perp$, pues si $u \cdot u^\perp = 0$ y $u \cdot u = u^\perp \cdot u^\perp = 1$, entonces en (17) :

$$V \cdot u = s(u \cdot u) + t(u^\perp \cdot u) \Rightarrow s = V \cdot u$$
$$V \cdot u^\perp = s(u \cdot u^\perp) + t(u^\perp \cdot u^\perp) \Rightarrow t = V \cdot u^\perp$$

Luego, en (17) se tiene el siguiente resultado

$$\boxed{V = (V \cdot u)u + (V \cdot u^\perp)u^\perp} \qquad (18)$$

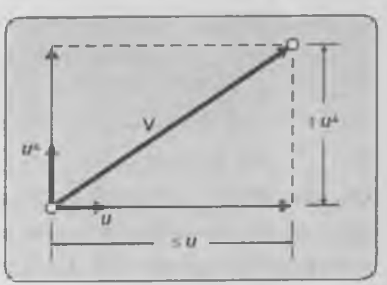


FIGURA 1.61

En el ejemplo anterior se vió que $\beta = \{u_1, u_2\}$, donde

$$u_1 = \frac{\langle 2, -1\rangle}{\sqrt{5}} \quad y \quad u_2 = \frac{\langle 1, 2\rangle}{\sqrt{5}}$$

es una base ortonormal en R^2. Escribamos el vector $V = \langle 5, -1\rangle$ en términos de esta base. Por la ecuación (18), se sigue que :

$$V = (V \cdot u_1)u_1 + (V \cdot u_2)u_2$$
$$= \left(\frac{10}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)u_1 + \left(\frac{5}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)u_2$$
$$= \frac{11}{\sqrt{5}}u_1 + \frac{3}{\sqrt{5}}u_2$$

También, todo vector $V \in R^2$ se puede expresar como una suma de múltiplos escalares de vectores ortogonales no nulos que no sean unitarios.

En efecto, si $u = \frac{B}{||B||}$ y $u^\perp = \frac{B^\perp}{||B^\perp||} = \frac{B^\perp}{||B||}$, entonces en (18) se tiene :

$$V = \left(V \cdot \frac{B}{||B||}\right)\frac{B}{||B||} + \left(V \cdot \frac{B^\perp}{||B||}\right)\frac{B^\perp}{||B||}$$

que equivale a :

$$\boxed{V = \left(\frac{V \cdot B}{||B||^2}\right)B + \left(\frac{V \cdot B^\perp}{||B||^2}\right)B^\perp} \qquad (19)$$

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Dado los vectores $V = \langle -2, 2\rangle$ y $B = \langle 3, 1\rangle$, expresar V como una combinación lineal de B y $B^\perp$.

Solución. Si $B = \langle 3, 1\rangle \Rightarrow B^\perp = \langle -1, 3\rangle$ y $||B|| = \sqrt{10}$

Luego, si aplicamos la ecuación (19) obtenemos :

$$V = \left(\frac{\langle -2, 2\rangle \cdot \langle 3, 1\rangle}{10}\right)\langle 3, 1\rangle + \left(\frac{\langle -2, 2\rangle \cdot \langle -1, 3\rangle}{10}\right)\langle -1, 3\rangle$$

$$\Rightarrow V = \left(\frac{-6+2}{10}\right)\langle 3, 1\rangle + \left(\frac{2+6}{10}\right)\langle -1, 3\rangle = -\frac{2}{5}\langle 3, 1\rangle + \frac{4}{5}\langle -1, 3\rangle$$

Comprobación : $V = \left\langle -\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right\rangle + \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right\rangle = \langle -2, 2\rangle$ ■

Ejemplo 2 En la Figura 1.62 se tiene : $\overrightarrow{TP} \parallel \overrightarrow{OX}$ y $||\overrightarrow{OP}|| = 8$

Si $\overrightarrow{OT} = m\overrightarrow{OP} + n\overrightarrow{OP}^{\perp}$, hallar el valor mn.

Solución. $\overrightarrow{OP} = ||\overrightarrow{OP}||\,\langle \text{Cos}30°, \text{Sen}30° \rangle = 4\langle \sqrt{3}, 1 \rangle$

Las componentes de $\overline{OT}$ son $\langle x, x \rangle$, pues $y = x$. La ordenada de P es $y = ||\overline{OP}||\ \text{Sen}30° = 8(1/2) = 4$

$\Rightarrow \overline{OT} = \langle 4, 4 \rangle = 4\langle 1, 1 \rangle$

FIGURA 1.62

Como $\overline{OT}$ está expresado como una combinación lineal de vectores ortogonales, usaremos la ecuación (19) para calcular los escalares m y n, esto es

$$m = \frac{\overline{OT} \cdot \overline{OP}}{||\overline{OP}||^2} = \frac{4\langle 1, 1 \rangle \cdot 4\langle \sqrt{3}, 1 \rangle}{(4\sqrt{3}+1)^2} = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+1)$$

$$n = \frac{\overline{OT} \cdot \overline{OP}^{\perp}}{||\overline{OP}||^2} = \frac{4\langle 1, 1 \rangle \cdot 4\langle -1, \sqrt{3} \rangle}{(4\sqrt{3}+1)^2} = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$$\Rightarrow m\,n = \frac{1}{8}$$ ■

Ejemplo 3 En la Figura 1.63 se tiene los vectores **A** y **B** con $||\mathbf{A}|| = 2\sqrt{3}$. Si $\mathbf{B} = s\,\mathbf{A} + t\,\mathbf{A}^{\perp}$, hallar el valor de s + t.

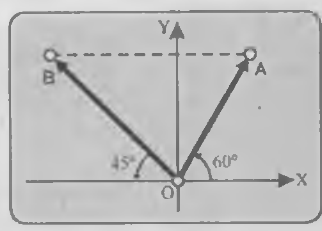


FIGURA 1.63

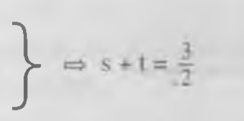
Solución. $\mathbf{A} = ||\mathbf{A}||\,\langle \text{Cos } 60°, \text{Sen } 60° \rangle = \langle \sqrt{3}, 3 \rangle$

Las componentes de **B** son $\langle -y, y \rangle$, pues $y = -x$ y como $y_A = y_B = 3$, entonces $\mathbf{B} = \langle -3, 3 \rangle$. Luego, usando los escalares de la ecuación (19) tendremos :

$$s = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}}{||\mathbf{A}||^2} = \frac{\langle -3, 3 \rangle \cdot \langle \sqrt{3}, 3 \rangle}{(\sqrt{3}+9)^2} = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$$

$$t = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{\perp}}{||\mathbf{A}||^2} = \frac{\langle -3, 3 \rangle \cdot \langle -3, \sqrt{3} \rangle}{(\sqrt{3}+9)^2} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow s + t = \frac{3}{2}$$ ■



Ejemplo 4 Sean los vectores de la Figura 1.64, donde $||\mathbf{A}|| = 2$ y $||\mathbf{C}|| = 8$. Si $\mathbf{C} = m\mathbf{A} + n\mathbf{A}^{\perp}$, hallar el valor de $m - \sqrt{3}n$

Solución. El ángulo de dirección del vector **A** es $\alpha = 180° - (90 + 30°) = 60°$, luego, si

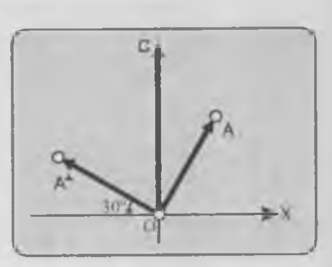


FIGURA 1.64

$\mathbf{A} = ||\mathbf{A}||\,\langle \text{Cos}60°, \text{Sen}60° \rangle \Rightarrow \mathbf{A} = \langle 1, \sqrt{3} \rangle$ y $\mathbf{A}^{\perp} = \langle -\sqrt{3}, 1 \rangle$

Si $\mathbf{C} = \langle 0, 8 \rangle$, los escalares de $\mathbf{C} = m\mathbf{A} + n\mathbf{A}^{\perp}$ son :

$$m = \frac{\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}}{||\mathbf{A}||^2} = \frac{\langle 0, 8 \rangle \cdot \langle 1, \sqrt{3} \rangle}{(2)^2} = 2\sqrt{3} \quad ; \quad n = \frac{\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{\perp}}{||\mathbf{A}||^2} = \frac{\langle 0, 8 \rangle \cdot \langle -\sqrt{3}, 1 \rangle}{(2)^2} = 2$$

$$\therefore\ m - \sqrt{3}n = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}(2) = 0$$ ■

OBSERVACION 1.7 Sabemos, por la Definición 1.15, que cualquier vector $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^2$ puede expresarse de manera única como

$$\mathbf{V} = s\,\mathbf{A} + t\,\mathbf{B} \tag{1}$$

Si ocurre que los vectores **A** y **B** no son ortogonales, los escalares s y t pueden calcularse tomando los productos escalares $\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}^{\perp}$ y $\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}^{\perp}$, pues si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\perp} = 0$ y $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{\perp} = 0$, entonces en (1) se tiene :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\perp} = 0 + t\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{\perp} \Rightarrow t = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}^{\perp}}{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{\perp}} \quad ; \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{B}^{\perp} = 0 + s\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{\perp} \Rightarrow s = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}^{\perp}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{\perp}}$$

Por consiguiente en (1) :

$$\mathbf{V} = \left(\frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}^{\perp}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{\perp}}\right)\mathbf{A} + \left(\frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}^{\perp}}{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{\perp}}\right)\mathbf{B} \tag{20}$$

Ejemplo 5 En la Figura 1.65 se muestran los vectores **A**, **B** y **C**, donde $||\mathbf{A}|| = 3$, $||\mathbf{B}|| = 2$, $||\mathbf{C}|| = 6$ y $\alpha = 30$º. Si $\mathbf{C} = m\mathbf{A} + n\mathbf{B}$, hallar $m + \sqrt{3}n$.

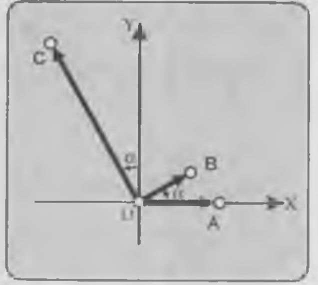


FIGURA 1.65

Solución. Las componentes de los vectores mostrados son :

$\mathbf{A} = \langle 3, 0 \rangle$, $\mathbf{B} = 2\langle \text{Cos } 30°, \text{Sen } 30° \rangle = \langle \sqrt{3}, 1 \rangle$

y $\mathbf{C} = 6\langle \text{Cos } 120°, \text{Sen } 120° \rangle = \langle -3, 3\sqrt{3} \rangle$

Si $\mathbf{C} = m\mathbf{A} + n\mathbf{B}$, los escalares m y n lo obtenemos a partir de la ecuación (24), esto es :

$$m = \frac{\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^{\perp}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{\perp}} = \frac{\langle -3, 3\sqrt{3} \rangle \cdot \langle -1, \sqrt{3} \rangle}{\langle 3, 0 \rangle \cdot \langle -1, \sqrt{3} \rangle} = \frac{3+9}{-3} = -4$$

$$n = \frac{\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{\perp}}{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{\perp}} = \frac{\langle -3, 3\sqrt{3} \rangle \cdot \langle 0, 3 \rangle}{\langle \sqrt{3}, 1 \rangle \cdot \langle 0, 3 \rangle} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow m + \sqrt{3}n = 5$$ ■

Ejemplo 6 ***Los segmentos orientados y la combinación lineal***

En la Figura 1.66, ABCD es un paralelogramo. Si $\overline{AF} = \frac{1}{3}\overline{AD}$ y

$\overline{ED} = 5\,\overline{BE}$, expresar $\overline{EF}$ como combinación lineal de $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$.

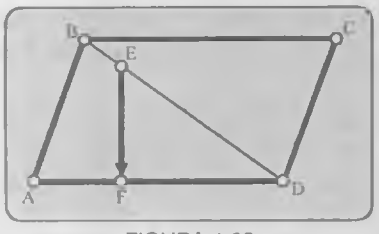


FIGURA 1.66

Solución. El objetivo es expresar $\overline{EF}$ en la forma :

$$\overline{EF} = m\overline{AD} + n\overline{AB}$$

Entonces en el ΔEFD se tiene :

$$\overline{ED} = \overline{EF} + \overline{FD} \Rightarrow \overline{EF} = \overline{ED} - \overline{FD} \qquad (1)$$

Dado que $\overline{ED} = 5\,\overline{BE} \Rightarrow \overline{ED} = \frac{5}{6}\overline{BD} = \frac{5}{6}(\overline{AD} - \overline{AB})$

Luego , en (1) se tiene : $\overline{EF} = \frac{5}{6}(\overline{AD} - \overline{AB}) - \frac{2}{3}\overline{AD}$

$$\Rightarrow \overline{EF} = \frac{1}{6}\overline{AD} - \frac{5}{6}\overline{AB}$$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 9*

1. Dado los vectores **A** y **B** en $\mathbb{R}^2$, demostrar que
$$||\mathbf{A}||^2\,\mathbf{B} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{A} + (\mathbf{A}^\perp\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}^\perp$$
2. Si **A** y **B** son dos vectores en $\mathbb{R}^2$, demostrar que :
$$||\mathbf{A}||^2||\mathbf{B}||^2 = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2 + (\mathbf{A}^\perp\cdot\mathbf{B})^2$$
3. Emplee el resultado del Ejercicio 2 para demostrar que :
$$||\mathbf{A}||^2||\mathbf{B}||^2 \geq (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2$$
4. En la Figura 1.67 se tiene los vectores **A** y **B** . con $||\mathbf{A}|| = 4$. Si $\mathbf{B} = s\mathbf{A} + t\mathbf{A}^\perp$, hallar el valor de s + t.
5. En la Figura 1.68 se tiene $\alpha = 30º$ y $||\overrightarrow{OM}|| = 12$. Si $\overrightarrow{ON} = m\overrightarrow{OM} + n\overline{OM}^\perp$, hallar el valor de m + n.
6. Dado los vectores de la Figura 1.69, hallar el valor de $n + \sqrt{3}m$ sabiendo que $m\,\mathbf{A} + n\,\mathbf{A}^\perp = \mathbf{C}$, siendo **A** un vector unitario y $||\mathbf{C}|| = 8$

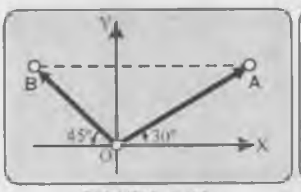


FIGURA 1.67

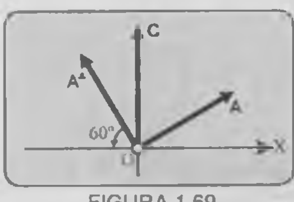


FIGURA 1.68

FIGURA 1.69

7. En la Figura 1.70 se tiene los vectores **A** , **B** y **C** , donde $||\mathbf{A}|| = 2\sqrt{3}$. Si $\mathbf{C} = m\mathbf{A} + n\mathbf{B}$, hallar el valor de m - n.
8. En la Figura 1.71 se tiene : $\overline{AB} \,||\, \overline{OY}$ y $||\overline{OA}|| = 4$. Si $\overline{OB} = m\overline{OA} + n\overline{OA}^\perp$, hallar el valor de m - n.
9. En la Figura 1.72 , $\mathscr{L}$ es una recta paralela al eje X y se tienen los vectores **A** y **B** en $\mathbb{R}^2$, donde $||\mathbf{B}|| = 3\sqrt{2}$. Si $\mathbf{A} = s\mathbf{B} + t\mathbf{B}^\perp$, hallar s , t y $||\mathbf{A} - \mathbf{B}||$.

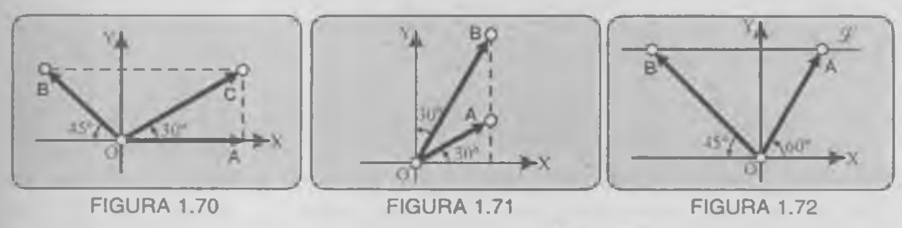


FIGURA 1.70 FIGURA 1.71 FIGURA 1.72

10. En un trapecio ABCD , los lados paralelos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ miden 9 y 3 unidades respectivamente. Si M es punto medio de $\overline{AB}$, N es punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{MN} = n\overline{AB} + n\overline{AD}$, hallar el valor de m - n.
11. En la Figura 1.74 se tiene el paralelogramo ABCD donde E es punto de trisección de $\overline{AB}$, H es un punto tal que $3\,\overline{DH} = 4\,\overline{HE}$. Si $\overline{AH} = m\overline{AD} + n\overline{AB}$, hallar los escalares m y n.
12. En el paralelogramo de la Figura 1.73 se tiene : $\overline{AE} = \overline{EC}$ y $4\,\overline{FD} = \overline{AF}$. Si $\overline{EF} = m\overline{AD} + n\overline{CD}$, hallar el valor de m + n.
13. En la Figura 1.75 se dan los vectores **A** , **B** y **C** , donde $||\mathbf{A}|| = 3$, $||\mathbf{B}|| = 4$, $||\mathbf{C}|| = 6$ y $\alpha = 60º$. Si $\mathbf{C} = m\,\mathbf{A} + n\,\mathbf{B}$, hallar el valor de m + 2n.

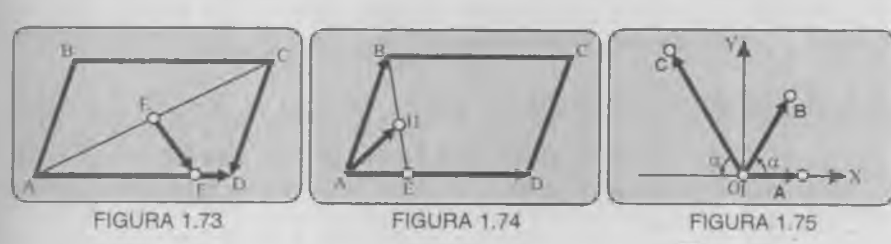


FIGURA 1.73 FIGURA 1.74 FIGURA 1.75

14. Se tiene un trapecio escaleno ABCD, cuya base mayor $\overline{AD}$ es el doble de la base menor $\overline{BC}$. Se trazan las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ que se cortan en el punto P. Si $\overline{BP} + \overline{CP} = m(\overline{BC} + \overline{CD}) + n(\overline{CB} + \overline{BA})$, hallar m + n.
15. Sea ABCD un paralelogramo , tal que dos lados no paralelos son $\overline{AB} = 3\boldsymbol{u}$ y $\overline{AD} = 6\mathbf{v}$, donde $\boldsymbol{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores unitarios. Si P es punto medio del lado $\overline{AD}$ y E es el punto de intersección de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BP}$; hallar en términos de $\boldsymbol{u}$ y $\mathbf{v}$ los vectores $\overline{AE}$ y $\overline{BE}$.

1.11 PROYECCION ORTOGONAL

Sean **A** y **B** dos vectores y **B** ≠ **O**. la proyección ortogonal o componente vectorial de **A** sobre **B** , denotada por $\text{Proy}_B\mathbf{A}$, es el vector

$$\text{Proy}_B\mathbf{A} = \left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|^2}\right)\mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{B} \neq \mathbf{O} \qquad (21)$$

Si aplicamos la ecuación (21) a (19) , obtenemos

$$\mathbf{A} = \text{Proy}_B\mathbf{A} + \text{Proy}_{B^\perp}\mathbf{A} \qquad (22)$$

Geométricamente esta definición significa que se puede construir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea el vector **A** y cuyos catetos contienen a los vectores $\text{Proy}_B\mathbf{A}$ y $\text{Proy}_{B^\perp}\mathbf{A}$. (Figura 176).

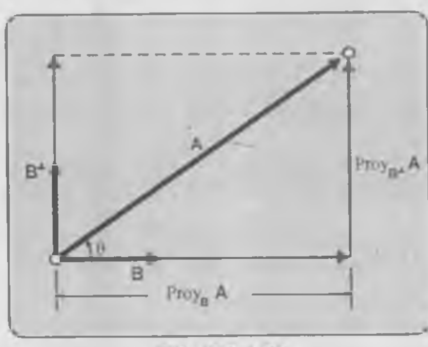


FIGURA 1.76

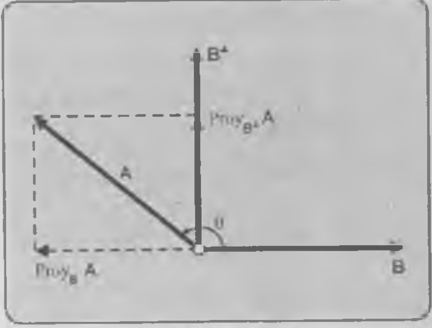


FIGURA 1.77

OBSERVACION 1.8 Los vectores **B** y $\text{Proy}_B\mathbf{A}$ son paralelos de tal modo que si el ángulo θ entre **A** y **B** es agudo entonces **B** y $\text{Proy}_B\mathbf{A}$ tienen la misma dirección y sentido (Figura 1.76) , en tanto que si θ es obtuso entonces **B** y $\text{Proy}_B\mathbf{A}$ tiene la misma dirección y sentido opuestos (Figura 1.77)

Ejemplo 1. Si A = ⟨12 , 5⟩ y B = ⟨-3 , 4⟩ , hallar la $\text{Proy}_B\mathbf{A}$

Solución. Partiendo de la ecuación (21) se tiene :

$$\text{Proy}_B\mathbf{A} = \left(\frac{\langle 12 , 5\rangle \cdot \langle -3 , 4\rangle}{\|\langle -3 , 4\rangle\|^2}\right)\langle -3 , 4\rangle = \left(\frac{-36+20}{25}\right)\langle -3 , 4\rangle = -\frac{16}{25}\langle -3 , 4\rangle$$

En este caso vemos que $\text{Proy}_B\mathbf{A}$ y **B** son paralelos y tienen sentidos opuestos. ■

PROPIEDADES DE LA PROYECCION ORTOGONAL

1. $\text{Proy}_C(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{Proy}_C\mathbf{A} + \text{Proy}_C\mathbf{B}$
2. $\text{Proy}_B(r\mathbf{A}) = r\,\text{Proy}_B\mathbf{A}$

Definición 1.12 *Componentes Escalares*

Al número $\dfrac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|}$ se denomina *componente escalar* del vector **A** en la dirección del vector **B** , siendo **B** ≠ **O** y se denota por :

$$\text{Comp}_B\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|} \qquad (23)$$

Dado que $\text{Proy}_B\mathbf{A} = \left(\dfrac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|}\right)\dfrac{\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|}$, se puede establecer la relación siguiente entre proyección (un vector) y componente (un número)

$$\text{Proy}_B\mathbf{A} = (\text{Comp}_B\mathbf{A})\,\frac{\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|} \qquad (24)$$

Si $\text{Comp}_B\mathbf{A} > 0$, entonces la $\text{Proy}_B\mathbf{A}$ tienen el mismo sentido de **B**. del mismo modo, si $\text{Comp}_B\mathbf{A} < 0$ entonces la $\text{Proy}_B\mathbf{A}$ tiene sentido opuesto a **B** (Figura 1.77). Por tanto, la componente escalar de un vector es la longitud dirigida u orientada del vector. Esto es , si $\dfrac{\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|}$ es un vector unitario , la ecuación (24) se puede escribir :

$$\text{Comp}_B\mathbf{A} = \pm\,\|\text{Proy}_B\mathbf{A}\| \qquad (25)$$

El signo se debe elegir según que **B** y $\text{Proy}_B\mathbf{A}$ tengan o no el mismo sentido. Así para los vectores de la Figura 1.77 se toma : $\text{Comp}_B\mathbf{A} = -\|\text{Proy}_B\mathbf{A}\|$

Ejemplo 2. Hallar la proyección ortogonal y la componente escalar del vector **A** = ⟨-3 , -4⟩ sobre el vector **B** = ⟨4 , -2⟩

Solución. Si **B** = ⟨4 - 2⟩ ⇒ $\|\mathbf{B}\| = \sqrt{20}$, luego , en la ecuación (21) se tiene :

$$\text{Proy}_B\mathbf{A} = \left(\frac{\langle -3 , -4\rangle \cdot \langle 4 , -2\rangle}{(\sqrt{20})^2}\right)\langle 4 , -2\rangle = -\frac{1}{5}\langle 4 , -2\rangle = \langle -4/5 , 2/5\rangle$$

Obtenemos la componente escalar aplicando (23) , esto es

$$\text{Comp}_B\mathbf{A} = \frac{\langle -3 , -4\rangle \cdot \langle 4 , -2\rangle}{\sqrt{20}} = \frac{-12+8}{2\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Como la $\text{Comp}_B\mathbf{A} < 0$, la $\text{Proy}_B\mathbf{A}$ y **B** tienen sentidos opuestos.

La norma de la proyección ortogonal es : $\|\text{Proy}_B\mathbf{A}\| = \sqrt{(-4/5)^2 + (2/5)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\therefore\ \text{Comp}_B\mathbf{A} = -\|\text{Proy}_B\mathbf{A}\|$$ ■

PROPIEDADES DE LA COMPONENTE ESCALAR

1. $\text{Comp}_C(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{Comp}_C\mathbf{A} + \text{Comp}_C\mathbf{B}$
2. $\text{Comp}_B(r\mathbf{A}) = r\ \text{Comp}_B\mathbf{A}$

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Los lados de un triángulo son los vectores **A** , **B** y **A - B**. Si $\|\mathbf{A}\| = 5$, $\|\mathbf{B}\| = 3$ y $\text{Comp}_B\mathbf{A} = -5/2$, hallar la longitud del lado **A - B**.

Solución. Si $\text{Comp}_B\mathbf{A} = -\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|} = -\frac{5}{2}$, de donde : $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = -15/2$

y si $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{A}\|^2 - 2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \|\mathbf{B}\|^2 = (5)^2 - 2(-15/2) + (3) = 49$

$$\therefore\ \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| = 7$$ ■

Ejemplo 2 Los lados de un triángulo son los vectores **A** , **B** y **A + B**. Si $\|\mathbf{A}\| = 5$, $\|\mathbf{B}\| = 2\sqrt{2}$ y $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| = \sqrt{53}$, hallar :
$2\text{Comp}_B\mathbf{A} - \text{Comp}_A(\mathbf{A} + \mathbf{B})$

Solución. Si $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| = \sqrt{53} \Rightarrow \|\mathbf{A}\|^2 + 2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \|\mathbf{B}\|^2 = 53$

$\Rightarrow (5)^2 + 2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + (2\sqrt{2})^2 = 53 \Rightarrow \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 10$

Luego : $2\,\text{Comp}_B\mathbf{A} = 2\left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|}\right) = 2\left(\frac{10}{2\sqrt{2}}\right) = 5\sqrt{2}$

$$\text{Comp}_A(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{(\mathbf{A} + \mathbf{B})\cdot\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|} = \frac{\|\mathbf{A}\|^2 + \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}}{5} = \frac{25 + 10}{5} = 7$$

$$\therefore\ 2\,\text{Comp}_B\mathbf{A} - \text{Comp}_A(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 5\sqrt{2} - 7$$ ■

Ejemplo 3 Si $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} = \mathbf{O}$, $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| = a$, $\|\mathbf{C}\| = b$ y $\|\mathbf{D}\| = c$, hallar la $\text{Comp}_C\mathbf{D}$

Solución. Si $\mathbf{A} + \mathbf{B} = -(\mathbf{C} + \mathbf{D}) \Rightarrow \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| = \|-(\mathbf{C} + \mathbf{D})\| \Rightarrow a = \|\mathbf{C} + \mathbf{D}\|$
Elevando al cuadrado se tiene : $a^2 = \|\mathbf{C}\|^2 + 2\,\mathbf{C}\cdot\mathbf{D} + \|\mathbf{D}\|^2$

Luego , $a^2 = b^2 + 2\,\mathbf{C}\cdot\mathbf{D} + c^2$, de donde : $\mathbf{C}\cdot\mathbf{D} = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2)$

$$\therefore\ \text{Comp}_C\mathbf{D} = \frac{\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}}{\|\mathbf{C}\|} = \frac{1}{2b}(a^2 - b^2 + c^2)$$ ■

Ejemplo 4 Si el vector **B** forma un ángulo de 30º con el semieje positivo de las x , $\|\mathbf{B}\| = 2$, $\text{Comp}_B\mathbf{A} = -2$ y $\text{Comp}_{B^\perp}\mathbf{A} = 2\sqrt{3}$; hallar el vector **A**.

Solución. Si $\mathbf{B} = \|\mathbf{B}\|\,\langle\text{Cos } 30°, \text{Sen } 30°\rangle \Rightarrow \mathbf{B} = \langle\sqrt{3}, 1\rangle$
Por la ecuación (21) : $\mathbf{A} = \text{Proy}_B\mathbf{A} + \text{Proy}_{B^\perp}\mathbf{A}$

$$\Rightarrow \mathbf{A} = (\text{Comp}_B\mathbf{A})\frac{\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|} + (\text{Comp}_{B^\perp}\mathbf{A})\frac{\mathbf{B}^\perp}{\|\mathbf{B}\|} = (-2)\frac{\langle\sqrt{3}, 1\rangle}{2} + (2\sqrt{3})\frac{\langle -1, \sqrt{3}\rangle}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{A} = \langle -2\sqrt{3}, 2\rangle$$ ■

Ejemplo 5 Si $\mathbf{A} = \langle -2, \sqrt{12}\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle -3, \sqrt{3}\rangle$, hallar el ángulo formado por los vectores **A** y $\text{Proy}_{B^\perp}\mathbf{A}$

Solución. Sea el vector $\mathbf{C} = \text{Proy}_{B^\perp}\mathbf{A} = \left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^\perp}{\|\mathbf{B}^\perp\|^2}\right)\mathbf{B}^\perp$

$$\Rightarrow \mathbf{C} = \left[\frac{\langle -2, 2\sqrt{3}\rangle\cdot\langle -\sqrt{3}, -3\rangle}{(\sqrt{3+9})^2}\right]\langle -\sqrt{3}, -3\rangle = \frac{\sqrt{3}}{4}\langle\sqrt{3}, 3\rangle = \frac{3}{4}\langle 1, \sqrt{3}\rangle$$

Si $\mathbf{A} \parallel \mathbf{U}$ y $\mathbf{C} \parallel \mathbf{V}$, entonces : $\mathbf{U} = \langle -1, \sqrt{3}\rangle$ y $\mathbf{V} = \langle 1, \sqrt{3}\rangle$
El ángulo entre **U** y **V** es el mismo entre **A** y **C** , por lo que :

$$\text{Cos }\theta = \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}}{\|\mathbf{U}\|\,\|\mathbf{V}\|} = \frac{\langle -1, \sqrt{3}\rangle\cdot\langle 1, \sqrt{3}\rangle}{(2)\,(2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60°$$ ■

Ejemplo 6 Dado los puntos A(-1 , 3) , B(5 , 6) y C(7 , 5) ; si P divide al segmento $\overline{AB}$ en la razón $\overline{AP} : \overline{PB} = 2$, hallar la proyección del vector $\overline{AP}$ sobre el vector $\overline{BC}$.

Solución. Sea el punto P(x , y). Si $\frac{AP}{PB} = 2 \Rightarrow \overline{AP} = 2\,\overline{PB}$

$\Rightarrow$ **P** - **A** = 2 (**B** - **P**)

$$\Rightarrow \langle x+1\,,\,y-3\rangle = 2\langle 5-x\,,\,6-y\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 10-2x \Rightarrow x = 3 \\ y-3 = 12-2y \Rightarrow y = 5 \end{cases}$$

Luego , P(3 , 5) $\Rightarrow \vec{AP} = \mathbf{P} - \mathbf{A} = \langle 3\,,\,5\rangle - \langle -1\,,\,3\rangle = \langle 4\,,\,2\rangle$

$\vec{BC} = \mathbf{C} - \mathbf{B} = \langle 7\,,\,5\rangle - \langle 5\,,\,6\rangle = \langle 2\,,\,-1\rangle$

Ahora : $\quad Proy_{\overline{BC}}\overline{AP} = \left(\frac{\overline{AP} \cdot \overline{BC}}{\|\overline{BC}\|^2}\right)\overline{BC} = \left(\frac{\langle 4\,,\,2\rangle \cdot \langle 2\,,\,-1\rangle}{(\sqrt{4+1})^2}\right)\langle 2\,,\,-1\rangle$

$$\therefore \; Proy_{\overline{BC}}\mathbf{AP} = \frac{6}{5}\langle 2\,,\,-1\rangle$$ ■

Ejemplo 7 Si **A**, **B** y **C** son vectores no paralelos con **C** ≠ **O**, demostrar que

a) $\|Proy_{\mathbf{C}}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\| \leq |Comp_{\mathbf{C}}\mathbf{A}| + |Comp_{\mathbf{C}}\mathbf{B}|$

b) $Proy_{s\mathbf{C}}(r\mathbf{A}+\mathbf{B}) = r\,Proy_{\mathbf{C}}\mathbf{A} + Proy_{\mathbf{C}}\mathbf{B}$, $\forall r, s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$

Solución. En efecto, de la definición de proyección ortogonal se sigue que :

a) $$Proy_{\mathbf{C}}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \left(\frac{(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}}{\|\mathbf{C}\|^2}\right)\mathbf{C} = \left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}}{\|\mathbf{C}\|^2}\right)\mathbf{C} + \left(\frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}}{\|\mathbf{C}\|^2}\right)\mathbf{C}$$

$$= \left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}}{\|\mathbf{C}\|}\right)\frac{\mathbf{C}}{\|\mathbf{C}\|}$$

Obsérvese que el paréntesis del segundo miembro es un número real y que es coeficiente de un vector unitario; luego, si normalizamos ambos miembros de esta igualdad obtendremos :

$$\|Proy_{\mathbf{C}}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\| = \frac{|\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}|}{\|\mathbf{C}\|}$$

Ahora, si aplicamos al numerador del segundo miembro la desigualdad triangular para números reales, tendremos :

$$\|Proy_{\mathbf{C}}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\| \leq \frac{|\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}|}{\|\mathbf{C}\|} + \frac{|\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}|}{\|\mathbf{C}\|}$$

$$\therefore \; \|Proy_{\mathbf{C}}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\| \leq Comp_{\mathbf{C}}\mathbf{A} + Comp_{\mathbf{C}}\mathbf{B}$$

b) $$Proy_{s\mathbf{C}}(r\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \left(\frac{(r\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot s\mathbf{C}}{\|s\mathbf{C}\|^2}\right)s\mathbf{C} = \left(\frac{rs\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) + s(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})}{s^2\|\mathbf{C}\|^2}\right)s\mathbf{C}$$

$$= \left(\frac{r(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})}{\|\mathbf{C}\|^2}\right)\mathbf{C} + \left(\frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}}{\|\mathbf{C}\|^2}\right)\mathbf{C}$$

$$= r\,Proy_{\mathbf{C}}\mathbf{A} + Proy_{\mathbf{C}}\mathbf{B}$$ ■

Ejemplo 8 Sean los vectores **A** = ⟨k , -2⟩ y **B** = ⟨2k , k + 2⟩ , donde k ∈ **R**. Hallar los valores de k de modo que $Proy_{\mathbf{B}}\mathbf{A}$ y **B** tengan sentidos opuestos.

Solución. Si $Proy_{\mathbf{B}}\mathbf{A}$ y **B** tienen sentidos opuestos , entonces $Comp_{\mathbf{B}}\mathbf{A} < 0$, esto es,

$\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|} < 0$, pero como $\|\mathbf{B}\| > 0$, implica que : $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} < 0$

Luego : $\quad \langle k\,,\,-2\rangle \cdot \langle 2k\,,\,k+2\rangle < 0 \Rightarrow 2k^2 - 2(k+2) < 0 \Leftrightarrow k^2 - k - 2 < 0$

$\Rightarrow (k+1)(k-2) < 0 \Leftrightarrow (k+1 < 0 \wedge k-2 > 0) \vee (k+1 > 0 \wedge k-2 < 0)$

$\Leftrightarrow (k < -1 \wedge k > 2) \vee (k > -1 \wedge k < 2)$

$\Leftrightarrow (\varnothing) \vee (-1 < k < 2) \Rightarrow k \in \langle -1\,,\,2\rangle$ ■

Ejemplo 9 Sean los vectores no nulos **A**, **B** ∈ $\mathbb{R}^2$ y r ≠ 0. Establecer el valor de verdad de las siguientes afirmaciones

1. $\|\mathbf{A}^\perp + \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A} - \mathbf{B}^\perp\|$
2. $Proy_{\mathbf{A}}(Proy_{\mathbf{B}}\mathbf{A}) = Proy_{\mathbf{B}}(Proy_{\mathbf{A}}\mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{A} \parallel \mathbf{B}^\perp$ ó $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{B}\|$
3. $|Comp_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}^\perp + \mathbf{B})| \leq \|\mathbf{B}\|$
4. Si $r > 0 \Rightarrow Comp_{\mathbf{B}^\perp}\mathbf{A} = -\,Comp_{r\mathbf{B}}\mathbf{A}^\perp$
5. Si $\mathbf{A} + \mathbf{B}^\perp = \mathbf{A}^\perp + \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}$

Solución.

1. Dado que $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}^\perp\| \Rightarrow \|\mathbf{A}^\perp + \mathbf{B}\| = \|(\mathbf{A}^\perp + \mathbf{B})^\perp\|$

$= \|(\mathbf{A}^\perp)^\perp + \mathbf{B}^\perp\|$

$= \|-\mathbf{A} + \mathbf{B}^\perp\| = \|(-1)(\mathbf{A} - \mathbf{B}^\perp)\|$

$= |(-1)|\,\|\mathbf{A} - \mathbf{B}^\perp\| = \|\mathbf{A} - \mathbf{B}^\perp\|$

Luego , la afirmación es *verdadera*

2. $$Proy_{\mathbf{A}}(Proy_{\mathbf{B}}\mathbf{A}) = Proy_{\mathbf{B}}(Proy_{\mathbf{A}}\mathbf{B}) \Rightarrow \left[\frac{(Proy_{\mathbf{B}}\mathbf{A})\cdot\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|^2}\right]\mathbf{A} = \left[\frac{(Proy_{\mathbf{A}}\mathbf{B})\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|^2}\right]\mathbf{B}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})}{\|\mathbf{B}\|^2\,\|\mathbf{A}\|^2}\right]\mathbf{A} = \left[\frac{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})}{\|\mathbf{A}\|^2\,\|\mathbf{B}\|^2}\right]\mathbf{B} \quad (1)$$

La igualdad (1) se cumple si y sólo si

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} \perp \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \parallel \mathbf{B}^\perp$

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}$, luego $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{B}\|$

Por tanto , la afirmación de *verdadera.*

3. Por la desigualdad de Cauchy - Schwartz se sabe que :

$$|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| \leq ||\mathbf{A}||\,||\mathbf{B}|| \Rightarrow \frac{|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}|}{||\mathbf{A}||} \leq ||\mathbf{B}|| \Rightarrow \frac{|\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{\perp}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}|}{||\mathbf{A}||} \leq ||\mathbf{B}||$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}^{\perp}+\mathbf{B})}{||\mathbf{A}||}\right| \leq ||\mathbf{B}|| \Rightarrow |\text{Comp}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}^{\perp}+\mathbf{B})| \leq ||\mathbf{B}||$$

Luego , la afirmación es *verdadera*

4. $\text{Comp}_{\mathbf{B}^{\perp}}\mathbf{A} = \dfrac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{\perp}}{||\mathbf{B}^{\perp}||}$, pero $||\mathbf{B}^{\perp}|| = ||\mathbf{B}||$ y $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{\perp} = -\mathbf{A}^{\perp}\cdot\mathbf{B}$

Luego : $\text{Comp}_{\mathbf{B}^{\perp}}\mathbf{A} = -\dfrac{\mathbf{A}^{\perp}\cdot\mathbf{B}}{||\mathbf{B}||}$, como $r > 0 \Rightarrow \text{Comp}_{\mathbf{B}^{\perp}}\mathbf{A} = -\dfrac{\mathbf{A}^{\perp}\cdot(r\,\mathbf{B})}{||r\mathbf{B}||}$

$$\Rightarrow \text{Comp}_{\mathbf{B}^{\perp}}\mathbf{A} = -\text{Comp}_{r\mathbf{B}}\mathbf{A}^{\perp}$$

Por tanto , la afirmación es *verdadera.*

5. Si $\mathbf{A}+\mathbf{B}^{\perp} = \mathbf{A}^{\perp}+\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}-\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\perp}-\mathbf{B}^{\perp}$

$\Rightarrow (\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = (\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}^{\perp}-\mathbf{B}^{\perp})$

$\Rightarrow (\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = (\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B})^{\perp}$ $\qquad (\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{\perp} = 0)$

$\Rightarrow (\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = 0$ $\qquad (\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{O})$

$\Leftrightarrow \mathbf{A}-\mathbf{B} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}$

Luego , la afirmación es *verdadera.* ■

Ejemplo 10 Dado el vector $\mathbf{A} = \langle -4 , 2\rangle$ y $\text{Proy}_{\mathbf{B}^{\perp}}\mathbf{A} = \langle -3 , 3\rangle$, supuesto que $\text{Comp}_{\mathbf{B}^{\perp}}\mathbf{A}$ es positivo , hallar la $\text{Comp}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}$.

Solución. Si $\mathbf{A} = \text{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} + \text{Proy}_{\mathbf{B}^{\perp}}\mathbf{A}$

$\Rightarrow \langle -4 , 2\rangle = \text{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} + \langle -3 , 3\rangle$

$\Rightarrow \text{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = \langle -1 , -1\rangle$

Dado que , $\text{Comp}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = \pm\,||\text{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}||$, entonces :

$\text{Comp}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = \pm\sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \pm\sqrt{2}$

En la Figura 1.78 se observa que **B** y $\text{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}$ tienen sentidos opuestos , por lo que : $\text{Comp}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = -\sqrt{2}$ ■

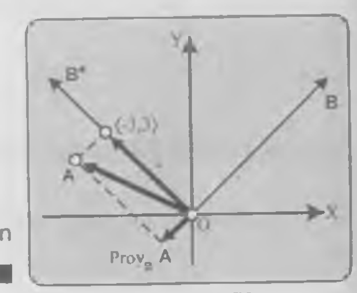


FIGURA 1.78

Ejemplo 11 Dado el exágono regular de lado a (Figura 1.79), hallar la proyección ortogonal de $\overline{FC}$ sobre $\overline{BE}$.

Solución. $\overline{FC} = ||\overline{FC}||\,\langle \text{Cos}60°, \text{Sen}60°\rangle$

$= 2a\,\langle 1/2 , \sqrt{3}/2\rangle = a\,\langle 1 , \sqrt{3}\rangle$

$\overline{BE} = ||\overline{BE}||\,\langle \text{Cos } 300° , \text{Sen } 300°\rangle = 2a\,\langle 1/2 , -\sqrt{3}/2\rangle \Rightarrow \overline{BE} = a\,\langle 1 , -\sqrt{3}\rangle$

Luego , $\text{Proy}_{\overline{BE}}\overline{FC} = \left(\dfrac{\overline{FC}\cdot\overline{BE}}{||\overline{BE}||^2}\right)\overline{BE} = \left(\dfrac{a\langle 1 , \sqrt{3}\rangle\cdot a\langle 1 , -\sqrt{3}\rangle}{a^2(\sqrt{1+3})^2}\right) a\,\langle 1 , -\sqrt{3}\rangle$

$$\therefore\ \text{Proy}_{\overline{BE}}\overline{FC} = \frac{a}{2}\langle 1 , -\sqrt{3}\rangle$$ ■

Ejemplo 12 En la Figura 1.80 , **C** es un vector unitario tal que Cotg $\alpha = 3\sqrt{3}$. Si $\mathbf{A}+\mathbf{V} = \mathbf{A}^{\perp}$, hallar la $\text{Comp}_{\mathbf{V}}\mathbf{C}$.

Solución. Dado Cotg$\alpha = 3\sqrt{3}$ y α en el IV cuadrante , entonces

$\text{Sen }\alpha = -\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$ y $\text{Cos }\alpha = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

Si $\mathbf{C} = \langle \text{Cos}\alpha , \text{Sen}\alpha\rangle \Rightarrow \mathbf{C} = \dfrac{\sqrt{7}}{14}\langle 3\sqrt{3} , -1\rangle$

$\text{Sen } 75° = \text{Sen}(45° + 30°) = \text{Sen } 45° \text{ Cos } 30° + \text{Sen } 30° \text{ Cos } 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$

$\text{Cos } 75° = \text{Cos}(45° + 30°) = \text{Cos } 45° \text{ Cos } 30° - \text{Sen } 45° \text{ Sen } 30° = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$

$\Rightarrow \mathbf{A} = ||\mathbf{A}||\,\langle \text{Cos } 75° , \text{Sen } 75°\rangle = \dfrac{\sqrt{2}}{4}||\mathbf{A}||\,\langle \sqrt{3}-1 , \sqrt{3}+1\rangle = r\,\langle \sqrt{3}-1 , \sqrt{3}+1\rangle$

Luego , si $\mathbf{V} = \mathbf{A}^{\perp} - \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{V} = r\,\langle -\sqrt{3}-1 , \sqrt{3}-1\rangle - r\,\langle \sqrt{3}-1 , \sqrt{3}+1\rangle = 2r\,\langle -\sqrt{3} , -1\rangle$

$$\therefore\ \text{Comp}_{\mathbf{V}}\mathbf{C} = \frac{\mathbf{C}\cdot\mathbf{V}}{||\mathbf{V}||} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{14}\langle 3\sqrt{3} , -1\rangle\cdot 2r\langle -\sqrt{3} , -1\rangle}{2r\sqrt{3+1}} = -\frac{2\sqrt{7}}{7}$$ ■

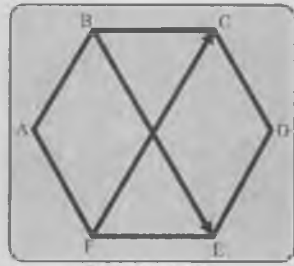


FIGURA 1.79

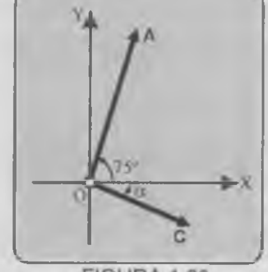


FIGURA 1.80

Ejemplo 13 En la Figura 1.81 se tiene : $||\mathbf{A}|| = 2$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \sqrt{2}\,||\mathbf{B}||$. Sea **V** un vector tal que $\mathbf{B}^{\perp}+\mathbf{V} = \mathbf{B}$ y α el ángulo entre **A** y **B**. Hallar $\text{Proy}_{\mathbf{V}}\mathbf{A}$.

Solución. $\mathbf{A} = ||\mathbf{A}|| \langle \text{Cos } 60°, \text{Sen } 60° \rangle = \langle 1, \sqrt{3} \rangle$

Si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = ||\mathbf{A}||\,||\mathbf{B}|| \text{ Cos } \alpha$, entonces :

$\sqrt{2}\,||\mathbf{B}|| = 2||\mathbf{B}|| \text{ Cos } \alpha$, de donde ,

$$\text{Cos } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$$

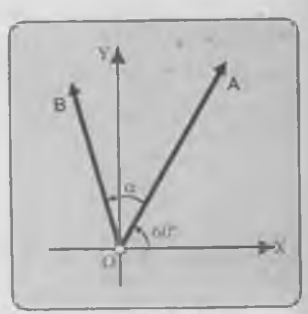


FIGURA 1.81

Si $\mathbf{B} = ||\mathbf{B}|| \langle \text{Cos } 105°, \text{Sen } 105° \rangle$

$$\Rightarrow \mathbf{B} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,||\mathbf{B}||\,\langle 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3} \rangle$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}^{\perp} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,||\mathbf{B}||\,\langle -1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3} \rangle$$

Luego , si $\mathbf{V} = \mathbf{B} - \mathbf{B}^{\perp} \Rightarrow \mathbf{V} = \frac{\sqrt{2}}{4}||\mathbf{B}||\,\langle 2, 2\sqrt{3} \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}||\mathbf{B}||\,\langle 1, \sqrt{3} \rangle = r\langle 1, \sqrt{3} \rangle$

$$\therefore \text{ Proy}_{\mathbf{V}}\mathbf{A} = \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}}{||\mathbf{V}||^2}\right)\mathbf{V} = \left(\frac{\langle 1, \sqrt{3} \rangle \cdot r\langle 1, \sqrt{3} \rangle}{r^2(\sqrt{1+3})^2}\right) r\langle 1, \sqrt{3} \rangle = \langle 1, \sqrt{3} \rangle \quad ■$$

Ejemplo 14 En el paralelogramo de la Figura 1.82 se tiene : $\overline{DE} = \overline{EC}$, m(∢ BAD) = 60º. La altura relativa a la base $\overline{AD}$ es h. Si el vector $\mathbf{M} = \overline{AB} + \overline{AE} - \overline{BD}$ y $\mathbf{V} = \text{Proy}_{\overline{AD}}\mathbf{M}$, hallar la norma de $\mathbf{V}$ en función de h.

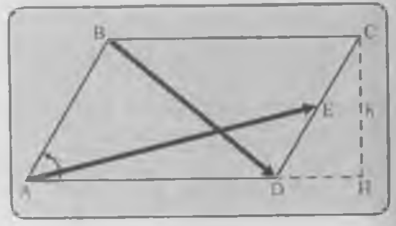


FIGURA 1.82

Solución. En la Figura 1.82 se tiene :

$$\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE} \text{ y } \overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$$

Luego , si $\mathbf{M} = \overline{AB} + \overline{AE} - \overline{BD} \Rightarrow \mathbf{M} = \overline{AB} + (\overline{AD} + \overline{DE}) - (\overline{AD} - \overline{AB})$

$$= 2\overline{AB} + \overline{DE} = 2\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{5}{2}\overline{AB}$$

$$\Rightarrow ||\mathbf{V}|| = ||\text{Proy}_{\overline{AD}}\mathbf{M}|| = \frac{\mathbf{M} \cdot \overline{AD}}{||\overline{AD}||} = \frac{5}{2}\left(\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{||\overline{AD}||}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{||\overline{AB}||\,||\overline{AD}|| \text{ Cos } 60°}{||\overline{AD}||}\right)$$

de donde obtenemos : $||\mathbf{V}|| = \frac{5}{4}||\overline{AB}||$

En el ΔDHC : $h = ||\overline{DC}|| \text{ Sen } 60° = ||\overline{AB}|| \text{ Sen } 60° \Rightarrow ||\overline{AB}|| = \frac{2\sqrt{3}}{3}h$

$$\therefore ||\mathbf{V}|| = \frac{5}{4}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)h = \frac{5\sqrt{3}}{6}h \quad ■$$

Ejemplo 15 La Figura 1.83 es un trapecio rectángulo en donde : $\mathbf{A} = \langle 5, 12 \rangle$ y $\mathbf{C} = \langle -2, 3 \rangle$. Hallar su área.

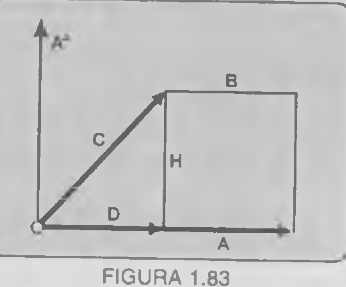


FIGURA 1.83

Solución. $||\mathbf{A}|| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

$$||\mathbf{H}|| = \text{Comp}_{\mathbf{A}^{\perp}}\mathbf{C} = \frac{\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{\perp}}{||\mathbf{A}||}$$

$$\Rightarrow ||\mathbf{H}|| = \frac{\langle -2, 3 \rangle \cdot \langle -12, 5 \rangle}{13} = 3$$

$$||\mathbf{D}|| = \text{Comp}_{\mathbf{A}}\mathbf{C} = \frac{\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}}{||\mathbf{A}||} = \frac{\langle -2, 3 \rangle \cdot \langle 5, 12 \rangle}{13} = 2$$

$$||\mathbf{B}|| = ||\mathbf{A}|| - ||\mathbf{D}|| = 13 - 2 = 11$$

$\therefore$ Area del trapecio $= \frac{1}{2}(||\mathbf{A}|| + ||\mathbf{B}||)\,||\mathbf{H}|| = \frac{1}{2}(13 + 11)(3) = 36 \text{ u}^2$ ■

Ejemplo 16 El triángulo ABC es isósceles , siendo A(4 , 10) y $\overline{BC}$ el lado desigual. Si $\text{Proy}_{\overline{BC}}\overline{BA} = \langle 3, -1 \rangle$ y $\text{Proy}_{\overline{AC}}\overline{AB} = \frac{3}{5}\langle 1, -7 \rangle$, hallar los vértices B y C.

Solución. Si $\text{Proy}_{\overline{AC}}\overline{AB} = \frac{3}{5}\langle 1, -7 \rangle \Rightarrow \overrightarrow{AC} \parallel \langle 1, -7 \rangle$,

esto es , $\exists\, r \in \mathbf{R} \mid \overrightarrow{AC} = r\langle 1, -7 \rangle$

$\Rightarrow \mathbf{C} - \mathbf{A} = r\langle 1, -7 \rangle \Leftrightarrow \mathbf{C} = \langle 4, 10 \rangle + r\langle 1, -7 \rangle$ (1)

Como $\overline{BC} = 2\overline{BH} \Rightarrow \overline{BC} = 2\,\text{Proy}_{\overline{BC}}\overline{BA} = 2\langle 3, -1 \rangle$

$\Rightarrow \mathbf{C} - \mathbf{B} = \langle 6, -2 \rangle \Rightarrow \mathbf{B} = \langle 4, 10 \rangle + r\langle 1, -1 \rangle - \langle 6, -2 \rangle$

$\Rightarrow \mathbf{B} = \langle -2, 12 \rangle + r\langle 1, -7 \rangle$ (2)

$\overline{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = \langle -2, 12 \rangle + r\langle 1, -7 \rangle - \langle 4, 10 \rangle = \langle r - 6, 2 - 7r \rangle$

Además :

$||\overline{AB}|| = ||\overline{AC}|| \Rightarrow \sqrt{(r-6)^2 + (2-7r)^2} = r\sqrt{1 + 49}$

de donde , r = 1 , que sustituido en (1) y (2) obtenemos :

C(5 , 3) y B(-1 , 5) ■

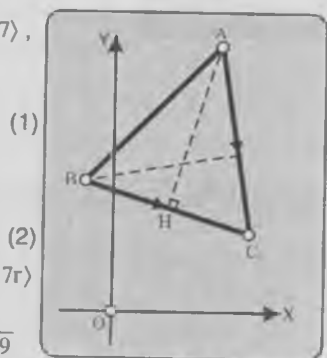


FIGURA 1.84

Ejemplo 17 Sean A(-3 , 2) , B , C(-1, 13) y D los vértices de un rectángulo tal que $\overline{AC}$ es una de sus diagonales y $\overline{AB}$ es ortogonal a $\langle 4, -3 \rangle$. Hallar los vértices B y D.

Solución. Si $\overrightarrow{AB} \perp \langle 4, -3 \rangle$ implica que $\overrightarrow{AB} \parallel \langle 3, 4 \rangle$, entonces un vector unitario en

la dirección y sentido de $\overline{AB}$ es: $\boldsymbol{u} = \dfrac{\overline{AB}}{||\overline{AB}||} = \dfrac{\langle 3 , 4\rangle}{5}$

Además , si $\overline{AC} = \mathbf{C} - \mathbf{A}$

$\Rightarrow \overline{AC} = \langle -1 , 13\rangle - \langle -3 , 2\rangle = \langle 2 , 11\rangle$

En la Figura 1.85 se observa que $\overline{AB} = \text{Proy}_{\boldsymbol{u}}\overline{AC}$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \left(\frac{\overline{AC} \cdot \boldsymbol{u}}{||\boldsymbol{u}||^2}\right)\boldsymbol{u} = (\overline{AC} \cdot \boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u}$$

Luego : $\overline{AB} = (\langle 2 , 11\rangle \cdot \langle 3/5 , 4/5\rangle)\,\langle 3/5 , 4/5\rangle = \langle 6 , 8\rangle$

Como $\mathbf{B} - \mathbf{A} = \overline{AB}$

$\Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A} + \overline{AB} = \langle -3 , 2\rangle + \langle 6 , 8\rangle = \langle 3 , 10\rangle$

FIGURA 1.85

Si M es el punto de intersección de las diagonales , entonces :

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{C}) = \langle -2 , 15/2\rangle$$

También : $\mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{D}) \Rightarrow \mathbf{D} = 2\,\mathbf{M} - \mathbf{B} = \langle -7 , 5\rangle$

Por tanto , los vértices buscados son : B(3 , 10) y D(-7 , 5) ■

Ejemplo 18 Sea el cuadrilátero ABCD tal que M(-2 , 4) y N(4 , 2) son puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente ; $\overline{DM}$ es paralelo al vector $\mathbf{S} = \langle 1 , 4\rangle$ y $\overline{CM}$ es paralelo al vector $\mathbf{T} = \langle -3 , 2\rangle$ y $\text{Proy}_{\overline{AB}}\overline{DN} = \frac{36}{13}\langle 3 , 2\rangle$. Hallar los vértices del cuadrilátero.

Solución. Si $\text{Proy}_{\overline{AB}}\overline{DN} = \frac{36}{13}\langle 3 , 2\rangle \Rightarrow \overline{AB} \,||\, \langle 3 , 2\rangle$, luego $\exists\, r \in \mathbf{R} \mid \overline{AB} = r\langle 3 , 2\rangle$

$\overline{DM} \,||\, \mathbf{S} \Rightarrow \exists\, s \in \mathbf{R} \mid \overline{DM} = s\langle 1 , 4\rangle \Rightarrow \mathbf{M} - \mathbf{D} = s\langle 1 , 4\rangle \Leftrightarrow \mathbf{D} = \langle -2 , 4\rangle - s\langle 1 , 4\rangle$ (1)

$\overline{DN} = \mathbf{N} - \mathbf{D} = \langle 4 , 2\rangle - \langle -2 , 4\rangle + s\langle 1 , 4\rangle$

$= \langle 6 + s , -2 + 4s\rangle$

Si $\text{Proy}_{\overline{AB}}\overline{DN} = \left(\dfrac{\overline{DN} \cdot \overline{AB}}{||\overline{AB}||^2}\right)\overline{AB}$

$$\Rightarrow \frac{36}{13}\langle 3 , 2\rangle = \left(\frac{\langle 6 + s , -2 + 4s\rangle \cdot r\langle 3 , 2\rangle}{r^2(\sqrt{9 + 4})^2}\right) r\langle 3 , 2\rangle$$

de donde obtenemos s = 2 , luego en (1) :

$\mathbf{D} = \langle -4 , -4\rangle$

Como M es punto medio de $\overline{AB} \Rightarrow \overline{AB} = 2\overline{MB}$

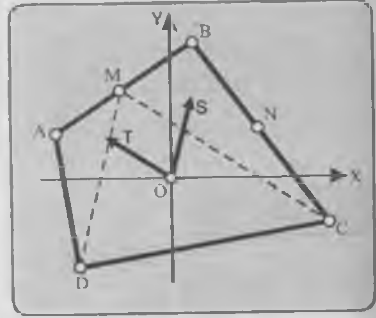


FIGURA 1.86

$\Rightarrow r\langle 3 , 2\rangle = 2(\mathbf{B} - \mathbf{M}) \Leftrightarrow \mathbf{B} = \frac{1}{2}\langle 3r - 4 , 2r + 8\rangle$ (2)

$\text{CM} \,||\, \mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{M} - \mathbf{C} = t\langle -3 , 2\rangle \Leftrightarrow \mathbf{C} = \langle -2 + 3t , 4 - 2t\rangle$ (3)

N es punto medio de $\overline{BC} \Rightarrow 2\mathbf{N} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$

$$\Rightarrow 2\langle 4 , 2\rangle = \frac{1}{2}\langle 3r - 4 , 2r + 8\rangle + \langle -2 + 3t , 4 - 2t\rangle$$

de donde : $\langle 16 , 8\rangle = \langle 3r + 6t - 8 , 2r - 4t + 16\rangle$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 = 3r + 6t - 8 \Rightarrow r + 2t = 8 \\ 8 = 2r - 4t + 16 \Rightarrow r - 2t = -4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos r = 2 y t = 3 , que sustituidos en (2) y (3) , respectivamente , encontramos $\mathbf{B} = \langle 1 , 6\rangle$ y $\mathbf{C} = \langle 7 , -2\rangle$

Si $\overline{AB} = 2\langle 3 , 2\rangle \Rightarrow \mathbf{B} - \mathbf{A} = \langle 6 , 4\rangle \Rightarrow \mathbf{A} = \langle 1 , 6\rangle - \langle 6 , 4\rangle = \langle -5 , 2\rangle$

Por tanto, los vértices del cuadrilátero son : A(-5 , 2) , B(1 , 6) , C(7 , -2) y D(-4 , -4) ■

Ejemplo 19 En un triángulo ABC , M(-1 , 6) y N(7 , 1) son puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. $\overline{AB}$ es paralelo al vector $\mathbf{V} = \langle 2 , 1\rangle$ y $\text{Proy}_{\overline{AN}}\overline{AB} = \frac{28}{17}\langle 4 , 1\rangle$. Hallar los vértices del triángulo.

Solución. Si $\text{Proy}_{\overline{AN}}\overline{AB} = \frac{28}{17}\langle 4 , -1\rangle \Rightarrow \overline{AN} \,||\, \langle 4 , -1\rangle \Rightarrow \exists\, r \in \mathbf{R} \mid \overline{AN} = r\langle 4 , -1\rangle$

Luego , $\mathbf{N} - \mathbf{A} = r\langle 4 , -1\rangle \Rightarrow \mathbf{A} = \langle 7 , 1\rangle - r\langle 4 , -1\rangle$ (1)

$\overline{AM} \,||\, \overline{AB}$ y $\overline{AB} \,||\, \mathbf{V} = \langle 2 , 1\rangle \Rightarrow \exists\, t \in \mathbf{R} \mid \overline{AM} = t\langle 2 , 1\rangle$

Por lo que , $\mathbf{M} - \mathbf{A} = t\langle 2 , 1\rangle \Rightarrow \mathbf{A} = \langle -1 , 6\rangle - t\langle 2 , 1\rangle$ (2)

De (1) y (2) se sigue que :

$\langle 7 , 1\rangle - r\langle 4 , -1\rangle = \langle -1 , 6\rangle - t\langle 2 , 1\rangle$

$$\Rightarrow t\langle 2 , 1\rangle - r\langle 4 , -1\rangle = \langle -8 , 5\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 4r = -8 \\ t + r = 5 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos r = 3 y t = 2

Para r = 3 , en (1) se tiene : $\mathbf{A} = \langle -5 , 4\rangle$

M es punto medio de $\overline{AB} \Rightarrow \mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$

$\Rightarrow \mathbf{B} = 2\mathbf{M} - \mathbf{A} = 2\langle -1 , 6\rangle - \langle -5 , 4\rangle = \langle 3 , 8\rangle$

N es punto medio de $\overline{BC} \Rightarrow \mathbf{N} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$

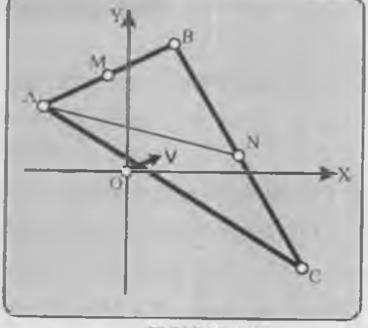


FIGURA 1.87

$\Rightarrow \mathbf{C} = 2\mathbf{N} - \mathbf{B} = 2\langle 7 , 1\rangle - \langle 3 , 8\rangle = \langle 11 , -6\rangle$

Por lo tanto , los vértices del triángulo son :

A(-5 , 4) , B(3 , 8) y C(11 , -6) ■

Ejemplo 20 En el paralelogramo de la Figura 1.88 se tiene : $\overline{MD} = 4\overline{BM}$ y $\overline{AD} = 3\overline{AN}$

a) Hallar r y s tales que : $\overline{MN} = r\,\overline{AD} + s\,\overline{AB}$

b) Si adicionalmente los vectores $\overline{BA}$ y $\overline{AD}$ forman un ángulo de 120º y $||\overline{AD}|| = 2||\overline{BA}||$, hallar la proyección ortogonal de $\overline{MN}$ sobre $\overline{AD}$.

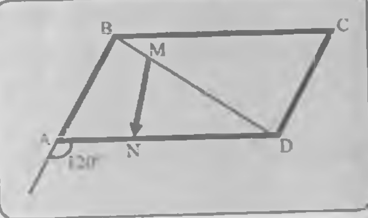


FIGURA 1.88

Solución.

a) Si $\overline{MD} = 4\overline{BM} \Rightarrow \overline{MD} = \frac{4}{5}\overline{BD} = \frac{4}{5}(\overline{AD} - \overline{AB})$

y si $\overline{AD} = 3\overline{AN} \Rightarrow \overline{ND} = \frac{2}{3}\overline{AD}$

En el ΔMND : $\overline{MN} = \overline{MD} - \overline{ND} = \frac{4}{5}(\overline{AD} - \overline{AB}) - \frac{2}{3}\overline{AD} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{2}{15}\overline{AD} - \frac{4}{5}\overline{AB}$ (1)

Por lo que : $r = 2/15$ y $s = -4/5$

b) Por la igualdad (1) : $\text{Proy}_{\overline{AD}}\overline{MN} = \frac{2}{15}\text{Proy}_{\overline{AD}}\overline{AD} - \frac{4}{5}\text{Proy}_{\overline{AD}}\overline{AB}$

$$= \frac{2}{15}\overline{AD} - \frac{4}{5}\left(\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{||\overline{AD}||^2}\right)\overline{AD} \quad (2)$$

Pero : $\overline{AB}\cdot\overline{AD} = ||\overline{AB}||\,||\overline{AD}||\,\text{Cos}60° = \frac{1}{2}||\overline{AD}||\,||\overline{AD}||\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}||\overline{AD}||^2$

Luego , en (2) se tiene : $\text{Proy}_{\overline{AD}}\overline{MN} = \frac{2}{15}\overline{AD} - \frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}\right)\overline{AD} = -\frac{1}{15}\overline{AD}$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 10*

1. Demostrar que : a) $\text{Proy}_{\mathbf{A}}(\mathbf{B} - \mathbf{C}) = \text{Proy}_{\mathbf{A}}\mathbf{B} - \text{Proy}_{\mathbf{A}}\mathbf{C}$
   b) $\text{Proy}_{\mathbf{A}}(r\,\mathbf{B}) = r\,\text{Proy}_{\mathbf{A}}\mathbf{B}$
   c) $\text{Comp}_{\mathbf{C}}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{Comp}_{\mathbf{C}}\mathbf{A} + \text{Comp}_{\mathbf{C}}\mathbf{B}$

2. Sean **A** , **B** y **C** vectores no nulos en $\mathbf{R}^2$ y r , s ∈ **R**. Establecer si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.
   a) $\text{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} + \text{Proy}_{\mathbf{B}^\perp}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}$
   b) $\text{Proy}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - \text{Proy}_{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \mathbf{A}$
   c) $\text{Proy}_{\mathbf{B}}(r\,\mathbf{A} + s\,\mathbf{C}) = (r + s)\,(\text{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} + \text{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{C})$
   d) $\text{Proy}_{\mathbf{B}^\perp}\mathbf{A} + \text{Proy}_{\mathbf{A}^\perp}\mathbf{B} = \mathbf{O}$

3. Sean los vectores **A** y **B** lados de un paralelogramo. Si $||\mathbf{A}|| = 6$, $||\mathbf{A}|| =$

$2||\mathbf{B}||$ y $\text{Comp}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = 10/3$, hallar la longitud de la diagonal **A** - **B**.

4. Dados los vectores $\mathbf{A} = \langle\sqrt{3}, -1\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 3, \sqrt{3}\rangle$, hallar $2(\text{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} + \text{Proy}_{\mathbf{A}}\mathbf{B})$
5. Sean **A** y **B** dos vectores tales que $\mathbf{A} = \langle 5, -2\rangle$, $\text{Comp}_{\mathbf{A}}\mathbf{B} = -58$ y $||\mathbf{B}|| = 29$. Hallar $\text{Comp}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}$.
6. Si **A** es un vector del mismo sentido que $\mathbf{V} = \langle 1, 2\rangle$, tal que $||\mathbf{A}|| = 50$ y $||\mathbf{B}|| = 29$; hallar $\text{Comp}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}$.
7. Los lados de un triángulo son los vectores **A** , **B** y **B** - **A**. Si $||\mathbf{A}|| = 6$, $||\mathbf{B}|| = 2$ y $||\mathbf{B} - \mathbf{A}|| = 5$; hallar $\text{Comp}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} - \text{Comp}_{\mathbf{A}}\mathbf{B}$.
8. Los lados de un triángulo son los vectores **A** , **B** y **A** - **B**, si $||\mathbf{A}|| = 10$, $||\mathbf{B}|| = 6$ y $\text{Comp}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = -5$. Hallar la longitud de **A** - **B**.
9. Los lados de un triángulo son **A** , **B** y **A** + **B** , tales que $||\mathbf{A}|| = 3$, $||\mathbf{B}|| = 2\sqrt{2}$ y $||\mathbf{A} + \mathbf{B}|| = \sqrt{53}$. Hallar $2\,\text{Comp}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} - \text{Comp}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$.
10. Si $||\mathbf{A} - \mathbf{B}|| = 4$, $||\mathbf{B}|| = 3$ y $\text{Comp}_{\mathbf{B}}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = 22/3$, hallar la norma de **A**.
11. Si $\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$, $||\mathbf{A}|| = p$, $||\mathbf{B}|| = q$, $||\mathbf{C}|| = r$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = pq$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} = pr$ y $\text{Comp}_{\mathbf{B}}\mathbf{C} = r$; hallar la norma de **D**.
12. Si $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{O}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$, $||\mathbf{A}|| = a$, $||\mathbf{B}|| = b$, $||\mathbf{C}|| = c$; hallar $\text{Comp}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}$.
13. Si $\text{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = \langle 2, -5\rangle$, $\text{Proy}_{\mathbf{B}^\perp}\mathbf{A} = \langle -3, 2\rangle$ y $\mathbf{B} = 2\,\mathbf{A} + \mathbf{A}^\perp$; hallar $||\mathbf{B}||$.
14. Sea $||\mathbf{A}|| = \sqrt{65}$, $||\mathbf{A} + \mathbf{B}|| = \sqrt{164}$, $\text{Comp}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \dfrac{102}{||\mathbf{A}||}$; hallar $\text{Comp}_{\mathbf{B}}(\mathbf{A} - \mathbf{B})$.
15. Establecer si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
    a) $\text{Proy}_{\mathbf{B}^\perp}\mathbf{A} = \text{Proy}_{\mathbf{A}^\perp}\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}$
    b) Si $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$ y $\text{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} = \text{Proy}_{\mathbf{A}}\mathbf{B} \Rightarrow \text{Comp}_{\mathbf{B}}\mathbf{A} + \text{Comp}_{\mathbf{A}}\mathbf{B} = 2||\mathbf{B}||$
    c) $(\text{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{A})^\perp = \text{Proy}_{\mathbf{B}^\perp}\mathbf{A}^\perp$
    d) $\text{Comp}_{\mathbf{B}^\perp}(\text{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}) = 0$
16. Si $\mathbf{A} = \langle 5, -2\rangle$ y $\text{Proy}_{\mathbf{B}^\perp}\mathbf{A} = \langle 4, 1\rangle$, hallar $\text{Comp}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}$ sabiendo que $\text{Comp}_{\mathbf{B}^\perp}\mathbf{A}$ es positivo.
17. Hallar el ángulo formado por los vectores **A** y $\text{Proy}_{\mathbf{B}^\perp}\mathbf{A}$, si $\mathbf{A} = \langle 1, 2\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 1, 3\rangle$.
18. Los vectores **A** y **B** de longitudes 2 y 3 respectivamente , forman ángulos de medidas α y β con el vector $\mathbf{C} = \langle 1, 1\rangle$. Siendo $0° < \alpha < 90°$ y $\beta < 180°$. Hallar $||\text{Proy}_{\mathbf{C}}(\mathbf{A} + \mathbf{B})||$ en términos de α y β.
19. Si $\mathbf{A} = 3\left(\dfrac{\mathbf{B}}{||\mathbf{B}||}\right) + 4\left(\dfrac{\mathbf{B}^\perp}{||\mathbf{B}^\perp||}\right)$ y $\text{Comp}_{\mathbf{A}^\perp}\mathbf{B} = 2$, hallar $|\mathbf{A}^\perp\cdot\mathbf{B}|$
20. Hallar el vector **B** sabiendo que $||\mathbf{B}|| = 2\sqrt{2}$, $\mathbf{A} = \langle -4, 2\rangle$, $\text{Comp}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}$ es positivo

y $Proy_{B^\perp}A = \langle -3 , 3\rangle$.

21. Dados los vectores **A** = ⟨3 , -6⟩ , **B** = ⟨3 , 4⟩ y **C** = ⟨21 , 0⟩ , hallar los valores de r y s tales que : **C** = r $Proy_B$**A** + s $Proy_{B^\perp}$**A**

22. Los vectores **A** y **B** de R^2 cumplen : $\|A\| = 3\sqrt{5}$, **B** = ⟨-4 , 3⟩ , $Proy_{A^\perp}B = \langle -2 , 4\rangle$ y $Comp_A B > 0$.

a) Con los datos dados, en un plano cartesiano, gráficamente ubicar los vectores **A** , $A^\perp$ y $Proy_A B$.

b) Hallar , $Proy_B A$ y $Comp_{A^\perp}B$

23. Sea el triángulo ABC y sean Q(1 , 9) y S(6 , 2) los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $\overline{AB} \parallel \langle 1 , 1\rangle$ y $Proy_{\overline{AS}}\overline{AB} = \frac{8}{15}\langle 3 , -1\rangle$, hallar los vértices del triángulo.

24. Sean los vectores **A** , **B** ∈ R^2 , tales que : $\|A + B\| = \sqrt{17}$, $\|2A - B\| = \sqrt{26}$, $(B + \sqrt{2}\,A) \perp (B - \sqrt{2}\,A)$ y el vector **V** = 5 **A** + 3 **B** tienen la misma dirección y sentido que el vector ⟨-2 , 1⟩. Hallar $Proy_V A$.

25. Dado un triángulo isósceles ABC ($\overline{AB} = \overline{AC}$), sean M y N puntos de trisección de la base $\overline{BC}$. Si el coseno del ángulo A es 1/4, hallar la proyección ortogonal del vector $\overline{AM} + \overline{AN}$ sobre el vector $\overline{AC}$ y el vector $\overline{AC}^\perp$.

26. Sean **A** = 2***u*** + **v** y **B** = ***u*** - 2**v** , donde ***u*** y **v** son vectores unitarios que forman un ángulo de 60º , como se muestra en la Figura 1.89. Un trapecio isósceles OPQR se forma de tal modo que una de sus bases es $A = \overrightarrow{OR}$ y uno de sus lados no paralelos es $B = \overrightarrow{OP}$.

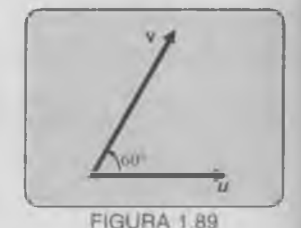


FIGURA 1.89

a) Con referencia a las posiciones de ***u*** y **v** , graficar cuidadosamente el trapecio OPQR.

b) Hallar , en términos de ***u*** y **v** , el vector $\overrightarrow{OQ}$.

27. Dado el exágono regular ABCDEF de la Figura 1.90, cuyo lado mide 10 unidades y el vector **V** = $\overline{BD} + \overline{FC} + \overline{BC}$; hallar $\|Proy_{\overline{AF}}V\|$.

28. Dado el exágono regular de lado a (Figura 1.91) , en donde G y H son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{DE}$ respectivamente. Hallar la norma de **V**, si **V** = $Proy_{\overline{AF}}(5\overline{AG}) + Proy_{\overline{AF}}(9\overline{AH})$.

29. En la Figura 1.92 , **A** , **B** y **C** son tres vectores de R^2 tales que **B** es unitario, **C** es ortogonal a **A** y $A \cdot B = \|A\|\,(\sqrt{3}/2)$. Hallar la $Comp_C A$.

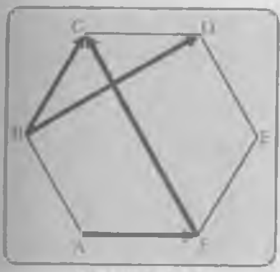


FIGURA 1.90

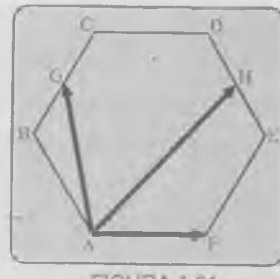


FIGURA 1.91

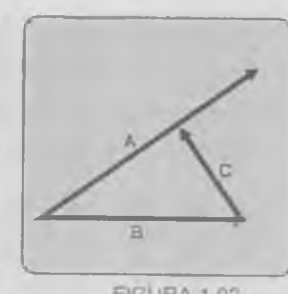


FIGURA 1.92

30. En el paralelogramo ABCD de la Figura 1.93 , m (∢BAD) = 60º , $\|AB\| = a$, $\|\overline{AD}\| = 2a$, donde $a \in R - \{0\}$. Si $p = \|Proy_{AD}\overline{AC}\|$ y $q = \|Proy_{AB}\overline{AC}\|$, hallar p + q.

31. Sea ABCD un rectángulo (Figura 1.94) tal que $2\overline{AB} = \overline{AD}$ y $\|\overline{AB}\| = a$; sean E y F puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ respectivamente. Si **V** = $\overline{AE} + \overline{AC} + \overline{AF}$, hallar el valor de : $Comp_{\overline{AB}}V + Comp_{\overline{AD}}2V$.

32. En el rectángulo de la Figura 1.95 , H , P y Q son puntos medio. $\overline{AB} = 4\,\overline{FB}$, $\overline{OC} = 4a$, $\overline{OA} = a$. Si V = $\overline{HF} + \overline{AP} + \overline{QC}$, hallar $Comp_{\overline{AB}}V + Comp_{\overline{CB}}V$.

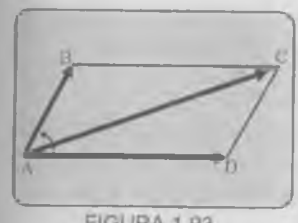


FIGURA 1.93

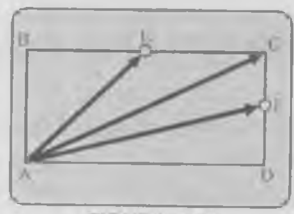


FIGURA 1.94

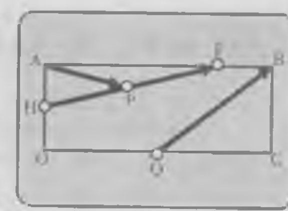


FIGURA 1.95

33. Sabiendo que $Proy_A\langle a , b\rangle = \langle 1 , 2\rangle$ y $Proy_A\langle x , y\rangle = \langle -4 , -8\rangle$, hallar la norma de $Proy_A\langle 4a - x , 4b - y\rangle$.

34. Los lados de un triángulo son los vectores **A** , **B** y **A** + **B**. Si $\|A\| = 8$, $\|B\| = 6$ y $\|A + B\| = \sqrt{68}$, hallar : $Comp_A(A + B) - 3\,Comp_B(A - B)$.

35. Hallar el vector **A** cuya norma es $3\sqrt{5}$, sabiendo que **B** = ⟨-4 , 3⟩ , $Proy_{A^\perp}B = \langle -2 , 4\rangle$ y $Comp_A B > 0$.

36. En la Figura 1.96 el ΔABC es equilátero y $\overline{CH}$ es altura. Si $\overline{CH} = \langle 2 , 4\rangle$ y **V** = $\langle\sqrt{3} , 1\rangle$, hallar la $Comp_V\overline{CA}$.

37. En el exágono regular de lado 8 unidades mostrada en la Figura 1.97 , hallar la

proyección ortogonal de

a) $\overline{MN}$ sobre $\overline{MB} + \overline{BD}$ b) $V = \overline{AC} + \overline{BD} - \overline{CN}$ sobre $\overline{MB}$

38. En el trapecio PQRS de la Figura 1.98 se tiene : $||\overline{RQ}|| = ||\overline{SP}||$, S(-4 , 2) , Q(10 , 4) , $\overline{PS} \cdot \overline{PR} = 0$ y $Proy_{\overline{QP}}\overline{PR} = \langle 8 , 8\rangle$. Hallar los puntos A , P y R.

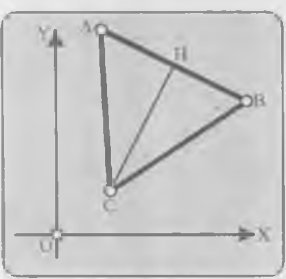


FIGURA 1.96

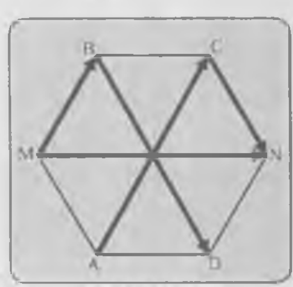


FIGURA 1.97

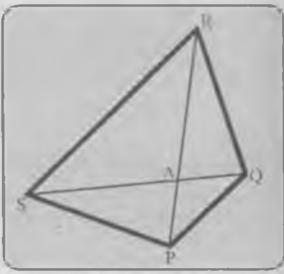


FIGURA 1.98

39. Los vértices de un rectángulo ABCD son A(-2 , -6) , C(2 , 6), D(-6 , -2) y B. Los puntos $M \in \overline{DC}$, $N \in \overline{AB}$, $R \in \overline{BC}$, además $Proy_{\overline{NM}}\overline{AD} = m\langle 1 , -3\rangle$ y $\overline{NM} + \overline{NR} = \langle 4 , 14\rangle$. a) Hallar el vértice B. b) Hallar los puntos M , N y R.

1.12 AREA DEL PARALELOGRAMO Y DEL TRIANGULO

Haciendo uso de la proyección ortogonal de un vector sobre otro, estamos en condiciones de hacer otra interpretación geométrica del producto escalar. Para tal efecto consideremos el paralelogramo de lados **A** y **B** (Figura 1.99) . Llamemos $||\mathbf{C}||$ a la altura que se obtiene mediante la proyección ortogonal de **A** sobre $\mathbf{B}^\perp$, de modo que :

$$||\mathbf{C}|| = ||Proy_{\mathbf{B}^\perp}\mathbf{A}|| = |\,Comp_{\mathbf{B}^\perp}\mathbf{A}\,|$$

$$\Rightarrow ||\mathbf{C}|| = \left|\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^\perp}{||\mathbf{B}^\perp||}\right|$$

Dado que el área del paralelogramo es igual al producto de su base por su altura , entonces

$$S = ||\mathbf{B}||\,||\mathbf{C}|| = ||\mathbf{B}||\,\frac{|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^\perp|}{||\mathbf{B}^\perp||}$$

Pero como $||\mathbf{B}|| = ||\mathbf{B}^\perp|| \Rightarrow S = |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^\perp|$

Así hemos demostrado el siguiente teorema

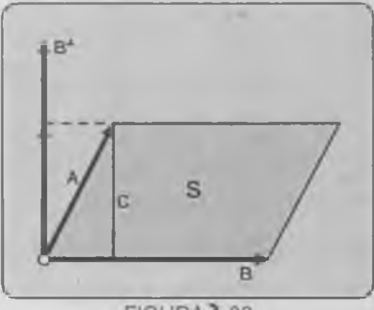


FIGURA 1.99

TEOREMA 1.12 *Area del paralelogramo y del triángulo*

El área S de un paralelogramo , cuyos lados son los vectores **A** y **B** , es igual al producto escalar de uno de ellos por el ortogonal del otro. Esto es :

$$S = |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^\perp| = |\mathbf{A}^\perp \cdot \mathbf{B}| \quad (26)$$

En particular , el área del triángulo S_t , cuyos lados consecutivos son los vectores **A** y **B** está dado por :

$$S_t = \frac{1}{2}|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^\perp| = \frac{1}{2}|\mathbf{A}^\perp \cdot \mathbf{B}| \quad (27)$$

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Sean P(-3 , 1) , Q(7 , -1) y R(5 , 3) tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Hallar su área.

Solución. Consideremos el vértice Q como punto inicial de los vectores **A** y **B**.

Luego, si $\mathbf{A} = \overrightarrow{QP} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{P} - \mathbf{Q} = \langle -3 , 1\rangle - \langle 7 , -1\rangle = \langle -10 , 2\rangle$

$\mathbf{B} = \overrightarrow{QR} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{R} - \mathbf{Q} = \langle 5 , 3\rangle - \langle 7 , -1\rangle = \langle -2 , 4\rangle$

Por lo que, si $S = |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^\perp| \Rightarrow S = |\langle -10 , 2\rangle \cdot \langle -4 , -2\rangle| = |40 - 4| = 36\ u^2$ ■

Ejemplo 2 Hallar el área del paralelogramo sabiendo que sus diagonales están contenidos en los vectores $\mathbf{U} = \langle 3 , 3\rangle$ y $\mathbf{V} = \langle 5 , -1\rangle$.

Solución. Sea el paralelogramo PQRT mostrado en la Figura 1.100

En el ΔPTQ : $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{V}$ (1)

En el ΔPQR : $\mathbf{B} + \mathbf{A} = \mathbf{U}$ (2)

De (1) y (2) obtenemos :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{U} - \mathbf{V}) , \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{V})$$

Luego , $\mathbf{A} = \langle -1 , 2\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 4 , 1\rangle \Rightarrow \mathbf{B}^\perp = \langle -1 , 4\rangle$

$\therefore S = |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^\perp| = |\langle -1 , 2\rangle \cdot \langle -1 , 4\rangle| = 9\ u^2$ ■

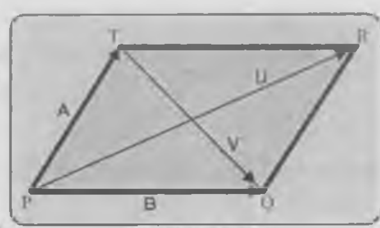


FIGURA 1.100

Ejemplo 3 Se dan los puntos A(3 , -2) , B(-3 , 2) y C(2 , 7). Si P divide al segmento $\overline{BC}$ en la razón $\overline{BP} : \overline{PC} = 2 : 3$; hallar el área del triángulo APC.

Solución. Sea P(x , y). Si $3\overline{BP} = 2\overline{PC}$, entonces

$3\langle x+3, y-2\rangle = 2\langle 2-x, 7-y\rangle$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+9 = 4-2x \Rightarrow x=-1 \\ 3y-6 = 14-2y \Rightarrow y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow P(-1, 4)$

Luego , si

$\mathbf{U} = \overrightarrow{AP} \Rightarrow \mathbf{U} = \mathbf{P} - \mathbf{A} = \langle -1, 4\rangle - \langle 3, -2\rangle = \langle -4, 6\rangle$

$\mathbf{V} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{C} - \mathbf{A} = \langle 2, 7\rangle - \langle 3, -2\rangle = \langle -1, 9\rangle$

$\therefore\ S = \frac{1}{2}|\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}^{\perp}| = \frac{1}{2}|\langle -4, 6\rangle \cdot \langle -9, -1\rangle| = 15\ u^2$ ■

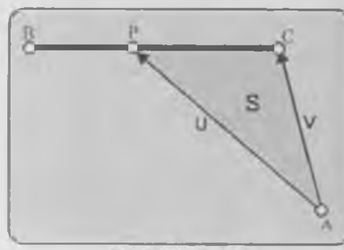


FIGURA 1.101

Ejemplo 4 Los vértices de un triángulo son A(2 , -1), B(4 , 2) y C ∈ $\mathscr{L}$ = {(x,) | y = x - 2}. Si su área es 5 u², hallar la suma de las ordenadas de todos los posibles valores del vértice C.

Solución. Si $C(x, y) \in \mathscr{L} \Rightarrow C(x, x-2)$

Sean : $\mathbf{U} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = \langle 2, 3\rangle$

$\mathbf{V} = \overrightarrow{AC} = \mathbf{C} - \mathbf{A} = \langle x-2, x-1\rangle$

$S = \frac{1}{2}|\mathbf{V}\cdot\mathbf{U}^{\perp}| \Rightarrow 10 = |\langle x-2, x-1\rangle \cdot \langle -3, 2\rangle|$

de donde : $|4-x| = 10 \Leftrightarrow 4-x = 10$ ó $4-x=-10$

$\Leftrightarrow x=-6$ ó $x = 14$

Hay dos soluciones : C(-6 , -8) ó C(14 , 12)

Por tanto , la suma de las ordenadas es :

$y_1 + y_2 = 4$ ■

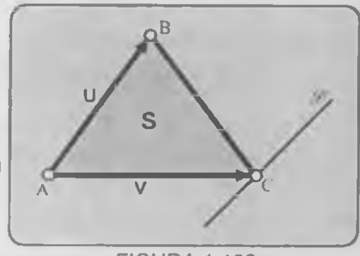


FIGURA 1.102

Ejemplo 5 En la Figura 1.103 : a(ΔOPR) = 10 u², ||**A**|| = 5 y α = 30º. Si **B** = ⟨m , n⟩ , hallar el valor e m + √3 n.

Solución. $\mathbf{A} = ||\mathbf{A}||\ \langle \text{Cos } 30°, \text{Sen } 30°\rangle = \frac{5}{2}\langle\sqrt{3}, 1\rangle$

$\mathbf{B} = ||\mathbf{B}||\ \langle \text{Cos } 60°, \text{Sen } 60°\rangle$

$\Rightarrow \langle m, n\rangle = \sqrt{m^2+n^2}\left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$

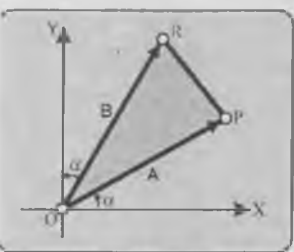


FIGURA 1.103

Igualando las primeras componentes se tiene :

$m = \frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2}$, de donde : $n = \sqrt{3}\,m$ (1)

Si $a(\Delta OPR) = 10 \Rightarrow \frac{1}{2}|\mathbf{A}^{\perp}\cdot\mathbf{B}| = 10 \Rightarrow \frac{5}{4}\langle -1, \sqrt{3}\rangle\cdot\langle m, n\rangle = 10$

$\Rightarrow -m + \sqrt{3}\,n = 8$ (2)

Resolviendo (1) y (2) por simultáneas , obtenemos : $m = 4$ y $n = 4\sqrt{3}$

$\therefore\ m + \sqrt{3}\,n = 4 + \sqrt{3}(4\sqrt{3}) = 16$ ■

Ejemplo 6 En la Figura 1.104, OACB es un paralelogramo. Si $\overrightarrow{OC} = \langle 5, 3\rangle$ y $\overrightarrow{BA} = \langle -1, 5\rangle$, hallar el área del triángulo OAB.

Solución. Sean los vectores : $\mathbf{U} = \overrightarrow{OA}$ y $\mathbf{V} = \overrightarrow{OB}$

En el ΔOBA : $\overrightarrow{BA} = \mathbf{U} - \mathbf{V}$

En el ΔOAC : $\overrightarrow{OC} = \mathbf{U} + \mathbf{V}$

De este sistema de ecuaciones obtenemos

$\mathbf{U} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA})$ y $\mathbf{V} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BA})$

Luego , $\mathbf{U} = \langle 2, 4\rangle$ y $\mathbf{V} = \langle 3, -1\rangle \Rightarrow \mathbf{V}^{\perp} = \langle 1, 3\rangle$

$\therefore\ a(\Delta OAB) = \frac{1}{2}|\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}^{\perp}| = \frac{1}{2}|\langle 2, 4\rangle \cdot \langle 1, 3\rangle| = 7\ u^2$ ■

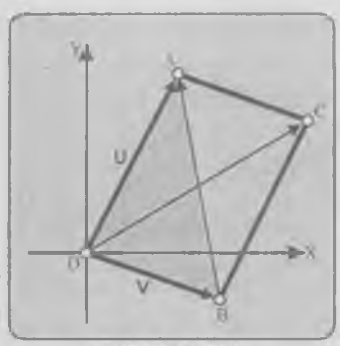


FIGURA 1.104

Ejemplo 7 Hallar el área del polígono de vértices en A(-2 , 3) , B(2 , 7) , C(8 , 2) , D(6 , -2) y E(2 , -5).

Solución. La Figura 1.105 muestra el polígono dividido en tres triángulos de áreas S_1 , S_2 y S_3. Tomando el vértice A como punto inicial de los vectores **R** , **T** , **U** y **V** , se sigue que:

$\mathbf{R} = \overrightarrow{AB} = \langle 2, 7\rangle - \langle -2, 3\rangle = \langle 4, 4\rangle$

$\mathbf{T} = \overrightarrow{AC} = \langle 8, 2\rangle - \langle -2, 3\rangle = \langle 10, -1\rangle$

$\mathbf{U} = \overrightarrow{AD} = \langle 6, -2\rangle - \langle -2, 3\rangle = \langle 8, -5\rangle$

$\mathbf{V} = \overrightarrow{AE} = \langle 2, -5\rangle - \langle -2, 3\rangle = \langle 4, -8\rangle$

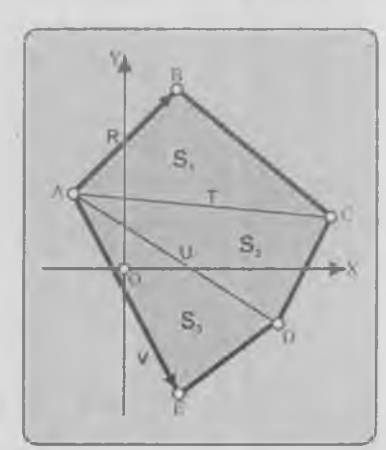


FIGURA 1.105

$$\Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}|\mathbf{R}\cdot\mathbf{T}^{\perp}| = \frac{1}{2}|\langle 4\,,4\rangle\cdot\langle 1\,,10\rangle| = 22\ u^2$$

$$S_2 = \frac{1}{2}|\mathbf{T}\cdot\mathbf{U}^{\perp}| = \frac{1}{2}|\langle 10\,,-1\rangle\cdot\langle 5\,,8\rangle| = 21\ u^2$$

$$S_3 = \frac{1}{2}|\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}^{\perp}| = \frac{1}{2}|\langle 8\,,-5\rangle\cdot\langle 8\,,4\rangle| = 22\ u^2$$

$$\therefore\ S = S_1 + S_2 + S_3 = 65\ u^2$$ ■

Ejemplo 8 La Figura 1.106 es un trapecio isósceles, en donde, $\mathbf{A} = \langle 1\,,3\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 5\,,-1\rangle$. Hallar su área.

Solución. Sean : $\mathbf{C} = \overrightarrow{RE} = \text{Proy}_{\mathbf{A}^{\perp}}\mathbf{B}$, $S_1 = a(\text{QREF})$ y $S_2 = a(\Delta\text{RET})$.

$$\Rightarrow \mathbf{C} = \left(\frac{\mathbf{A}^{\perp}\cdot\mathbf{B}}{||\mathbf{A}^{\perp}||^2}\right)\mathbf{A}^{\perp} = \left(\frac{\langle -3\,,1\rangle\cdot\langle 5\,,-1\rangle}{10}\right)\langle -3\,,1\rangle = \frac{8}{5}\langle 3\,,-1\rangle$$

$$S_1 = |\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}^{\perp}| = \frac{8}{5}|\langle 1\,,3\rangle\cdot\langle 1\,,3\rangle| = 16\ u^2$$

$$S_2 = \frac{1}{2}|\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}^{\perp}| = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{5}\right)|\langle 5\,,-1\rangle\cdot\langle 1\,,3\rangle| = \frac{8}{5}\ u^2$$

$$\therefore\ S = S_1 + 2S_2 = 16 + \frac{16}{5} = 19.2\ u^2$$ ■

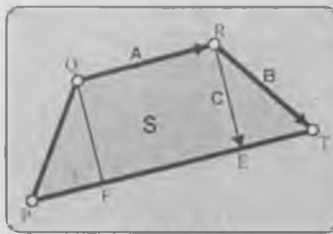


FIGURA 1.106

Ejemplo 9 En la Figura 1.107 se tiene : M(0 , 4) , N(5 , 3) , P(2 , -2) y Q(-3 , -1) son puntos medios de los lados de un trapecio ABCD. Hallar su área sabiendo que $||\overline{AB}|| = 2\sqrt{5}$

Solución. Dado que $\overline{QN}$ es mediana del trapecio, entonces ; $\overline{QN}\,||\,\overline{AB}\,||\,\overline{DC}$

Luego ; $QN = \mathbf{N} - \mathbf{Q} = \langle 5\,,3\rangle - \langle -3\,,-1\rangle = 4\langle 2\,,1\rangle$

Entonces , un vector unitario en la dirección de $\overline{AM}\,|\,\langle 2\,,1\rangle$ es :

$$\boldsymbol{u} = \frac{\overline{AM}}{||\overline{AM}||} \Rightarrow \overline{AM} = ||\overline{AM}||\ \boldsymbol{u}$$

$$\Rightarrow \overline{AM} = \sqrt{5}\left(\frac{\langle 2\,,1\rangle}{\sqrt{5}}\right) = \langle 2\,,1\rangle$$

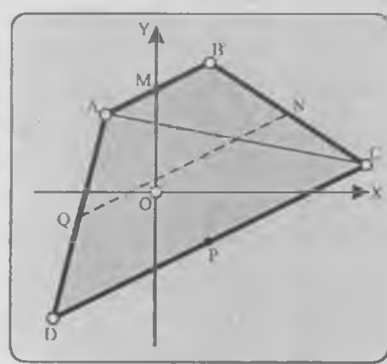


FIGURA 1.107

$$\Rightarrow \mathbf{M} - \mathbf{A} = \langle 2\,,1\rangle \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{M} - \langle 2\,,1\rangle = \langle 0\,,4\rangle - \langle 2\,,1\rangle \Rightarrow \mathbf{A} = \langle -2\,,3\rangle$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{B} = 2\mathbf{M} - \mathbf{A} = 2\langle 0\,,4\rangle - \langle -2\,,3\rangle = \langle 2\,,5\rangle$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \Rightarrow \mathbf{C} = 2\mathbf{N} - \mathbf{B} = 2\langle 5\,,3\rangle - \langle 2\,,5\rangle = \langle 8\,,1\rangle$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}(\mathbf{C}+\mathbf{D}) \Rightarrow \mathbf{D} = 2\mathbf{P} - \mathbf{C} = 2\langle 2\,,-2\rangle - \langle 8\,,1\rangle = \langle -4\,,-5\rangle$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \langle 2\,,5\rangle - \langle -2\,,3\rangle = \langle 4\,,2\rangle\ ;\ \overline{AC} = \langle 8\,,1\rangle - \langle -2\,,3\rangle = \langle 10\,,-2\rangle$$

$$\overline{DA} = \langle -2\,,3\rangle - \langle -4\,,-5\rangle = \langle 2\,,8\rangle$$

Por lo que : $S = a(\Delta ADC) + a(\Delta ABC) = \frac{1}{2}|\overline{DA}\cdot\overline{AC}^{\perp}| + \frac{1}{2}|\overline{AB}\cdot\overline{AC}^{\perp}|$

$$= \frac{1}{2}|\langle 2\,,8\rangle\cdot\langle 2\,,10\rangle| + \frac{1}{2}|\langle 4\,,2\rangle\cdot\langle 2\,,10\rangle| = 56\ u^2$$ ■

Ejemplo 10 Tres vértices consecutivos de un rectángulo ABCD son A(-8 , 4) , B(2 , -2) y C(5 , 3). Si $P \in \overline{AB}$, $Q \in \overline{CD}$, $R \in \overline{AD}$, $\overline{PQ}\,||\,\mathbf{V} = \langle 7\,,6\rangle$ y $\overline{PQ} + \overline{PR} = \langle 5/3\,,31/3\rangle$; hallar el vértice D , los puntos P , Q , R y el área del cuadrilátero PRDQ.

Solución. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{C} + (\mathbf{A} - \mathbf{B})$

$\Rightarrow \mathbf{D} = \langle 5\,,3\rangle + \langle -8\,,4\rangle - \langle 2\,,-2\rangle = \langle -5\,,9\rangle$

Si $\overline{PQ}\,||\,\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{Q} - \mathbf{P} = r\langle 7\,,6\rangle$ (1)

$\overline{AP} = t\overline{BA} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{A} + t\overline{BA}$

$\Rightarrow \mathbf{P} = \langle -8\,,4\rangle + t\langle -5\,,3\rangle$ (2)

$\overline{DQ} = s\overline{CD} \Rightarrow \mathbf{Q} = \mathbf{D} + s\overline{CD}$

$\Rightarrow \mathbf{Q} = \langle -5\,,9\rangle + s\langle -5\,,3\rangle$ (3)

Restando (3) - (2) obtenemos :

$\mathbf{Q} - \mathbf{P} = \langle 3\,,5\rangle + (s - t)\langle -5\,,3\rangle$

Luego , en (1) :

$r\langle 7\,,6\rangle = \langle 3\,,5\rangle + (s - t)\langle -5\,,3\rangle$

$\Leftrightarrow r\langle 7\,,6\rangle + (s - t)\langle 5\,,-3\rangle = \langle 3\,,5\rangle$

Multiplicando escalarmente por $\langle 5\,,-3\rangle^{\perp}$ y luego por $\langle 7\,,6\rangle^{\perp}$ obtenemos respectivamente

FIGURA 1.108

$$r = 2/3 \text{ y } s - t = -1/3 \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{2}{3}\langle 7\,,6\rangle$$

Dado que : $\overline{PQ} + \overline{PR} = \langle 5/3\,,31/3\rangle \Rightarrow \overline{PR} = \langle 5/3\,,31/3\rangle - \langle 14/3\,,4\rangle = \langle -3\,,19/3\rangle$

$\Rightarrow \mathbf{R} - \mathbf{P} = \langle -3\,,19/3\rangle$ (4)

Además , $\overline{AR} = k\,\overline{AD} \Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{A} + k\,\overline{AD} = \langle -8 , 4\rangle + k\langle 3 , 5\rangle$ (5)

Restando (5) - (2) se tiene : $\mathbf{R} - \mathbf{P} = k\langle 3 , 5\rangle - t\langle -5 , 3\rangle$

$\Rightarrow \langle -3 , 19/3\rangle = k\langle 3 , 5\rangle - t\langle -5 , 3\rangle$

de donde obtenemos : $k = 2/3$ y $t = -1$, luego , $s = -1 - 1/3 = -4/3$

Por lo tanto : $\mathbf{P} = \langle -8 , 4\rangle - 1\langle -5 , 3\rangle = \langle -3 , 1\rangle$; $\mathbf{Q} = \langle -5 , 9\rangle - \frac{4}{3}\langle -5 , 3\rangle = \langle 5/3 , 5\rangle$

$\mathbf{R} = \langle -8 , 4\rangle + \frac{2}{3}\langle 3 , 5\rangle = \langle -6 , 22/3\rangle$

Area del cuadrilátero : $a(PRDQ) = a(\Delta PRD) + a(\Delta PQD)$

$$\Rightarrow a(PRDQ) = \frac{1}{2}\left|\,\overline{PR}\cdot\overline{PD}^{\perp}\right| + \frac{1}{2}\left|\overline{PQ}\cdot\overline{PD}^{\perp}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\langle -3 , \tfrac{19}{3}\rangle\cdot\langle -8 , -2\rangle\right| + \frac{1}{2}\left|\langle \tfrac{14}{3} , 4\rangle\cdot\langle -8 , -2\rangle\right| = \frac{85}{3}\,u^2$$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 11*

En los ejercicios 1 al 4 , hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos dados.

1. A(-5 , 0) , B(1 , 3) , C(-3 , -2)
2. A(-3, 4) , B(6 , 2) , C(4 , -3)
3. A(2 , -3) , B(4 , 2) , C(-5 , -2)
4. A(-1 , 2) , B(3 , 5) , C(5 , 1)

En los ejercicios 5 al 8 se dan tres vértices consecutivos de un paralelogramo, hallar las coordenadas del cuarto vértice y el área de cada paralelogramo.

5. A(4 , -5) , B(-2 , 3) , C(-3 , 1)
6. A(-1 , -2) , B(0 , 1) , C(-3 , 2)
7. A(-1 , -5) , B(2 , 1) , C(1 , 5)
8. A(2 , 4) , B(6 , 2) , C(8 , 6)

En los ejercicios 9 al 12, hallar el área del paralelogramo cuyas diagonales son los vectores dados.

9. **U** = ⟨-2 , 3⟩ , **V** = ⟨6 , -1⟩
10. **U** = ⟨5 , -4⟩ , **V** = ⟨-1 , -8⟩
11. **U** = ⟨11 , -1⟩ , **V** = ⟨-2 , 4⟩
12. **U** = ⟨1 , 10⟩ , **V** = ⟨5 , -2⟩

En los ejercicios 13 al 15, hallar el área de los polígonos cuyas coordenadas de sus vértices se dan.

13. A(2 , 5) , B(7 , 1) , C(3 , -4) y D(-2 , 3)
14. A(1 , 5) , B(-2 , 4) , C(-3 , -1) , D(2 , -3) y E(5 , 1)
15. A(-5 , -2) , B(-2 , 5) , C(2 , 7) , D(5 , 1) y E(2 , -4)
16. Sean los puntos A(3 , 5) , B(k , 2) y C(5 , 1). Hallar los valores de k tales que dichos puntos son vértices de un triángulo de área 11u²

17. Dados los puntos A(2 , -1) , B(-2 , 3) y C(4 , 6). Si P(x , y) divide al segmento $\overline{BC}$ en la razón $\overline{BP} : \overline{PC} = -2 : 5$, hallar el área del triángulo PAB.
18. Dados los puntos A(-3 , -5) , B(3 , 1) y C(2 , 5). Si P(x , y) es el punto de trisección, más cercano de A, del segmento $\overline{AB}$, calcular el área del triángulo PCB.
19. Los vértices de un triángulo son A(3 , -5) , B(2 , 5) y C ∈ $\mathscr{L} = \{(x , y) \mid y = -2x\}$. Si su área es de 3.5 u² , hallar las coordenadas del vértice C.
20. Los vértices de un triángulo son A(x , y) , B(4 , 3) y C(-2 , 6). Si el área del triángulo es 9 u² y A ∈ $\mathscr{L} = \{(x , y) \mid x - 2y = 4\}$, hallar el vértice A.
21. En la Figura 1.109 , OABC es un paralelogramo. Si $\overline{OB} = \langle 1 , 6\rangle$ y $\overline{AC} = \langle 9 , -2\rangle$, hallar el área del triángulo ABC.
22. En la Figura 1.110 , $a(\Delta OPT) = 15\,u^2$ y $\|\mathbf{A}\| = 10$. Si $\mathbf{B} = \langle m , n\rangle$, hallar el valor de 3m + n.
23. En la Figura 1.111 , $a(\Delta OPT) = 12\,u^2$, $\|\mathbf{B}\| = 2\sqrt{2}$. Si $Proy_{\mathbf{B}^{\perp}}\mathbf{A} = \langle x , y\rangle$, hallar el valor de xy.

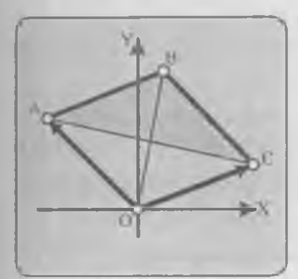


FIGURA 1.109

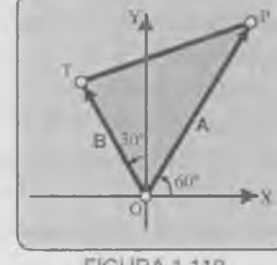


FIGURA 1.110

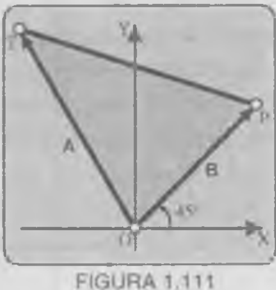


FIGURA 1.111

24. Sea **V** = ⟨-8 , 8⟩ un vector con punto inicial A(13 , 7) y punto terminal B. Si P es un punto situado por encima de la flecha que representa al vector **V**, tal que el ΔAPB es isósceles de área 8 u² , hallar los puntos P y B.
25. Sea el cuadrilátero ABCD de área 57/2 u² . Si A(-1 , 4) , B(2 , 3) y C(4 , -2) ; hallar D sabiendo que este punto está en el eje X.
26. Sea el trapecio ABCD de la Figura 1.112, donde M(11/2 , 7/2) , N(8 , 6) , P(9/2 , 13/2) y Q(2 , 4) son los puntos medios de los lados correspondientes. Si $\|\overline{DC}\| = \sqrt{10}$, hallar $Proy_{\overline{AC}}\overline{PN}$ y el área del trapecio ABCD.

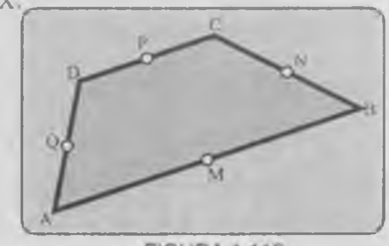


FIGURA 1.112

1.13 DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

Definición 1.13 *Vectores linealmente dependientes*

Se dice que dos vectores **A** y **B** $\in \mathbb{R}^2$ son *linealmente dependientes* (L. D.) si el vector nulo **O** puede expresarse como combinación lineal de estos vectores , esto es ,

$$s\mathbf{A} + t\mathbf{B} = \mathbf{O}$$

donde por lo menos un coeficiente es diferente de cero. Simbólicamente

$$\mathbf{A} \text{ y } \mathbf{B} \text{ son L. D.} \Leftrightarrow \exists\, s, t \in \mathbb{R} \mid s\mathbf{A} + t\mathbf{B} = \mathbf{O}, \text{ con } s \neq 0 \text{ ó } t \neq 0$$

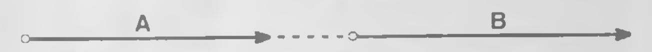
Por ejemplo , los vectores **A** = $\langle -1 , 3\rangle$ y **B** = $\langle 2 , -6\rangle$ son linealmente dependientes , pues si tomamos $s = 2$ y $t = 1$ $(s \neq 0$ y $t \neq 0)$, entonces

$$2\langle -1 , 3\rangle + 1\langle 2 , -6\rangle = \langle 0 , 0\rangle$$

El vector nulo **O** con cualquier otro vector **B** son siempre linealmente dependientes, pues si $s = 3$, $(s \neq 0)$ y $t = 0$, entonces : $3\mathbf{O} + 0\mathbf{B} = \mathbf{O}$

Obsérvese que **A** y **B** son vectores paralelos y como sabemos, el vector cero **O** es paralelo a cualquier vector. Esto nos permite caracterizar a dos vectores linealmente dependientes mediante otra definición.

Se dice que dos vectores **A** y **B** $\in \mathbb{R}^2$ son *linealmente dependientes* si uno de ellos es múltiplo escalar del otro ; es decir , si **A** = r**B** ó **B** = r**A** para un escalar r. En consecuencia , **A** y **B** son L. D. precisamente cuando **A** y **B** son colineales.



TEOREMA 1.3 Dos vectores **A** y **B** $\in \mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes si y sólo si son paralelos.

Demostración.

($\Rightarrow$) Demostraremos primero si **A** y **B** son L. D. , entonces **A** y **B** son paralelos.

En efecto , si **A** y **B** son L. D. $\Rightarrow \exists\, s, t \in \mathbb{R} \mid s\mathbf{A} + t\mathbf{B} = \mathbf{O}$, con $s \neq 0$ ó $t \neq 0$

Supongamos que $s \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A} = \left(-\frac{t}{s}\right)\mathbf{B}$, lo cual implica que $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$

Si $t \neq 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \left(-\frac{s}{t}\right)\mathbf{A}$, lo que nos dice que $\mathbf{B} \parallel \mathbf{A}$

($\Leftarrow$) Demostraremos ahora que si $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$ entonces **A** y **B** son L. D.

En efecto, si $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B} \Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{R} \mid \mathbf{A} = r\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} - r\mathbf{B} = \mathbf{O}$

$$\Rightarrow \mathbf{A} + (-r)\mathbf{B} = \mathbf{O}$$

Se ha logrado una combinación lineal de **A** y **B** igual a **O** con coeficientes 1 y -r que son diferentes de cero , por lo tanto , **A** y **B** son L. D.

Definición 1.14 *Vectores linealmente independientes*

Dos vectores **A** y **B** $\in \mathbb{R}^2$, se dice que son *linealmente independientes* (L. I.) si toda combinación lineal de **A** y **B** que es igual a **O** implica que sus coeficientes son necesariamente cero. Simbólicamente :

$$\mathbf{A} \text{ y } \mathbf{B} \text{ son L. I.} \Leftrightarrow s\mathbf{A} + t\mathbf{B} = \mathbf{O} \Rightarrow s = t = 0$$

Por ejemplo , los vectores unitarios ortogonales **i** = $\langle 1 , 0\rangle$ y **j** = $\langle 0 , 1\rangle$ son linealmente independientes , pues si

$$s\mathbf{i} + t\mathbf{j} = \mathbf{O} \Rightarrow s\langle 1 , 0\rangle + t\langle 0 , 1\rangle = \langle 0 , 0\rangle$$
$$\langle s , 0\rangle + \langle 0 , t\rangle = \langle 0 , 0\rangle$$
$$\langle s , t\rangle = \langle 0 , 0\rangle \Rightarrow s = 0 \text{ y } t = 0$$

Los vectores **A** = $\langle 2 , 1\rangle$ y **B** = $\langle -1 , 3\rangle$ son también linealmente independientes, pues si

$$s\mathbf{A} + t\mathbf{B} = \mathbf{O} \Rightarrow s\langle 2 , 1\rangle + t\langle -1 , 3\rangle = \langle 0 , 0\rangle$$

$$\langle 2s - t , s + 3t\rangle = \langle 0 , 0\rangle \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2s - t = 0 \\ s + 3t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow s = 0 \text{ y } t = 0$$

Obsérvese que en este caso **A** no es paralelo a **B**. Esto también caracteriza a los vectores linealmente independientes con otra definición.

Se dice que dos vectores **A** y **B** $\in \mathbb{R}^2$ son *linealmente independientes* si y sólo si **A** y **B** no son linealmente dependientes, esto es, cuando los vectores **A** y **B** no son colineales.

TEOREMA 1.4 Dos vectores **A** y **B** son linealmente independientes si y sólo si **A** no es paralelo a **B**.

Demostración.

($\Rightarrow$) Demostraremos primero que si $\mathbf{A} \nparallel \mathbf{B}$ entonces **A** y **B** son L. I.

En efecto , supongamos que $\mathbf{A} \nparallel \mathbf{B}$ y que $s\mathbf{A} + t\mathbf{B} = \mathbf{O}$

Al dividir ambos miembros de esta igualdad entre s ó t , tendremos :

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{t}{s}\right)\mathbf{B} \text{ ó } \mathbf{B} = \left(-\frac{s}{t}\right)\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A} \parallel \mathbf{B} \text{ ó } \mathbf{B} \parallel \mathbf{A}$$

(**A** y **B** son linealmente dependientes) lo que contradice la hipótesis.

Por lo tanto , **A** y **B** son linealmente independientes.

(⇐) Demostraremos que si **A** y **B** son linealmente independientes entonces, $\mathbf{A} \not\parallel \mathbf{B}$
En efecto , supongamos que $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ y $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$ $\Rightarrow \exists\, r \neq 0 \mid \mathbf{A} = r\mathbf{B}$

$$\Rightarrow \mathbf{A} + (-r)\mathbf{B} = \mathbf{O}$$

Se ha logrado una combinación lineal de **A** y **B** igual a **O** con coeficientes 1 y $-r$ que son diferentes de cero , lo cual contradice la Definición 1.14. Esto significa que **A** y **B** son linealmente dependientes , lo que contradice nuevamente la hipótesis. Por lo tanto , $\mathbf{A} \not\parallel \mathbf{B}$.

TEOREMA 1.5 *El teorema de las bases*

Si **A** y **B** son vectores linealmente independientes del plano , entonces **A** y **B** forman una base de los vectores del plano.

Demostración. Sean $\mathbf{A} = \overrightarrow{OQ}$, $\mathbf{B} = \overrightarrow{OR}$ y $\mathbf{C} = \overrightarrow{OP}$

Por hipótesis **A** y **B** son linealmente independientes , entonces $\overline{OQ}$ y $\overline{OR}$ no son colineales. Por el punto P tracemos paralelas a $\overline{OQ}$ y $\overline{OR}$ de modo que intercepten a sus prolongaciones en M y N respectivamente (Figura 1.113). Luego se tiene :

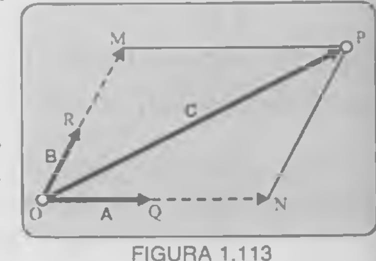


FIGURA 1.113

$$\overrightarrow{ON} = s\,\mathbf{A} \;\text{ y }\; \overrightarrow{OM} = t\,\mathbf{B}$$

Dado que : $\overline{OP} = \overline{ON} + \overline{NP} = \overline{ON} + \overline{OM}$, entonces

$$\mathbf{C} = s\mathbf{A} + t\mathbf{B}$$

lo que nos permite afirmar que **C** se representa como una única combinación lineal de **A** y **B** y genera el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.
En síntesis , dado un par de vectores **A** y **B** en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\mathbf{A} \not\parallel \mathbf{B} \Leftrightarrow \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \text{ es una base del espacio } \mathbb{R}^2$$

La demostración del teorema nos sugiere la siguiente definición.

Definición 1.15 Dos vectores **A** y **B** constituyen una *base* de los vectores del plano si , todo vector **C** del plano se puede expresar de manera única como una combinación lineal de **A** y **B**. Es decir

$$\mathbf{A} \text{ y } \mathbf{B} \text{ generan a } \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall \mathbf{C} \in \mathbb{R}^2, \exists\, s, t \in \mathbb{R} \mid \mathbf{C} = s\mathbf{A} + t\mathbf{B}$$

Los números s y t pueden calcularse multiplicando escalarmente la igualdad por $\mathbf{A}^\perp$ y $\mathbf{B}^\perp$, esto es :

$$\mathbf{A}^\perp \cdot \mathbf{C} = t\,(\mathbf{A}^\perp \cdot \mathbf{B}) \Rightarrow t = \frac{\mathbf{A}^\perp \cdot \mathbf{C}}{\mathbf{A}^\perp \cdot \mathbf{B}}$$

$$\mathbf{B}^\perp \cdot \mathbf{C} = s\,(\mathbf{B}^\perp \cdot \mathbf{A}) \Rightarrow s = \frac{\mathbf{B}^\perp \cdot \mathbf{C}}{\mathbf{B}^\perp \cdot \mathbf{A}}$$

$$\therefore \quad \mathbf{C} = \left(\frac{\mathbf{B}^\perp \cdot \mathbf{C}}{\mathbf{B}^\perp \cdot \mathbf{A}}\right)\mathbf{A} + \left(\frac{\mathbf{A}^\perp \cdot \mathbf{C}}{\mathbf{A}^\perp \cdot \mathbf{B}}\right)\mathbf{B} \qquad (28)$$

OBSERVACIONES 1.9

1. Un vector no nulo se puede expresar no solamente como una combinación lineal de dos vectores ortogonales **A** y $\mathbf{A}^\perp$, sino que $\mathbf{A}^\perp$ se puede reemplazar por cualquier otro vector que cumpla la condición de no ser paralelo a **A**.
2. Los números s y t de la ecuación (28) se denomina *coordenadas* del vector **C** en la base $\beta = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$
3. En la Figura 1.113 podemos observar que el vector : $s\,\mathbf{A} = \left(\frac{\mathbf{B}^\perp \cdot \mathbf{C}}{\mathbf{B}^\perp \cdot \mathbf{A}}\right)\mathbf{A}$

   es la proyección del vector **C** sobre el vector **A** siguiendo la dirección de **B**.

   A esta proyección se le denota por : $\text{Proy}_{(\mathbf{A},\mathbf{B})}\mathbf{C} = \left(\frac{\mathbf{B}^\perp \cdot \mathbf{C}}{\mathbf{B}^\perp \cdot \mathbf{A}}\right)\mathbf{A}$ (29)

   Así mismo, el vector $t\,\mathbf{B} = \left(\frac{\mathbf{A}^\perp \cdot \mathbf{C}}{\mathbf{A}^\perp \cdot \mathbf{B}}\right)\mathbf{B}$ es la proyección de **C** sobre **B** siguiendo la dirección de **A** . y se le denota por : $\text{Proy}_{(\mathbf{B},\mathbf{A})}\mathbf{C} = \left(\frac{\mathbf{A}^\perp \cdot \mathbf{C}}{\mathbf{A}^\perp \cdot \mathbf{B}}\right)\mathbf{B}$ (29a)

   Por lo tanto , en la ecuación (28) se tiene :

$$\mathbf{C} = \text{Proy}_{(\mathbf{A},\mathbf{B})}\mathbf{C} + \text{Proy}_{(\mathbf{B},\mathbf{A})}\mathbf{C} \qquad (30)$$

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Hállese los valores de k para que los vectores $\mathbf{A} = \langle -7 , k + 2 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 1 - 2k , 1 \rangle$ sean linealmente independientes.

Solución. Sabemos que dos vectores **A** y **B** son linealmente dependientes $\Leftrightarrow \mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$, o bien, si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{\perp} = 0$

Luego, si $\langle -7 , k + 2 \rangle \cdot \langle -1 , 1 - 2k \rangle = 0 \Rightarrow 7 + (k + 2)(1 - 2k) = 0$

$\Rightarrow 2k^2 + 3k - 9 = 0 \Leftrightarrow k = -3$ ó $k = 3/2$

Por lo tanto, **A** y **B** son linealmente independientes si y sólo si, $k \neq -3$ ó $k \neq 3/2$, esto es: $k \in \mathbb{R} - \{-3 , 3/2\}$ ■

Ejemplo 2 Sean **A** y **B** vectores linealmente independientes. Para qué valores de k tendremos que $\mathbf{C} = 3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$ y $\mathbf{D} = k\mathbf{A} + 4\mathbf{B}$ son L. I.

Solución. Debemos hallar números s y t, que no sean simultáneamente cero, de modo que si: $s(3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}) + t(k\mathbf{A} + 4\mathbf{B}) = 0 \Leftrightarrow (3s + kt)\mathbf{A} + (4t - 2s)\mathbf{B} = \mathbf{O}$

Según la Definición 1.14, la dependencia lineal de **A** y **B** implica que

$$3s + kt = 0 \quad y \quad 4t - 2s = 0$$

De la segunda ecuación, $s = 2t$, y sustituyendo en la primera ecuación se tiene:

$$6t + kt = 0 \Rightarrow t(6 + k) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ó } k = -6$$

Como s y t no deben ser ambos cero, entonces los vectores **C** y **D** son linealmente independientes si $k = -6$. ■

Ejemplo 3 Sean **A** y **B** vectores linealmente independientes y como tal, susceptibles de formar una base. Demostrar que $\mathbf{C} = 3\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$ y $\mathbf{D} = 2\mathbf{A} - 5\mathbf{B}$ también forman una base.

Demostración. En efecto, comprobaremos que **C** y **D** son linealmente independientes aplicando la Definición 1.14

Si $s\mathbf{C} + t\mathbf{D} = \mathbf{O} \Rightarrow s(3\mathbf{A} + 2\mathbf{B}) + t(2\mathbf{A} - 5\mathbf{B}) = 0$

$\Rightarrow (3s + 2t)\mathbf{A} + (2s - 5t)\mathbf{B} = 0$

Por hipótesis, **A** y **B** son L. I., luego aplicando nuevamente la Definición 1.14 se tiene: $3s + 2t = 0$ y $2s - 5t = 0 \Rightarrow s = 0 , t = 0$

Por lo tanto, **C** y **D** son linealmente independientes. ■

Ejemplo 4 Fijado el vector $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^2$, entonces **C** es expresable en forma única, como la combinación lineal de los siguientes pares de vectores:

a) $\mathbf{A} = \langle 2/3 , 1/5 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle -1 , -3/10 \rangle$ b) $\mathbf{A} = \langle 3/5 , 1 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle -1 , 5/3 \rangle$

Establecer el valor de verdad de cada afirmación.

Solución. Sabemos que $\forall \mathbf{C} \in \mathbb{R}^2, \exists s , t \in \mathbb{R} \mid \mathbf{C} = s\mathbf{A} + t\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A} \nparallel \mathbf{B}$

Luego, bastará comprobar si cada par de vectores dados son paralelos

a) $\mathbf{A} = r\mathbf{B} \Rightarrow \langle 2/3 , 1/5 \rangle = r\langle -1 , -3/10 \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 2/3 = -r \Rightarrow r = -2/3 \\ 1/5 = (-3/10)r \Rightarrow r = -2/3 \end{cases}$

Existe un único $r \in \mathbb{R}$, tal que $\mathbf{A} = r\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$ ∴ La afirmación es falsa.

b) $\mathbf{A} = r\mathbf{B} \Rightarrow \langle 3/5 , 1 \rangle = r\langle -1 , 5/3 \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 3/5 = -r \Rightarrow r = -3/5 \\ 1 = (3/5)r \Rightarrow r = 3/5 \end{cases}$

Luego, $\nexists ! \, r \in \mathbb{R} \mid \mathbf{A} = r\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \nparallel \mathbf{B}$ ∴ La afirmación es verdadera. ■

Ejemplo 5 Expresar el vector $\mathbf{C} = \langle 4 , -5 \rangle$ como combinación lineal de los vectores $\mathbf{A} = \langle -2 , 3 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 3 , -1 \rangle$, luego hallar $\text{Proy}_{(A , B)}\mathbf{C}$ y $\text{Proy}_{(B , A)}\mathbf{C}$ y comprobar la ecuación (30).

Solución. Hallemos las coordenadas (s , t) de **C** según la base {**A** , **B**}.

Aplicando la ecuación (28) se tiene:

$$s = \frac{\mathbf{B}^{\perp} \cdot \mathbf{C}}{\mathbf{B}^{\perp} \cdot \mathbf{A}} = \frac{\langle 1 , 3 \rangle \cdot \langle 4 , -5 \rangle}{\langle 1 , 3 \rangle \cdot \langle -2 , 3 \rangle} = -\frac{11}{7} \quad ; \quad t = \frac{\mathbf{A}^{\perp} \cdot \mathbf{C}}{\mathbf{A}^{\perp} \cdot \mathbf{B}} = \frac{\langle -3 , -2 \rangle \cdot \langle 4 , -5 \rangle}{\langle -3 , -2 \rangle \cdot \langle 3 , -1 \rangle} = \frac{2}{7}$$

$$\therefore \ \mathbf{C} = s\mathbf{A} + t\mathbf{B} = -\frac{11}{7}\langle -2 , 3 \rangle + \frac{2}{7}\langle 3 , -1 \rangle$$

Dado que: $\text{Proy}_{(A , B)}\mathbf{C} = s\mathbf{A} = -\frac{11}{7}\langle -2 , 3 \rangle$ y $\text{Proy}_{(B , A)}\mathbf{C} = t\mathbf{B} = \frac{2}{7}\langle 3 , -1 \rangle$

$$\Rightarrow \ \mathbf{C} = -\frac{11}{7}\langle -2 , 3 \rangle + \frac{2}{7}\langle 3 , -1 \rangle = \langle 4 , -5 \rangle$$ ■

Ejemplo 6 Sean $\{\mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2\}$, $\{\mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbf{A} = 2\mathbf{B}_1 - 3\mathbf{B}_2$. Si $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1 - 2\mathbf{B}_2$, $\mathbf{A}_2 = 3\mathbf{B}_1 + (1/2)\mathbf{B}_2$ y $\mathbf{A} = m\mathbf{A}_1 + n\mathbf{A}_2$, hallar m - n.

Solución. Como (m , n) son las coordenadas de **A** según la base $\{\mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2\}$, hallaremos las coordenadas de $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ según esta misma base, esto es, si:

$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1 - 2\mathbf{B}_2 \Rightarrow \mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1 + 2\mathbf{B}_2$ (1)

$\mathbf{A}_2 = 3(\mathbf{A}_1 + 2\mathbf{B}_2) + \frac{1}{2}\mathbf{B}_2 \Rightarrow \mathbf{B}_2 = -\frac{6}{13}\mathbf{A}_1 + \frac{2}{13}\mathbf{A}_2$ (2)

Sustituyendo (2) en (1) obtenemos: $\mathbf{B}_1 = \frac{1}{13}\mathbf{A}_1 + \frac{4}{13}\mathbf{A}_2$

Ahora, si : $A = 2B_1 - 3B_2 \Rightarrow A = 2\left(\frac{1}{13}A_1 + \frac{4}{13}A_2\right) - 3\left(-\frac{6}{13}A_1 + \frac{2}{13}A_2\right)$

$$\Rightarrow A = \frac{20}{13}A_1 + \frac{2}{13}A_2$$

$$\therefore (m, n) = (20/13, 2/13) \Rightarrow m - n = 18/13$$ ■

Ejemplo 7 Halle las fórmulas del cambio de base, siendo $A_1 = B_1 - B_2$, $A_2 = 3B_1 - 5B_2$, y determine las coordenadas del vector **A** respecto de la base $\beta' = \{B_1, B_2\}$, si respecto de la base $\beta = \{A_1, A_2\}$ son $(2, -1)$.

Solución. Resolviendo el sistema de ecuaciones para B_1 y B_2 obtenemos las fórmulas del cambio de base, esto es :

$$B_1 = \frac{5}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2 \quad , \quad B_2 = \frac{3}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2$$

Si $(2, -1)$ son las coordenadas de **A** respecto de la base $\beta = \{A_1, A_2\}$, entonces

$$A = 2A_1 - A_2$$

Sean (s, t) las coordenadas de **A** respecto de la base $\beta' = \{B_1, B_2\}$

$$\Rightarrow A = sB_1 + tB_2 = s\left(\frac{5}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2\right) + t\left(\frac{3}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2\right)$$

$$\Rightarrow 2A_1 - A_2 = \frac{1}{2}(5s + 3t)A_1 - \frac{1}{2}(s + t)A_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{1}{2}(5s + 3t) \Rightarrow 5s + 3t = 4 \\ -1 = -\frac{1}{2}(s + t) \Rightarrow s + t = 2 \end{cases}$$

De donde obtenemos : $s = -1$ y $t = 3$, luego $(-1, 3)$ son las coordenadas del vector **A** respecto de la base $\beta' = \{B_1, B_2\}$. ■

Ejemplo 8 Los puntos P(-3 , 4) , Q(1 , 2) y S(-5 , -1) son vértices de un paralelogramo PQTS , siendo P y T vértices opuestos.

a) Mostrar que los vectores $U = \overrightarrow{TS}$ y $V = \overrightarrow{QT}$ forman una base de R^2.

b) Expresar el vector $A = \langle 1, 5\rangle$ como combinación de **U** y **V**.

Solución. Sea C el centro del paralelogramo, entonces

$$C = \frac{1}{2}(Q + S) = \frac{1}{2}\langle -4, 1\rangle = \langle -2, 1/2\rangle$$

También $C = \frac{1}{2}(P + T) \Rightarrow T = 2C - P = \langle -4, 1\rangle - \langle -3, 4\rangle = \langle -1, -3\rangle$

a) $U = \overrightarrow{TS} = S - T = \langle -5, -1\rangle - \langle -1, -3\rangle = \langle -4, 2\rangle$

$V = \overrightarrow{QT} = T - Q = \langle -1, -3\rangle - \langle 1, 2\rangle = \langle -2, -5\rangle$

Si **U** y **V** forman una base de R^2, mostraremos que:

i) **U** y **V** son vectores linealmente independientes.

En efecto, según la Definición 1.14

$sU + tV = O \Rightarrow s\langle -4, 2\rangle + t\langle -2, -5\rangle = O$

$\Rightarrow \langle -4s - 2t, 2s - 5t\rangle = O \Leftrightarrow \begin{cases} -4s - 2t = 0 \\ 2s - 5t = 0 \end{cases}$

Resolviendo el sistema obtenemos, $s = t = 0$, por lo que : **U** y **V** son L. I.

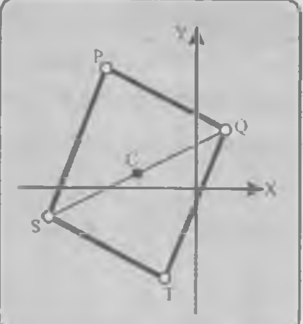


FIGURA 1.114

ii) **U** y **V** generan a R^2

En efecto, sea $C = \langle x, y\rangle$ un vector del plano

$\Rightarrow \exists, t \in R \mid C = sU + tV$

$$\Rightarrow \langle x, y\rangle = s\langle -4, 2\rangle + t\langle -2, -5\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4s - 2t \\ y = 2s - 5t \end{cases} \Rightarrow s = \frac{2y - 5x}{24}, \ t = -\frac{x + 2y}{12}$$

Como $x, y \in R \Rightarrow \exists t, s \in R \mid C = sU + tV$, por lo que **U** y **V** generan a R^2.

En consecuencia, de *i*) y *ii*), se sigue que **U** y **V** forman una base de R^2.

b) Si $A = rU + tV \Rightarrow \langle 1, 5\rangle = r\langle -4, 2\rangle + t\langle -2, -5\rangle$

$$\Rightarrow \langle 1, 5\rangle = \langle -4r - 2t, 2r - 5t\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -4r - 2t \\ 5 = 2r - 5t \end{cases} \Rightarrow r = \frac{5}{24}, t = -\frac{11}{12}$$

$$\therefore A = \frac{5}{24}\langle -4, 2\rangle - \frac{11}{12}\langle -2, -5\rangle$$ ■

Ejemplo 9 El vector $A = \langle -5, 2\rangle$ se descompone en $A_1 \parallel X$ y $A_2 \parallel Y$. El vector $B = \langle 2, 1/2\rangle$ se descompone en $B_1 \parallel X$ y $B_2 \parallel Y$.

Si $X = \langle 2, 1\rangle$ e $Y = \langle -2, -3\rangle$, hallar el valor de $(A_1 + B_2) \cdot (A_2 + B_2)$

Solución. Si $A = mX + nY$

$$\Rightarrow \langle -5, 2\rangle = m\langle 2, 1\rangle + n\langle -2, -3\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = 2m - 2n \\ 2 = m - 3n \end{cases}$$

de donde obtenemos : $m = -19/4$ y $n = -9/4 \Rightarrow A_1 = -\frac{19}{4}\langle 2, 1\rangle$ y $A_2 = -\frac{9}{4}\langle -2, -3\rangle$

Si $B = rX + tY \Rightarrow \langle 2, 1/2\rangle = r\langle 2, 1\rangle + t\langle -2, -3\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2r - 2t \\ 1/2 = r - 3t \end{cases}$

de donde se tiene : $r = 5/4$ y $t = 1/4 \Rightarrow B_1 = \frac{5}{4}\langle 2, 1\rangle$ y $B_2 = \frac{1}{4}\langle -2, -3\rangle$

Por lo tanto : $(A_1 + B_1) \cdot (A_2 + B_2) = \left(-\frac{7}{2}\right)(-2)\langle 2, 1\rangle \cdot \langle -2, -3\rangle = -49$ ■

Ejemplo 10 En la Figura 1.115 se tiene el paralelogramo ABCD. Si P es punto medio de $\vec{CB}$, $\vec{QD} = 7\,\vec{QB}$ y si $\vec{PQ}$ se escribe como una combinación lineal de $\vec{DC}$ y $\vec{AD}$, calcular la suma de los escalares.

Solución. Sean los escalares $s, t \in \mathbb{R}$, tales que:

$$\vec{PQ} = s\,\vec{DC} + t\,\vec{AD} \qquad (1)$$

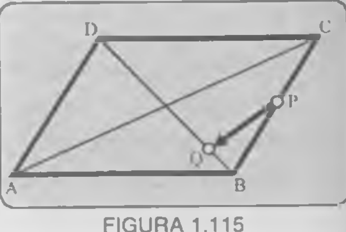


FIGURA 1.115

En el ΔQBP: $\vec{PQ} = \vec{PB} - \vec{QB} = \frac{1}{2}\vec{CB} - \frac{1}{7}\vec{QD}$

$\Rightarrow \vec{PQ} = \frac{1}{2}(-\vec{AD}) - \frac{1}{7}\left(\frac{7}{8}\vec{BD}\right) = -\frac{1}{2}\vec{AD} - \frac{1}{8}\vec{BD}$

$= -\frac{1}{2}\vec{AD} - \frac{1}{8}(-\vec{DB}) = -\frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{8}(\vec{AB} - \vec{AD})$

Como $\vec{AB} = \vec{CD} \Rightarrow \vec{PQ} = \frac{1}{8}\vec{DC} - \frac{5}{8}\vec{AD}$

Según (1): $s\,\vec{DC} + t\,\vec{AD} = \frac{1}{8}\vec{DC} - \frac{5}{8}\vec{AD} \Leftrightarrow \left(s - \frac{1}{8}\right)\vec{DC} + \left(t + \frac{5}{8}\right)\vec{AD} = \mathbf{O}$

Dado que $\vec{DC}$ y $\vec{AD}$ son linealmente independientes, entonces:

$s - 1/8 = 0$ y $t + 5/8 = 0 \Leftrightarrow s = 1/8,\ t = -5/8 \Rightarrow s + t = -1/2$ ■

Ejemplo 11 En el paralelogramo de la Figura 1.116: $\vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{AC}$, $\vec{DF} = \frac{1}{2}\vec{DC}$. Si $\vec{EF} = m\,\vec{AB} + n\,\vec{AD}$, hallar el valor de $m + n$.

Solución. En el cuadrilátero ADFE se tiene:

$\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AD} + \vec{DF}$

$= -\vec{AE} + \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC}$

$= -\frac{1}{4}\vec{AC} + \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB}$

$= -\frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB}$

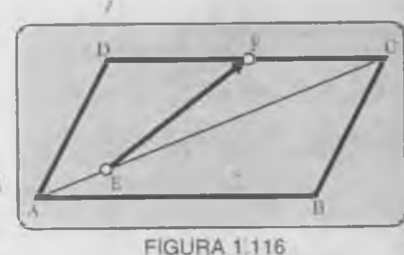


FIGURA 1.116

Pero $\vec{BC} = \vec{AD} \Rightarrow \vec{EF} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}$

$\Rightarrow m\,\vec{AB} + n\,\vec{AD} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}$

$\Rightarrow (m - 1/4)\vec{AB} + (n - 3/4)\vec{AD} = \mathbf{O}$

Como $\vec{AB}$ y $\vec{AD}$ son linealmente independientes $\Rightarrow m - 1/4 = 0$ y $n - 3/4 = 0$

$\therefore\ m + n = 1$ ■

Ejemplo 12 Se tiene el cuadrilátero ABCD. Sabiendo que $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ y F y G son puntos de trisección de $\vec{CD}$ y M es punto medio de $\vec{EF}$. Al expresar $\vec{AM}$ como una combinación lineal de $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ y $\vec{CD}$, hallar la suma de todos los escalares.

Solución. Sean m, n y r los escalares tales que:

$$\vec{AM} = m\,\vec{AB} + n\,\vec{BC} + r\,\vec{CD}$$

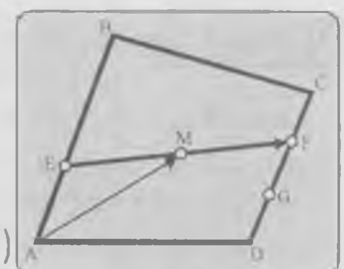


FIGURA 1.117

En el ΔAEM; $\vec{AM} = \vec{AE} + \vec{EM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{EF}$

$= \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{EB} + \vec{BC} + \vec{CF})$

$= \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{AB} + \vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{CD}\right)$

$= \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{6}\vec{CD}$

Luego, si: $m\,\vec{AB} + n\,\vec{BC} + r\,\vec{CD} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{6}\vec{CD}$

$\Rightarrow (m - 2/3)\vec{AB} + (n - 1/2)\vec{BC} + (r - 1/6)\vec{CD} = \mathbf{O}$

Como $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ y $\vec{CD}$ son linealmente independientes, entonces

$m - 2/3 = 0,\ n - 1/2 = 0,\ r - 1/16 = 0 \Leftrightarrow m = 2/3,\ n = 1/2,\ r = 1/6$

$\therefore\ m + n + r = 4/3$ ■

Ejemplo 13 En el paralelogramo de la Figura 1.118, P y Q son puntos medios de $\vec{BC}$ y $\vec{AB}$ respectivamente, $\vec{RD} = 3\,\vec{AR}$. Si $\vec{RC}$ se expresa como una combinación lineal de $\vec{PQ}$ y $\vec{PA}$, hallar el producto de los escalares.

Solución. Sean $m, n \in \mathbb{R}$ los escalares tales que

$$\vec{RC} = m\,\vec{PQ} + n\,\vec{PA}$$

En el ΔRDC se tiene:

$\vec{RC} = \vec{RD} + \vec{DC} = \frac{3}{4}\vec{AD} + \vec{DC} = \frac{3}{4}\vec{BC} + \vec{AB}$

$= \frac{3}{4}(2\,\vec{BP}) + 2\,\vec{AQ} = \frac{3}{2}(\vec{QP} - \vec{QB}) + 2\,\vec{AQ}$

$= \frac{3}{2}(\vec{QP} - \vec{AQ}) + 2\,\vec{AQ} = \frac{3}{2}\vec{QP} + \frac{1}{2}\vec{AQ}$

$= -\frac{3}{2}\vec{PQ} + \frac{1}{2}(\vec{PA} + \vec{PQ}) = -\vec{PQ} + \frac{1}{2}\vec{PA}$

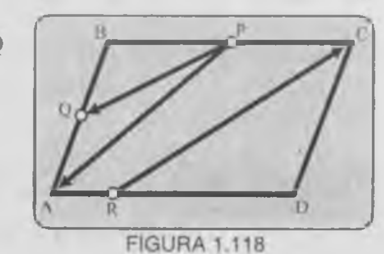


FIGURA 1.118

Luego, si: $m\,\vec{PQ} + n\,\vec{PA} = -\vec{PQ} + \frac{1}{2}\vec{PA}$

$\Rightarrow (m+1)\overline{PQ} + (n - 1/2)\overline{PA} = \mathbf{O}$

Como $\overline{PQ} \not\parallel \overline{PA} \Rightarrow m + 1 = 0$ y $n - 1/2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$, $n = 1/2$

$\therefore\ m\,n = -1/2$ ■

Ejemplo 14 Sea ABCD un paralelogramo , M un punto sobre el lado $\overline{BC}$. Si el área del $\triangle$ABM es igual a la mitad del área del cuadrilátero AMCD y $\overline{AM} = r\,\overline{DC} + t\,\overline{AD}$, hallar el valor de $r + 3t$.

Solución. Si área (AMCD) = 2 área ($\triangle$ABM)

$\Rightarrow$ área (ABCD) = 3 área ($\triangle$ABM)

Luego , $(\overline{BC})\,h = \frac{3}{2}(\overline{BM})\,h \Rightarrow \overline{BM} = \frac{2}{3}\overline{BC}$

En el $\triangle$ABM : $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \overline{DC} + \frac{2}{3}\overline{BC}$

Si $r\,\overline{DC} + t\,\overline{AD} = \overline{DC} + \frac{2}{3}\overline{AD}$

$\Rightarrow (r - 1)\overline{DC} + (t - 2/3)\overline{AD} = \mathbf{O}$

Como $\overline{DC} \not\parallel \overline{AD} \Rightarrow r - 1 = 0$ y $t - 2/3 = 0$

$\Rightarrow r = 1$ y $t = 2/3 \Leftrightarrow r + 3t = 3$ ■

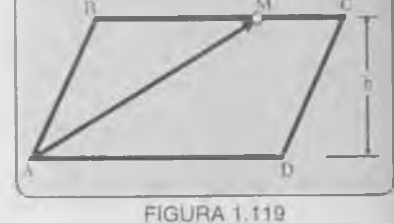
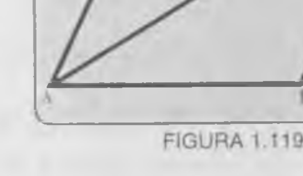



FIGURA 1.119

Ejemplo 15 En el paralelogramo ABCD de la Figura 1.120 se cumple :

$\frac{AE}{ED} = \frac{1}{n-1}$ y $\frac{AP}{AC} = \frac{1}{m}$. Si $\mathbf{M} = m\,\overline{AP} - n\,\overline{AE}$, demostrar que $\mathbf{M} = \overline{AB}$

Demostración. En efecto , en el $\triangle$ABC :

$\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AD}$

$= \overline{AC} - (\overline{AE} + \overline{ED}) = \overline{AC} - \overline{AE} - \overline{ED}$

De las razones dadas :

$\overline{AC} = m\,\overline{AP}$ y $\overline{ED} = (n-1)\overline{AE}$

$\Rightarrow \overline{AB} = m\,\overline{AP} - \overline{AE} - (n-1)\overline{AE} = m\,\overline{AP} - n\,\overline{AE}$

$\therefore\ \mathbf{M} = \overline{AB}$ ■

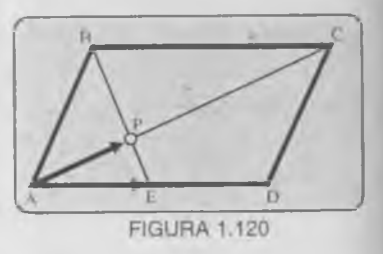


FIGURA 1.120

Ejemplo 16 En la Figura 1.121, el $\triangle$ABC es equilátero. Si $\overline{AB} = n\,\overline{AC} - m\,\overline{HB}$, donde H es el ortocentro , hallar el valor de : $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$

Solución. Si $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC}$ (1)

En el $\triangle$BDC : $\overline{BC} = \overline{DC} - \overline{DB} = \frac{1}{2}\overline{AC} - \overline{DB}$ (2)

Como el $\triangle$ABC es equilátero , el punto H es también su baricentro , por lo que :

$\overline{HB} = \frac{2}{3}\overline{DB} \Rightarrow \overline{DB} = \frac{3}{2}\overline{HB}$

Luego , en (2) : $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{3}{2}\overline{HB}$

Sustituyendo en (1) se tiene :

$\overline{AB} = \overline{AC} - \left(\frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{3}{2}\overline{HB}\right) = \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{3}{2}\overline{HB}$

Si $n\,\overline{AC} - m\,\overline{HB} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{3}{2}\overline{HB} \Leftrightarrow n = \frac{1}{2}$ y $m = -\frac{3}{2}$

$\therefore\ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$ ■

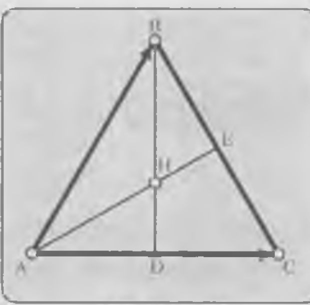


FIGURA 1.121

Ejemplo 17 En la Figura 1.122 , ABCD es un paralelogramo donde M y N son puntos tales que $\overline{DN} = \frac{2}{3}\overline{DC}$ y M es punto medio de $\overline{BC}$.

Hallar los números r y s $\in$ **R** , tales que $\overline{AR} = r\,\overline{AC}$ y $\overline{NR} = s\,\overline{NM}$.

Solución. En el $\triangle$MCN :

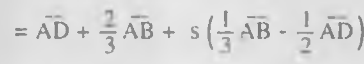
$\overline{NM} = \overline{NC} - \overline{MC} = \frac{1}{3}\overline{DC} - \frac{1}{2}\overline{BC}$

Como $\overline{DC} = \overline{AB}$ y $\overline{BC} = \overline{AD}$

$\Rightarrow \overline{NM} = \frac{1}{3}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AD}$

En el cuadrilátero ADNR se tiene :

$\overline{AR} = \overline{AD} + \overline{DN} + \overline{NR} = \overline{AD} + \frac{2}{3}\overline{DC} + s\,\overline{NM}$



$= \overline{AD} + \frac{2}{3}\overline{AB} + s\left(\frac{1}{3}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AD}\right)$

$= \left(\frac{2}{3} + \frac{s}{3}\right)\overline{AB} + \left(1 - \frac{s}{2}\right)\overline{AD}$ (1)

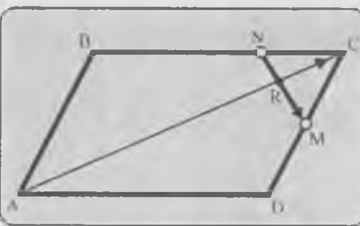


FIGURA 1.122

Ahora , si $\overline{AR} = r\,\overline{AC} \Rightarrow \overline{AR} = r(\overline{AB} + \overline{BC}) = r\,\overline{AB} + r\,\overline{AD}$ (2)

De (1) y (2) se sigue que : $\left(\frac{2}{3} + \frac{s}{3}\right)\overline{AB} + \left(1 - \frac{s}{2}\right)\overline{AD} = r\,\overline{AB} + r\,\overline{AD}$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}+\frac{s}{3}-r\right)\overline{AB} + \left(1-\frac{s}{2}-r\right)\overline{AD} = O$$

Como $\overline{AB} \nparallel \overline{AD} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}+\frac{s}{3}-r=0\right) \wedge \left(1-\frac{s}{2}-r=0\right) \Leftrightarrow r = 4/5\ ,\ s = 2/5$ ■

Ejemplo 18 La Figura 1.123 es una paralelogramo , en el cual M divide al segmento $\overline{BC}$ en la razón 1/3 y N divide a $\overline{AB}$ en la razón 2/3. En que razón divide P a $\overline{DN}$ y $\overline{AM}$.

Solución. Designemos por r y s las razones en que el punto P divide a $\overline{AM}$ y $\overline{DN}$ respectivamente , esto es : $r = \frac{AP}{AM}$ y $s = \frac{DP}{DN}$

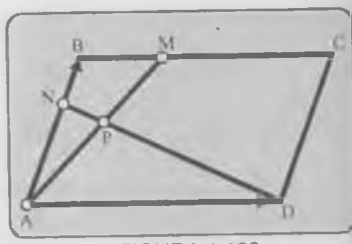


FIGURA 1.123

Los vectores $\overline{AD}$, $\overline{DP}$ y $\overline{PA}$ son L. I. , luego :

$$\overline{AD} + \overline{DP} + \overline{PA} = O \qquad (1)$$

Ahora, el objetivo es expresar $\overline{DP}$ y $\overline{PA}$. en terminos de $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$, dos vectores linealmente independientes.

En el ΔAND : $\overline{AD} = \overline{AN} + \overline{ND} = \overline{AN} - \overline{DN} \Rightarrow \overline{DN} = \overline{AN} - \overline{AD} = \frac{2}{5}\overline{AB} - \overline{AD}$

$$\text{Si } s = \frac{DP}{DN} \Rightarrow \overline{DP} = s\overline{DN} \Rightarrow \overline{DP} = s\left(\frac{2}{5}\overline{AB} - \overline{AD}\right) \qquad (2)$$

En el ΔABM : $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{BC} = \overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AD}$

$$\text{Si } r = \frac{AP}{AM} \Rightarrow \overline{AP} = r\overline{AM} \Rightarrow \overline{PA} = -r\overline{AM} = -r\left(\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AD}\right) \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) se tiene : $\overline{AD} + s\left(\frac{2}{5}\overline{AB} - \overline{AD}\right) - r\left(\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AD}\right) = O$

$$\Rightarrow \left(1 - s - \frac{r}{4}\right)\overline{AD} + \left(\frac{2}{5}s - r\right)\overline{AB} = O$$

Como AD $\nparallel$ AB , se sigue que :

$$\left(1 - s - \frac{r}{4} = 0\right) \wedge \left(\frac{2}{5}s - r = 0\right) \Leftrightarrow r = \frac{4}{11}\ ,\ s = \frac{10}{11}$$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 12*

En los ejercicios 1 al 4 , sean **A** y **B** vectores linealmente independientes. Para qué valores de m tendremos que **C** y **D** son linealmente independientes.

1. **C** = 3 **A** + (m + 3)**B** , **D** = (m - 4)**A** - 4 **B**
2. **C** = **A** - 2 **B** , **D** = 3 **A** + m **B**
3. **C** = (m + 1)**A** + **B** , **D** = 4 **A** + (m + 1)**B**
4. **C** = 2 **A** + (m + 2)**B** , **D** = 3 **A** + (m - 1)**B**
5. Si **A** y **B** forman una base en R^2, demostrar que los vectores **C** = 5 **A** - 2 **B** y **D** = 3 **A** + 4 **B** también forman una base en R^2.
6. Hallar los valores de m para los vectores dados sean L. I.
   a) **A** = ⟨m - 5 , 4⟩ , **B** = ⟨2m , -1⟩ b) **A** = ⟨2 , 2m - 3⟩ , **B** = ⟨1 - m , -5⟩
7. Fijado el vector **C** en R^2 , entonces **C** es expresable y en forma única, como una combinación lineal de los siguientes pares de vectores
   a) **A** = ⟨-5 , 10⟩ , **B** = ⟨3 , -6⟩ c) **A** = ⟨$\sqrt{6}$/2 , -6⟩ , **B** = ⟨-5/4 , 5$\sqrt{6}$/2⟩
   b) **A** = ⟨2 , 4⟩ , **B** = ⟨-1/2 , -1⟩ d) **A** = ⟨3 , -1/2⟩ , **B** = ⟨-12 , -2⟩
   Establecer el valor de verdad de cada afirmación.
8. Dados los vectores: **A** = ⟨1 , 2⟩ , **B** = ⟨-1 , 2⟩ , **C** = ⟨1 , 1⟩ , **D** = ⟨2 , -4⟩ y **E** = ⟨-3 , 6⟩. Cuántas bases de R^2 se pueden obtener con ellos.
9. Hallar las coordenadas del vector **A** = ⟨1 , 2⟩ respecto de la base β = { ⟨2 , -1⟩ , ⟨-1 , 1⟩ }.
10. Halle las coordenadas del vector **A** = ⟨1 , 3⟩ , respecto de la base β = { ⟨-2 , 1⟩ , ⟨1 , 2⟩ }.
11. Sea {**u** , **v**} una base de R^2 . **u** = ⟨1 , 3⟩ , **v** = ⟨-5 , 1⟩. Si **A** = ⟨-2 , 6⟩ y si **A** = r **u** + t **v** , entonces :
    a) $Comp_u$**A** = r b) r + t = 5/2 c) **u** ⊥ $A^{\perp}$
    Establecer el valor de cada afirmación
12. Si **C** = 3**u** + 5**v**. donde {**u** , v} es una base de R^2, **A** = 3**u** - 5**v** , **B** = $\frac{3}{5}$**u** + $\frac{8}{3}$**v** y **C** = r **A** + s **B** , donde {**A** . **B**} es otra base de R^2 ; determinar los valores de r y s.
13. Dados los vectores **A** , **B** y **C** , **A** • $B^{\perp} \neq 0$, sea P = ⟨**C** ; **A** , **B**⟩ el vector que satisface las dos condiciones siguientes :
    a) P(**C** ; **A** , **B**) es paralelo al vector **A**

b) $\text{Proy}_{B^\perp}P(C : A , B) = \text{Proy}_{B^\perp}C$

Demostrar que : $P(C : A , B) + P(C : B , A) = C$

14. Si $\{A , B , C\} \subset \mathbb{R}^2$ son vectores no nulos , se afirma :

a) Si $\{A , B\}$ es base de $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \{\text{Proy}_B A , \text{Proy}_A B\}$ es base de $\mathbb{R}^2$

b) $\{A , B , C\}$ es linealmente dependiente

c) $\{A , B\}$ es base de $\mathbb{R}^2 \Rightarrow A \perp B$

Determinar el valor de verdad de cada afirmación.

15. Halle las fórmulas del cambio de base , siendo $u_1 = 3\,v_1 + v_2$, $u_2 = 4\,v_1 - 3\,v_2$, y determine las coordenadas del vector u respecto de la base $\beta' = \{v_1 , v_2\}$ si respecto de la base $\beta = \{u_1 , u_2\}$ son (3 , -2).

16. En el triángulo ABC de la Figura 1.124 se tiene, $\overline{AM} : \overline{MC} = 3 : 4$. Si $\overline{BM} = r\,\overline{BA} + t\,\overline{BC}$, hallar el valor de r + t.

17. En el triángulo ABC de la Figura 1.125 , las longitudes de los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{DC}$ son 3 y 5 respectivamente. Si $\overline{AD} = m\,\overline{AB} + n\,\overline{AC}$, hallar el valor de m + n.

18. Si M y N son puntos de trisección del lado $\overline{BC}$ del triángulo ABC (Figura 1.126) y $\overline{AN} = m\,\overline{AC} + n\,\overline{AB}$, hallar el valor de $\frac{1}{m} - \frac{1}{n}$.

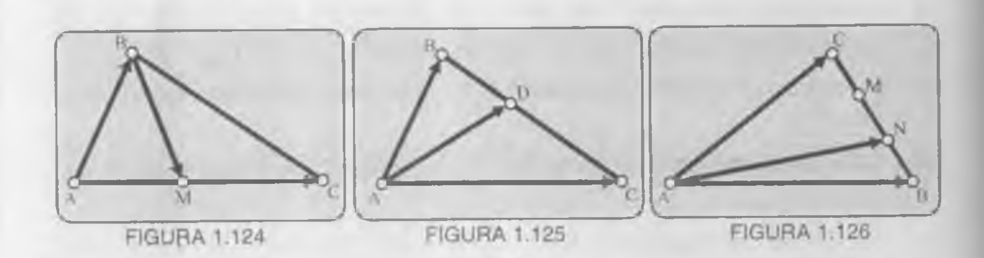


FIGURA 1.124 FIGURA 1.125 FIGURA 1.126

19. En la Figura 1.127 , ABDC es un paralelogramo, P punto medio de $\overline{CD}$, E punto medio de $\overline{BD}$. Si $\overline{CB}$ se expresa como una combinación lineal de $\overline{AP}$ y $\overline{AE}$, hallar el producto de los escalares.

20. En el cuadrilátero de la Figura 1.128 se tiene : E es punto medio de $\overline{AD}$, F y G son puntos de trisección de $\overline{BC}$ y M es punto medio de $\overline{EF}$. Si $\overline{AM} = a\overline{AD} + b\overline{AB} + c\overline{BC}$, hallar el valor de $a + b + 3c$

21. En la Figura 1.129 , ABCD es un paralelogramo , $\overline{PC} = 3\,\overline{BP}$. Si $\overline{BC} = m\,\overline{BG} + n\,\overline{AP}$, hallar el valor de m - n.

FIGURA 1.127

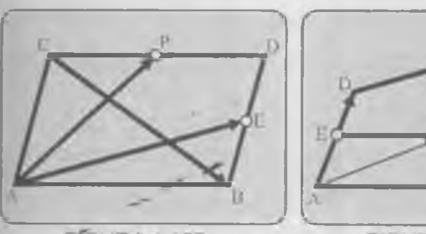


FIGURA 1.128

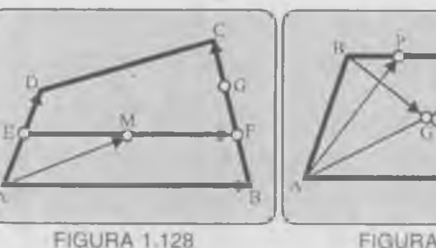


FIGURA 1.129

22. En el paralelogramo ABCD de la Figura 1.130 se tiene : $\overline{BC} = 4\,\overline{BE}$ y F es punto medio de $\overline{AC}$. Si $\overline{EF} = m\,\overline{AC} + n\,\overline{AB}$, hallar el valor de m - n.

23. En la Figura 1.131 , ABCD es un paralelogramo de 220 u^2 de área. Si $\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = \frac{1}{3}$ y $\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \frac{2}{3}$; a) En qué razón divide P a $\overline{DN}$ y $\overline{AM}$

b) Calcular el área del triángulo APD.

24. En el triángulo ABC de la Figura 1.132 se tiene : $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ son medianas y $\overline{PM} \parallel \overline{BA}$. Hallar m y n tales que $\overline{AP} = m\,\overline{PM} + n\,\overline{BC}$.

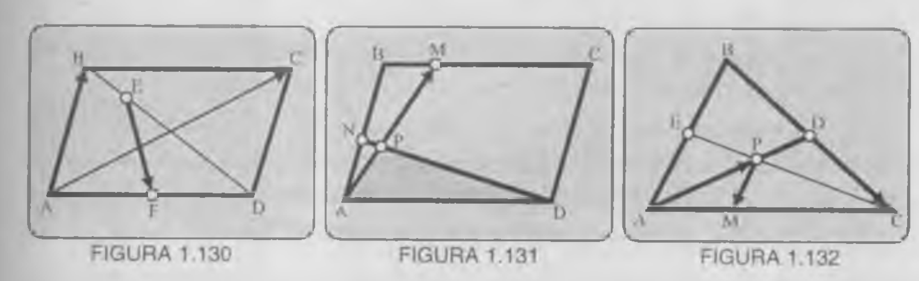


FIGURA 1.130 FIGURA 1.131 FIGURA 1.132

25. En el plano , sea ABCD un cuadrilátero dado y sean M y N puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente , y sean E y F puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Si $\overline{MN} \cap \overline{EF} = \{Q\}$, ($\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ lados opuestos)

a) Demostrar que $\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC} + \overline{QD}$ es el vector nulo

b) Si $\overline{CD} = r\,\overline{ME} + s\,\overline{AF}$, hallar r y s

26. Sean A_1 , A_2 ...., A_n , n puntos de $\mathbb{R}^2$. Si $\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + ... + \overline{OA_n}$ se expresa como combinación de $\overline{OA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ... $\overline{A_{n-1}A_n}$, hallar la suma de los escalares.

27. Sea el paralelogramo ABCD de la Figura 1.133. Si P , Q , R y S son puntos medios de los lados y T es el punto de intersección de $\overline{OB}$ y $\overline{PQ}$, hallar m y n, si $\overline{AT} = m\,\overline{BD} + n\,\overline{OC}$.

28. La Figura 1.134 es un paralelogramo en el cual , E divide al segmento $\overline{AC}$ en la razón 3/2 , F es punto medio de $\overline{BC}$. Expresar $\mathbf{M} = \overline{DE} + \overline{AF}$ como combinación

lineal de $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$.

29. En el triángulo ABC de la Figura 1.135 se tiene que P , M y N son puntos medios de los lados. Hallar m y n si : n $\overrightarrow{NB}$ + n $\overrightarrow{CM}$ = $\overrightarrow{BO}$.

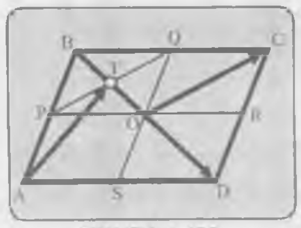


FIGURA 1.133

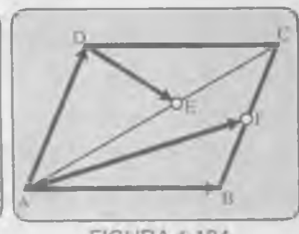


FIGURA 1.134

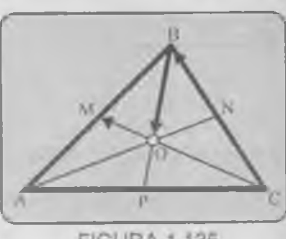


FIGURA 1.135

1.14 LOS VECTORES Y LA GEOMETRIA ELEMENTAL

Las relaciones establecidas para los vectores en $\mathbb{R}^2$ constituyen instrumentos de singular importancia para el tratamiento de ciertos conceptos de la *Geometría Elemental*. Algunas veces una apropiada aplicación de métodos vectoriales facilitará la interpretación y demostración de proposiciones geométricas.

Se debe destacar, sin embargo que a veces es necesario el uso de las coordenadas cartesianas para facilitar las demostraciones. El empleo de un sistema rectangular es arbitrario en lo que se refiere a la orientación y colocación de los ejes coordenados y esta relación no hace perder generalidad al teorema.

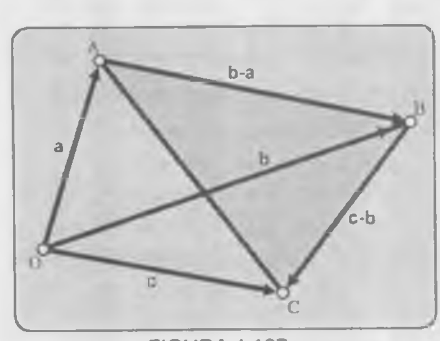


FIGURA 1.137

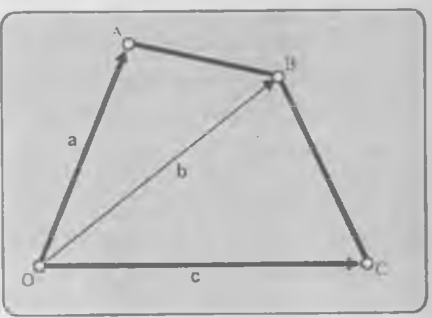


FIGURA 1.136

Es oportuno resaltar que cuando se usan métodos vectoriales para la demostración de teoremas, no es importante ubicar la figura en una determinada posición en el sistema coordenado; sin embargo es recomendable tener en consideración el uso de un vértice cualquiera como origen de los vectores (Figura 1.136), en otros casos, el vector de posición de cada vértice o punto fundamental de cada figura geométrica. Así , en la Figura 1.137 , el vector de posición del vértice A será designado por a (en negrita) , el segmento $\overrightarrow{AB}$ por **b** - **a** , el segmento $\overrightarrow{BC}$ por **c** - **b** , etc.

Los ejemplos siguientes darán una mejor ilustración de lo que se sugiere.

Ejemplo 1 Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente.

Demostración.

Hipótesis. Sea ABCD un paralelogramo
M punto medio de la diagonal $\overline{AC}$
N punto medio de la diagonal $\overline{BD}$

Tesis. Demostraremos que : M = N

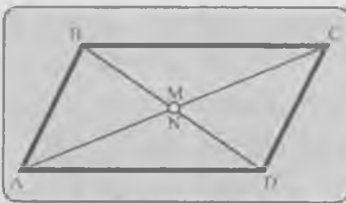


FIGURA 1.138

En efecto , $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC} \Rightarrow \mathbf{m} - \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{a})$

$$\Rightarrow \mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c})$$

Análogamente , $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BD} \Rightarrow \mathbf{n} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d})$

Por ser ABCD un paralelogramo ; $\overline{DC} = \overline{AB} \Rightarrow \mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

Sumando **a** + **d** a ambos miembros de esta igualdad se tiene

$$\mathbf{c} - \mathbf{d} + (\mathbf{a} + \mathbf{d}) = \mathbf{b} - \mathbf{a} + (\mathbf{a} + \mathbf{d}) \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{d} \Rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d})$$

Por lo tanto , **m** = **n** , esto es : M = N ■

Ejemplo 2 Demostrar que el segmento de recta que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado , y su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado.

Demostración.

Hipótesis. Sea el ΔABC , donde M y N son puntos medios de la lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

Tesis. Probaremos que $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ y $\|\overline{MN}\| = \frac{1}{2}\|\overline{AC}\|$

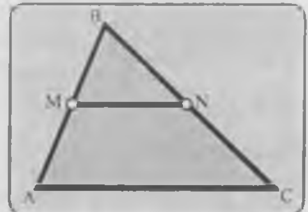


FIGURA 1.139

En efecto, $\overline{AB} = 2\,\overline{AM} \Rightarrow \mathbf{b} - \mathbf{a} = 2(\mathbf{m} - \mathbf{a}) \Leftrightarrow \mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

Análogamente : $\overline{BC} = 2\,\overline{BN} \Rightarrow c - b = 2(n - b) \Leftrightarrow n = \frac{1}{2}(b + c)$

Dado que $\overline{MN} = n - m \Rightarrow \overline{MN} = \frac{1}{2}(b + c) - \frac{1}{2}(a + b)$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(c - a) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Por lo tanto , $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ y $\|\overline{MN}\| = \frac{1}{2}\|\overline{AC}\|$ ■

Ejemplo 3 Demostrar que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.

Demostración.

Hipótesis. ABCD es un cuadrilátero , M , N , T y S son puntos medios de los lados.

Tesis. Probaremos que $\overline{MN} \parallel \overline{ST}$ y $\overline{MS} \parallel \overline{NT}$

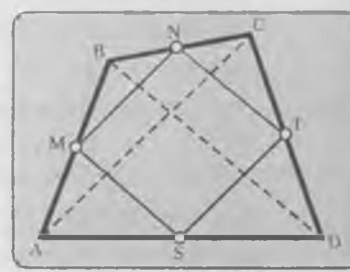


FIGURA 1.140

En efecto, $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} \Rightarrow m = \frac{1}{2}(a + b)$

$$\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BC} \Rightarrow n = \frac{1}{2}(b + c)$$

$\overline{MN} = n - m = \frac{1}{2}(b + c) - \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}(c - a)$

Luego , $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC} \Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{AC}$ (1)

Así mismo : $\overline{AS} = \frac{1}{2}\overline{AD} \Rightarrow s = \frac{1}{2}(a + d)$; $\overline{CT} = \frac{1}{2}\overline{CD} \Rightarrow t = \frac{1}{2}(c + d)$

y como : $\overline{ST} = t - s = \frac{1}{2}(c + d) - \frac{1}{2}(a + d) = \frac{1}{2}(c - a) = \frac{1}{2}\overline{AC} \Rightarrow \overline{ST} \parallel \overline{AC}$ (2)

De (1) y (2) se deduce que : $\overline{MN} \parallel \overline{ST}$ y $\|\overline{MN}\| = \|\overline{ST}\|$

Análogamente se demuestra que : $\overline{MS} \parallel \overline{NT}$ y $\|\overline{MS}\| = \|\overline{NT}\|$

Por lo tanto , el cuadrilátero MNTS es un paralelogramo. ■

Ejemplo 4 Demostrar que en todo trapecio el segmento de recta que une los puntos medios de las diagonales , es igual a la semidiferencia de las bases.

Demostración.

Hipótesis. ABCD es un trapecio , M y N son puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente.

Tesis. Se va a demostrar que : $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} - \overline{BC})$

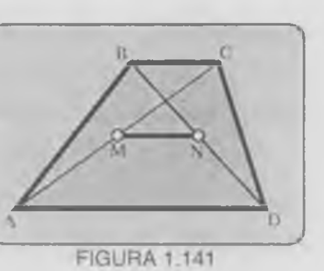


FIGURA 1.141

En efecto , si $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC} \Rightarrow m = \frac{1}{2}(a + c)$

$$\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BD} \Rightarrow n = \frac{1}{2}(b + d)$$

Ahora , $\overline{MN} = n - m \Rightarrow \overline{MN} = \frac{1}{2}(b + d) - \frac{1}{2}(a + c)$

$\Rightarrow \overline{MN} = \frac{1}{2}(d - a) - \frac{1}{2}(c - b) = \frac{1}{2}(\overline{AD}) - \frac{1}{2}(\overline{BC})$

$$\therefore\ MN = \frac{1}{2}(\overline{AD} - \overline{BC})$$ ■

Ejemplo 5 Sean M , N y R los puntos medios de los lados de un ΔABC y sea P un punto exterior al triángulo. Demostrar que :

$\overline{PM} + \overline{PN} + \overline{PR} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$

Demostración.

Hipótesis. Sea el ΔABC , M , N y R puntos medios de sus lados y P un punto exterior. Entonces :

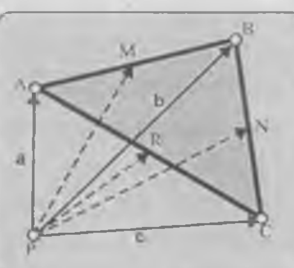


FIGURA 1.142

$$m = \frac{1}{2}(a + b)\ ,\ n = \frac{1}{2}(b + c)\ ,\ r = \frac{1}{2}(a + c)$$

$\overline{PM} + \overline{PN} + \overline{PR} = (m - p) + (n - p) + (r - p)$

$$= \left(\frac{a + b}{2} - p\right) + \left(\frac{b + c}{2} - p\right) + \left(\frac{a + c}{2} - p\right)$$

$$= \frac{1}{2}(a - p + b - p) + \frac{1}{2}(b - p + c - p) + \frac{1}{2}(a - p + c - p)$$

$$= (a - p) + (b - p) + (c - p)$$

$$\therefore\ \overline{PM} + \overline{PN} + \overline{PR} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$$ ■

Demostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

Demostración.

Hipótesis. Sea el rombo ABCD

Tesis. Probaremos que $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

En efecto , en el ΔABC : $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ (1)

y en el ΔBCD : $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} \Rightarrow \overline{BD} = \overline{BC} - \overline{DC}$

Como $\overline{DC} = \overline{AB}$ (lados opuestos de un rombo) , entonces :

$$\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{AB} \qquad (2)$$

Multiplicando escalarmente las ecuaciones (1) y (2) se tiene:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = (\overline{BC} + \overline{AB}) \cdot (\overline{BC} - \overline{AB})$$

$$= \|\overline{BC}\|^2 - \|\overline{AB}\|^2 \text{ ; pero , } \|\overline{BC}\| = \|\overline{AB}\|$$

Por lo tanto , $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0 \Rightarrow \overline{AC} \perp \overline{BD}$ ■

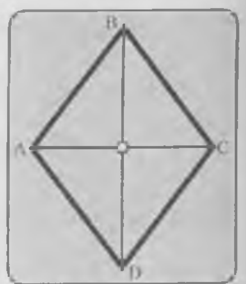


FIGURA 1.143

Ejemplo 7 Demostrar por métodos vectoriales , que un triángulo inscrito en un semicírculo es un triángulo rectángulo.

Demostración.

Hipótesis. Sea el ΔBAC inscrito en el semicírculo de centro O (Figura 1.144)

Tesis. Por demostrar que BAC es un triángulo rectángulo. Bastará probar que $\overline{AB} \perp \overline{AC}$

En efecto , en el ΔAOB : $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}$ (1)

y en el ΔAOC : $\overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC}$,

pero $\overline{OC} = -\overline{OB} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{AO} - \overline{OB}$ (2)

FIGURA 1.144

Multiplicando escalarmente (1) en (2) se tiene :

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (\overline{AO} + \overline{OB}) \cdot (\overline{AO} - \overline{OB})$$

$$= \overline{AO} \cdot \overline{AO} - \overline{AO} \cdot \overline{OB} + \overline{OB} \cdot \overline{AO} - \overline{OB} \cdot \overline{OB}$$

$$= \|\overline{AO}\|^2 - \|\overline{OB}\|^2$$

Pero , $\|\overline{AO}\| = \|\overline{OB}\|$ por ser radios del semicírculo

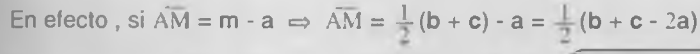
$$\therefore \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{AC}$$ ■

Demostrar que las medianas de un triángulo se cortan en un punto cuya distancia a cada vértice es los dos tercios de la distancia que separa a la mediana de dicho vértice.

Demostración.

Hipótesis. Sean $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CP}$ medianas del ΔABC

Tesis. Probaremos que $\dfrac{AG}{AM} = \dfrac{BG}{BN} = \dfrac{CG}{CP} = \dfrac{2}{3}$


En efecto , si $\overline{AM} = \mathbf{m} - \mathbf{a} \Rightarrow \overline{AM} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c} - 2\mathbf{a})$

$\overline{BN} = \mathbf{n} - \mathbf{b} \Rightarrow \overline{BN} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) - \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c} - 2\mathbf{b})$

$\overline{CP} = \mathbf{p} - \mathbf{c} \Rightarrow \overline{CP} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c})$

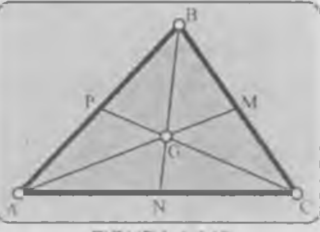


FIGURA 1.145

Sean : $\dfrac{AG}{AM} = r$, $\dfrac{GB}{BN} = s$ y $\dfrac{CG}{CP} = t$, entonces la expresión vectorial que define al baricentro para cada mediana es

$$\overline{AG} = r\,\overline{AM} \Rightarrow \mathbf{g} = \mathbf{a} + r\,\overline{AM} = \mathbf{a} + \frac{r}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c} - 2\mathbf{a}) \qquad (1)$$

$$\overline{BG} = s\,\overline{BN} \Rightarrow \mathbf{g} = \mathbf{b} + s\,\overline{BN} = \mathbf{b} + \frac{s}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c} - 2\mathbf{b}) \qquad (2)$$

$$\overline{CG} = t\,\overline{CP} \Rightarrow \mathbf{g} = \mathbf{c} + t\,\overline{CP} = \mathbf{c} + \frac{t}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}) \qquad (3)$$

Ahora , de (1) = (2) , se sigue que : $\mathbf{a} + \frac{r}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c} - 2\mathbf{a}) = \mathbf{b} + \frac{s}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c} - 2\mathbf{b})$

$$\Rightarrow (2 - 2r - s)\mathbf{a} + (r + 2s - 2)\mathbf{b} + (r - s)\mathbf{c} = \mathbf{O}$$

Como **a** , **b** y **c** son linealmente independientes , entonces :

$$2 - 2r - s = 0 \ , \ r + 2s - 2 = 0 \ , \ r - s = 0$$

de donde obtenemos : $r = s = 2/3$

Análogamente , de (1) = (3) se obtiene : $r = t = 2/3$

Por tanto , las medianas se interceptan en el punto G a 2/3 de $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CP}$. ■

Nota. Si sustituimos los valores de r , s ó t en las ecuaciones (1) , (2) ó (3) , respectivamente, se obtiene la ecuación vectorial que define al baricentro de un triángulo , esto es :

$$\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$$

Ejemplo 9 ABC y A' B' C' son dos triángulos , G y G' son sus baricentros. Demostrar que : $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = 3\,\overline{GG'}$

Demostración. En efecto ,

$$\overline{AA'} = \mathbf{a'} - \mathbf{a}$$
$$\overline{BB'} = \mathbf{b'} - \mathbf{b}$$
$$\overline{CC'} = \mathbf{c'} - \mathbf{c}$$

Sumando se tiene : $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = (\mathbf{a'} + \mathbf{b'} + \mathbf{c'}) - (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$

Por la nota hecha en el ejemplo 8 : $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = 3\mathbf{g'} - 3\mathbf{g}$

$$\therefore \overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = 3(\mathbf{g'} - \mathbf{g}) = 3\,\overline{GG'}$$ ■

Ejemplo 10 Demostrar que en un tetraedro, las líneas que unen los puntos medios de los lados opuestos se bisecan mutuamente.

Demostración.

Hipótesis. Sea el tetraedro OABC y sean $\overline{PQ}$ y $\overline{RT}$ dos líneas que unen los puntos medios de dos lados opuestos.

Tesis. Probaremos que M = N

En efecto, tomando el vértice O como origen, la expresión vectorial que define el punto medio de M de $\overline{PQ}$ es :

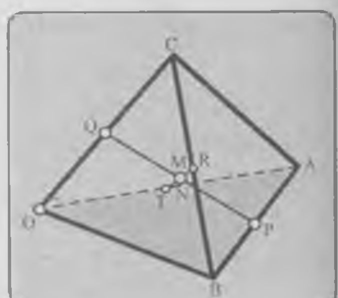


FIGURA 1.146

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\overline{OP} + \overline{OQ}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}) + \frac{1}{2}\overline{OC}\right]$$

$$\Rightarrow \mathbf{m} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}) \qquad (1)$$

Así mismos, para el punto medio N de $\overline{RT}$ se tiene :

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2}(\overline{OR} + \overline{OT}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OC}) + \frac{1}{2}\overline{OA}\right] \Rightarrow \mathbf{n} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}) \qquad (2)$$

De (1) y (2) se sigue que : $\mathbf{m} = \mathbf{n} \Rightarrow M = N$. ■

Ejemplo 11 Demostrar que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

Demostración. Sea el paralelogramo ABCD

Si $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$

$\Rightarrow \|\overline{BD}\| = \|\overline{AD} - \overline{AB}\|$

$\Rightarrow \|\overline{BD}\|^2 = \|\overline{AD}\|^2 + \|\overline{AB}\|^2 - 2\overline{AD}\cdot\overline{AB} \quad (1)$

y si : $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \overline{BC} + \overline{DC}$

$\Rightarrow \|\overline{AC}\|^2 = \|\overline{BC}\|^2 = \|\overline{DC}\|^2 + 2\overline{BC}\cdot\overline{DC} \quad (2)$

FIGURA 1.147

Sumando (1) y (2) se tiene :

$$\|\overline{BD}\|^2 + \|\overline{AC}\|^2 = \|\overline{AD}\|^2 + \|\overline{AB}\|^2 + \|\overline{BC}\|^2 + \|\overline{DC}\|^2 + 2(\overline{BC}\cdot\overline{DC} - \overline{AD}\cdot\overline{AB})$$

Dado que : $\overline{AB} = \overline{DC}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$ (lados opuestos del paralelogramo)

$$\Rightarrow \|\overline{BD}\|^2 + \|\overline{AC}\|^2 = \|\overline{AD}\|^2 + \|\overline{AB}\|^2 + \|\overline{BC}\|^2 + \|\overline{DC}\|^2$$ ■

Ejemplo 12 Demostrar que las tres alturas de un triángulo se interceptan en un punto llamado *ortocentro*.

Demostración. Consideremos el triángulo ABC en el cual trazamos las alturas correspondientes a los vértices A y C los cuales se interceptan en el punto O. Para facilitar los cálculos suponemos que este punto es el origen de coordenadas. Al unir O con el vértice B, la proposición quedará demostrada si probamos que $\overline{OB}$ es perpendicular a $\overline{AC}$.

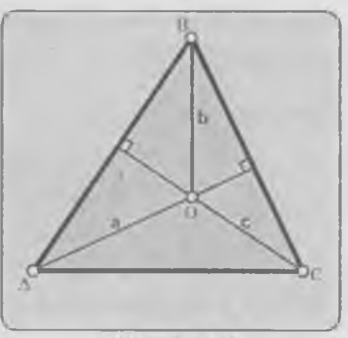


FIGURA 1.148

En efecto, si $\overline{OA} \perp \overline{BC} \Rightarrow \mathbf{a}\cdot(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = 0 \qquad (1)$

$\overline{OC} \perp \overline{AB} \Rightarrow \mathbf{c}\cdot(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0 \qquad (2)$

Ahora, sumando (1) y (2) nos da

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$$

$$\Rightarrow \overline{OB}\cdot\overline{AC} = 0 \Leftrightarrow \overline{OB} \perp \overline{AC}.$$ ■

Ejemplo 13 Demostrar que las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto llamado *excentro*.

Demostración. En el ΔABC trazamos las mediatrices de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, las cuales se interceptan en el punto O. Unimos O con P, punto medio de $\overline{AC}$. Para demostrar la proposición bastará probar que $\overline{OP}$ es perpendicular a $\overline{AC}$.

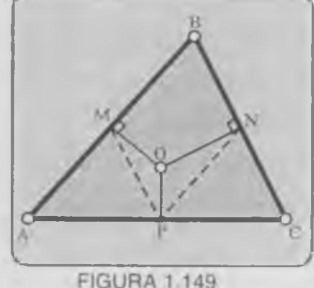


FIGURA 1.149

En efecto, por definición de mediatriz.

$$\overline{ON} \perp \overline{BC} \Rightarrow \overline{ON}\cdot\overline{BC} = 0 \;\text{ y }\; \overline{OM} \perp \overline{AB} \Rightarrow \overline{OM}\cdot\overline{AB} = 0$$

En el ΔOMP : $\overline{OP} = \overline{OM} + \overline{MP}$

$$\Rightarrow \overline{OP}\cdot\overline{AB} = \overline{OM}\cdot\overline{AB} + \overline{MP}\cdot\overline{AB} \Rightarrow \overline{OP}\cdot\overline{AB} = \overline{MP}\cdot\overline{AB} \qquad (1)$$

En el ΔONP : $\overline{OP} = \overline{ON} - \overline{PN}$

$$\Rightarrow \overline{OP}\cdot\overline{BC} = \overline{ON}\cdot\overline{BC} - \overline{PN}\cdot\overline{BC} \Rightarrow \overline{OP}\cdot\overline{BC} = -\overline{PN}\cdot\overline{BC} \qquad (2)$$

La suma de (1) y (2) da : $\overline{OP}\cdot(\overline{AB} + \overline{BC}) = \overline{MP}\cdot\overline{AB} - \overline{PN}\cdot\overline{BC}$

Dado que, $\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ y $\overline{PN} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, (Ejemplo 2), entonces

$$\overline{OP}\cdot\overline{AC} = \frac{1}{2}(\overline{BC}\cdot\overline{AB}) - \frac{1}{2}(\overline{AB}\cdot\overline{BC}) = 0 \Rightarrow \overline{OP} \perp \overline{AC}$$ ■

Ejemplo 14 Si A , B , C y D son vértices de un cuadrilátero , demostrar que

$$\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CB} + \overline{CD} = 4\,\overline{PM}$$

de donde P y M son puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

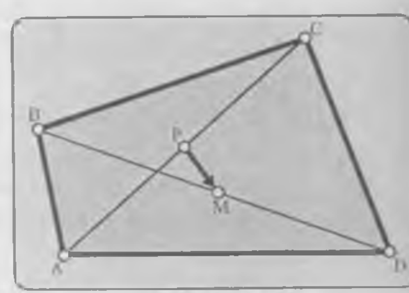


FIGURA 1.150

Demostración. En efecto ,

$$\overline{PM} = \overline{PA} + \overline{AB} + \overline{BM}$$
$$\overline{PM} = \overline{PA} + \overline{AD} + \overline{DM}$$
$$\overline{PM} = \overline{PC} + \overline{CB} + \overline{BM}$$
$$\overline{PM} = \overline{PC} + \overline{CD} + \overline{DM}$$

Sumando ordenadamente estas cuatro igualdades obtenemos :

$$4\overline{PM} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CB} + \overline{CD} + 2(\overline{PA} + \overline{PC}) + 2(\overline{BM} + \overline{DM})$$

Ahora , como : $\overline{PC} = -\overline{PA}$ y $\overline{DM} = -\overline{BM}$, entonces

$$4\overline{PM} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CB} + \overline{CD}$$ ■

Ejemplo 15 Sean los puntos no colineales A , B , C y D. Sea O un punto tal que $\overline{OA} = \mathbf{a}$, $\overline{OB} = \mathbf{b}$, $\overline{OC} = \mathbf{c}$, $\overline{OD} = \mathbf{d}$. Si se verifica que $\mathbf{b} - \mathbf{a} = 2(\mathbf{d} - \mathbf{c})$, demostrar que el punto de intersección de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ es punto de trisección de estos segmentos.

Demostración.

Hipótesis. A , B , C y D son puntos no colineales y $\mathbf{b} - \mathbf{a} = 2(\mathbf{d} - \mathbf{c})$

Tesis. Probaremos que si :

$$r = \frac{PB}{CB} \ \text{ y } \ t = \frac{AP}{AD} \Rightarrow r = t = \frac{2}{3}$$

En efecto , en el ΔAPB : $\overline{PB} = \overline{AB} - \overline{AP} = \overline{AB} - t\,\overline{AD}$

$\Rightarrow \overline{PB} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) - t(\mathbf{d} - \mathbf{a})$

$= 2(\mathbf{d} - \mathbf{c}) - t(\mathbf{d} - \mathbf{a})$ (Hipótesis)

Por el artificio de sumar y restar $t\,\mathbf{c}$ se tiene :

$\overline{PB} = 2(\mathbf{d} - \mathbf{c}) - t(\mathbf{d} - \mathbf{a}) + (t\mathbf{c} - t\mathbf{c})$

$= 2(\mathbf{d} - \mathbf{c}) - t(\mathbf{d} - \mathbf{c}) + t(\mathbf{a} - \mathbf{c})$

$= (2 - t)(\mathbf{d} - \mathbf{c}) + t(\mathbf{a} - \mathbf{c})$ (1)

FIGURA 1.151

Si $\overline{PB} = r\overline{CB} \Rightarrow \overline{PB} = r(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = r\mathbf{b} - r\mathbf{c}$,

de la hipótesis : $\mathbf{b} = \mathbf{a} + 2\mathbf{d} - 2\mathbf{c}$

$\Rightarrow \overline{PB} = r(\mathbf{a} + 2\mathbf{d} - 2\mathbf{c}) - r\mathbf{c} = r(\mathbf{a} - \mathbf{c}) + 2r(\mathbf{d} - \mathbf{c})$ (2)

De (1) y (2) se sigue que : $(2 - t)(\mathbf{d} - \mathbf{c}) + t(\mathbf{a} - \mathbf{c}) = r(\mathbf{a} - \mathbf{c}) + 2r(\mathbf{d} - \mathbf{c})$

$\Rightarrow (2 - t - 2r)(\mathbf{d} - \mathbf{c}) + (t - r)(\mathbf{a} - \mathbf{c}) = \mathbf{O}$

Dado que los vectores $\vec{CD}$ y $\vec{CA}$ son linealmente independientes

$\Rightarrow (2 - t - 2r = 0) \wedge (t - r) = 0$

Resolviendo el sistema obtenemos : $t = r = 2/3$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 13*

1. Demostrar que las diagonales de un rectángulo son de la misma longitud.
2. Demostrar que las diagonales de un cuadrado son perpendiculares.
3. Demostrar que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices del triángulo.
4. Demostrar que las diagonales de un trapecio y la recta que une los puntos medios de los lados paralelos, se cortan en un mismo punto.
5. Demostrar que el segmento de recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las bases , y su longitud es igual a la mitad de la suma de las longitudes de las bases.
6. Demostrar que las medianas de los lados iguales de un triángulo isósceles son de la misma longitud.
7. Demostrar que los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero y los puntos medios de sus diagonales son vértices de un paralelogramo.
8. Demostrar que si las rectas que contienen a dos lados opuestos de un cuadrilátero se interceptan en un punto S , y las rectas que contienen a los otros dos lados del cuadrilátero se interceptan en un punto T , entonces el punto medio del segmento $\overline{ST}$ es colineal con los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero. (Sug. Coloque el origen en uno de los vértices del cuadrilátero).
9. Demostrar que la suma de los cuadrados de las distancias de un punto cualquiera del plano a dos vértices opuestos de un rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las distancias del punto a los otros dos vértices.
10. Demostrar la igualdad vectorial $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR}$, siendo O un punto cualquiera interior al ΔABC y P , Q y R los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, respectivamente.
11. Demostrar que la suma de los cuadrados de los lados de cualquier cuadrilátero excede a la suma de los cuadrados de las diagonales en cuatro veces el cuadrado de la línea que une los puntos medios de las diagonales.

12. Dados los puntos A , B , C , D , E y F ; si P , Q , R y S son los baricentros de los triángulos ABC , ABD , DEF y CEF , demostrar que P , Q , R y S son los vértices de un paralelogramo.
13. Demostrar que las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo se intersecan en un punto llamado *incentro.*
14. Demostrar que la suma de los cuadrados de las longitudes de las tres medianas de cualquier triángulo es 3/4 de la suma de los cuadrados de los tres lados.
15. Si en la Figura 1.152 , ABCD es un paralelogramo , donde M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente , probar que los segmentos $\overline{DM}$ y $\overline{DN}$ trisecan a la diagonal $\overline{AC}$.
16. En la Figura 1.153 , ABCD es un paralelogramo , tal que P , Q , R y S son puntos que dividen a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$, respectivamente , en la razón 2/1. Demostrar que P , Q , R y S son vértices de un paralelogramo.

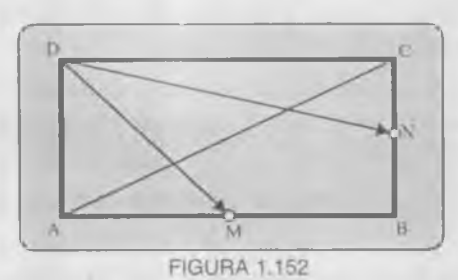


FIGURA 1.152

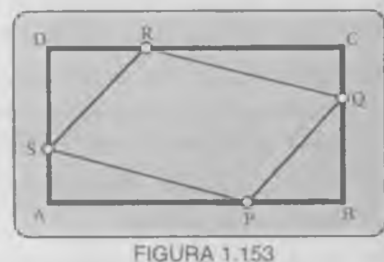


FIGURA 1.153

17. Dado un triángulo cualquiera , demostrar que existe otro triángulo cuyos lados son iguales y paralelos a las medianas de aquel.
18. En el triángulo ABC, sea D el punto medio de BC. Demostrar, usando vectores, que : $||AB||^2 + ||AC||^2 = 2||AD||^2 + \frac{1}{2}||BC||^2$

1.15 LOS VECTORES Y LA FISICA

El empleo de vectores en la Física es frecuente , la fuerza , la aceleración y la velocidad se representan mediante vectores en las que la dirección del vector está dada por la dirección de la cantidad física , en tanto que la magnitud del vector es igual a la magnitud física , en las unidades apropiadas.

Cuando se trabaja con velocidades debemos tener en cuenta que , en un movimiento que es la composición de varios movimientos , el vector de velocidad es la suma vectorial de los vectores de velocidad de cada movimiento.

Otra aplicación se refiere a las fuerza que actúan sobre una partícula en el espacio ; en este caso , a las diversas fuerzas que actúan sobre una partícula se les representa mediante vectores : $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ... , $\mathbf{F}_n$, entonces la segunda ley de Newton , establece que el movimiento de una partícula está descrita por la ecuación vectorial

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots\ldots + \mathbf{F}_n$$

donde m es la masa de la partícula y **a** la aceleración. En esta ecuación la masa m es un escalar , en tanto que la aceleración **a** es un vector.
Si es el caso de que la partícula está en reposo la suma de los vectores de las fuerzas es cero , esto es

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \ldots + \mathbf{F}_n = \mathbf{O}$$

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Un hombre salta desde un automóvil en marcha de manera que si el coche hubiese estado quieto , su velocidad habría tenido magnitud 10 km/h y habría formado un ángulo de 60º con la dirección al frente del automóvil. Si el coche avanza a 30 km/h , con qué velocidad sale el hombre del automóvil.

Solución. Sea $\mathbf{V}_1$, el vector velocidad del coche y $\mathbf{V}_2$, el vector velocidad que le correspondería al hombre si el coche hubiese estado quieto.

Entonces la velocidad real del hombre es :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$$

Luego , $\mathbf{V}_1 = 30\,\langle \text{Cos } 0^\circ , \text{Sen } 0^\circ \rangle = 30\,\langle 1 , 0 \rangle$

$\mathbf{V}_2 = 10\,\langle \text{Cos } 240^\circ , \text{Sen } 240^\circ \rangle = 5\,\langle 1 , -\sqrt{3} \rangle$

Por lo que , $\mathbf{V} = 30\,\langle 1 , 0 \rangle + 5\,\langle 1 , -\sqrt{3} \rangle = 5\,\langle 7 , -\sqrt{3} \rangle$

es el vector velocidad que desea tener y cuya magnitud es

$$||\mathbf{V}|| = 5\sqrt{49 + 3} = 10\sqrt{13} \text{ km/h.}$$

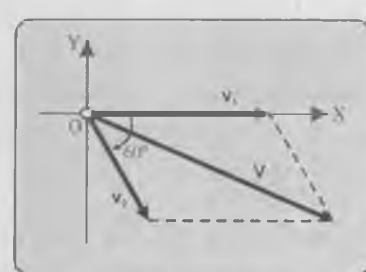


FIGURA 1.154

■

Ejemplo 2 Un aeroplano vuela hacia el noreste con una velocidad de 400 millas/h y el viento hacia el sureste a una velocidad de 100 millas/h. Cuál es la velocidad resultante del aeroplano , con respecto a la tierra , y que curso debe seguir el piloto.

Solución. Representemos por $\mathbf{V}_1$ el vector velocidad dad del aeroplano y por $\mathbf{V}_2$ el vector velocidad del viento.

La velocidad resultante del aeroplano con respecto a la tierra es : $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$

Luego , si $\mathbf{V}_1 = 400\langle \text{Cos } 45°, \text{Sen } 45°\rangle = 200\sqrt{2}\langle 1, 1\rangle$

$\mathbf{V}_2 = 100\langle \text{Cos } 315°, \text{Sen } 315°\rangle = 50\sqrt{2}\langle 1, -1\rangle$

$\Rightarrow \mathbf{V} = 50\sqrt{2}\langle 4+1, 4-1\rangle = 50\sqrt{2}\langle 5, 3\rangle$

La dirección de la velocidad resultante es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{V}}{||\mathbf{V}||} = \frac{\langle 5, 3\rangle}{\sqrt{34}}$$

FIGURA 1.155

esto es , si $\text{Tg } \alpha = \frac{3}{5} = 0.6 \Rightarrow \alpha = 31°$

En consecuencia , el vector velocidad resultante forma un ángulo con la dirección Este de 31°, es decir , su dirección y sentido resultan definidos por : Este 31° Norte , curso que debe seguir el piloto. ■

Ejemplo 3 Una avioneta pequeña vuela a 150 km/h si hay quietud en el aire. Qué curso tendrá que seguir el piloto cuando hay viento de 25 km/h que sopla desde el suroeste , y que tiempo tardará en llegar a su destino situado a 200 km al norte.

Solución. Sea $\mathbf{V}_1$ el vector velocidad de la avioneta y $\mathbf{V}_2$ el vector velocidad del viento . Entonces :

$\mathbf{V}_1 = 150\langle 0, 1\rangle = 25\langle 0, 6\rangle$

$\mathbf{V}_2 = 25\langle \text{Cos } 45°, \text{Sen } 45°\rangle = \frac{25}{2}\langle\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle$

La velocidad resultante de la avioneta es

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \frac{25}{2}\langle\sqrt{2}, 12+\sqrt{2}\rangle$$

y su dirección : $\text{Tg } \alpha = \frac{12+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 9.46 \Rightarrow \alpha = 63° 14'$

Luego , $\beta = 90° - 63° 14' = 6° 46'$

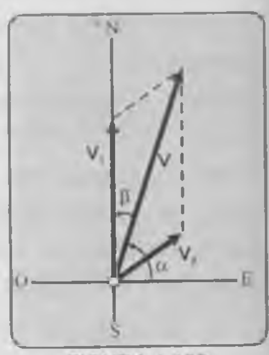


FIGURA 1.156

Por lo tanto , el curso que debe seguir el piloto es : Norte 6° 46' Oeste.

Si $||\mathbf{V}|| = \frac{25}{2}\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (12+\sqrt{2})^2} = 25\sqrt{37+6\sqrt{2}} = 25(6.7)$ km/h , el tiempo que tardará en llegar a su destino es :

$$t = \frac{c}{||\mathbf{V}||} = \frac{200}{25(6.7)} = \frac{8}{6.7} = 1.2 \text{ horas}$$ ■

Ejemplo 4 Un automóvil recorre 3 km hacia el Norte y luego 5 km hacia el Noreste. Representar y hallar el desplazamiento resultante del recorrido.

Solución. En la Figura 1.157 :

$\overrightarrow{AP} = \mathbf{a}$ representa el desplazamiento de 3 km hacia el norte.

$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{b}$ representa el desplazamiento de 5 km hacia el noreste

$\overrightarrow{AQ} = \mathbf{c}$ representa el desplazamiento resultante del recorrido , es decir : $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$

Las componentes de cada vector son :

$\mathbf{a} = 3\langle \text{Cos } 90°, \text{Sen } 90°\rangle = 3\langle 0, 1\rangle = \langle 0, 3\rangle$

$\mathbf{b} = 5\langle \text{Cos } 45°, \text{Sen } 45°\rangle = \frac{5}{2}\langle\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle$

$\mathbf{c} = \langle \frac{5}{2}\sqrt{2}, 3 + \frac{5}{2}\sqrt{2}\rangle = \frac{1}{2}\langle 5\sqrt{2}, 6+5\sqrt{2}\rangle$

FIGURA 1.57

$\Rightarrow ||\mathbf{c}|| = \frac{1}{2}\sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (6+5\sqrt{2})^2} = \sqrt{34+15\sqrt{2}} = 7.43$ km.

La dirección de la resultante está dada por $\text{Tg } \alpha = \frac{6+5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = 1.846 \Rightarrow \alpha = 61° 35'$

Luego , la dirección del vector **c** queda definido por :

Este 61° 35' Norte. ■

Ejemplo 5 A un maratonista que recorre hacia el Sur-Este a 20 km/h , le parece que el viento sopla hacia el Este ; pero a un ciclista que va hacia el Este a 40 km/h , le parece que el viento sopla hacia el Sur. Hallar la componente de la velocidad del viento en la dirección de un vector que señala la trayectoria del maratonista.

Solución. Las representaciones de las velocidades se ilustra en la Figura 1.158 , donde

$\mathbf{V} = \langle x, y \rangle$ es la velocidad del viento

$\mathbf{V}_m$ = Velocidad del maratonista

$\mathbf{V}_c$ = Velocidad del ciclista

Entonces $\mathbf{V}_m = 20\langle \text{Cos } 45°, -\text{Sen } 45° \rangle = \langle 10\sqrt{2}, -10\sqrt{2} \rangle$

$\mathbf{V}_c = 40\langle \text{Cos } 0°, \text{Sen } 0° \rangle = \langle 40, 0 \rangle$

FIGURA 1.158

Ahora, teniendo en cuenta que : $\mathbf{V} = \mathbf{V}_m + \mathbf{V}_{aparente}$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle = \langle 10\sqrt{2}, -10\sqrt{2} \rangle + ||\overline{AB}||\langle 1, 0 \rangle \Rightarrow y = -10\sqrt{2}$

Análogamente : $\mathbf{V} = \mathbf{V}_c + \mathbf{V}_{aparente} \Rightarrow \langle x, y \rangle = \langle 40, 0 \rangle + ||\overline{BC}||\langle 0, -1 \rangle \Rightarrow x = 40$

Luego : $\text{Comp}_{V_m}\mathbf{V} = \dfrac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_m}{||\mathbf{V}_m||} = \dfrac{\langle 40, -10\sqrt{2} \rangle \cdot \langle 10\sqrt{2}, -10\sqrt{2} \rangle}{\sqrt{(10\sqrt{2})^2 + (-10\sqrt{2})^2}}$

$\therefore \text{Comp}_{V_m}\mathbf{V} = 10(1 + 2\sqrt{2})$ ■

Ejemplo 6 Sobre un sólido puntual en P actúan tres fuerzas coplanares que se muestra en la Figura 1.159. Hallar la fuerza necesaria que se debe aplicar en P para mantener en reposo al sólido.

Solución. Las componentes de cada fuerza son :

$\mathbf{F}_1 = 200\langle \text{Cos } 30°, \text{ Sen } 30° \rangle = 100\langle \sqrt{3}, 1 \rangle$

$\mathbf{F}_2 = 150\langle \text{Cos } 0°, \text{ Sen } 0° \rangle = 150\langle 1, 0 \rangle$

$\mathbf{F}_3 = 100\langle \text{Cos } 270°, \text{ Sen } 270° \rangle = 100\langle 0, -1 \rangle$

La resultante es la suma de estas fuerzas, esto es :

$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 50\langle 3 + 2\sqrt{3}, 0 \rangle$

$\Rightarrow ||\mathbf{R}|| = 50(3 + 2\sqrt{3}) = 323$ kg.

Como se puede observar, el sentido de **R** es el mismo que $\mathbf{F}_2$; luego la fuerza que se debe aplicar al sólido puntual para mantenerlo en reposo es - **R**, es decir, el vector opuesto a **R** o a $\mathbf{F}_2$ ■

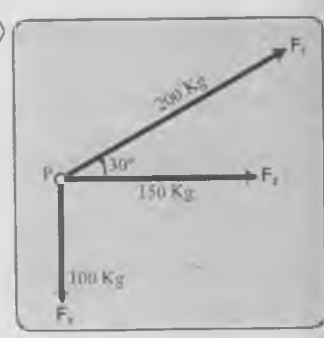


FIGURA 1.159

Ejemplo 7 Se da el siguiente sistema de fuerza : $\mathbf{F}_1$ de 50 kg. que actúa de A(1 , 5) a B(-3 , 8) y $\mathbf{F}_2$ de 65 kg. que actúa de C(-3 , -5) a D(2 , 7). Hallar la resultante **R** del sistema y el trabajo realizado por **R** al desplazarse de P(4 , 3) a Q(9 , 5).

Solución. $\overline{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = \langle -3, 8 \rangle - \langle 1, 5 \rangle = \langle -4, 3 \rangle \Rightarrow ||\overline{AB}|| = 5$

$\overline{CD} = \mathbf{D} - \mathbf{C} = \langle 2, 7 \rangle - \langle -3, -5 \rangle = \langle 5, 12 \rangle \Rightarrow ||\overline{CD}|| = 13$

Luego, si $\mathbf{F}_1 = r\overline{AB} \Rightarrow ||\mathbf{F}_1|| = r||\overline{AB}|| \Rightarrow 50 = r(5) \Leftrightarrow r = 10$

$\mathbf{F}_2 = t\overline{CD} \Rightarrow ||\mathbf{F}_2|| = t||\overline{CD}|| \Rightarrow 65 = t(13) \Leftrightarrow t = 5$

Por lo que : $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 10\langle -4, 3 \rangle + 5\langle 5, 12 \rangle = 15\langle -1, 6 \rangle$

El trabajo W realizado por una fuerza **F** al recorrer un espacio **S** está definido por la ecuación : $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$ (Obsérvese que W es escalar)

Por lo tanto, si $\mathbf{S} = \overrightarrow{PQ} = \langle 9, 5 \rangle - \langle 4, 3 \rangle = \langle 5, 2 \rangle$

$\Rightarrow W = 15\langle -1, 6 \rangle \cdot \langle 5, 2 \rangle = 105$ unidades de trabajo ■

Ejemplo 8 Un Sólido de 100 kg. de peso está suspendido por el centro mediante una cuerda, tal como se indica en la Figura 1.160. Hallar la tensión **T** en la cuerda.

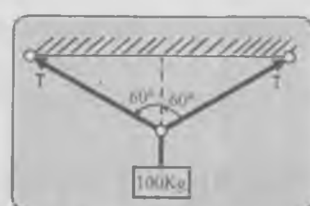


FIGURA 1.160

Solución. Sean $||\mathbf{T}_1|| = ||\mathbf{T}_2|| = ||\mathbf{T}||$, donde las tensiones y el peso **W** expresados en función de sus componentes son :

$\mathbf{T}_1 = ||\mathbf{T}||\langle \text{Cos } 30°, \text{ Sen } 30° \rangle = ||\mathbf{T}||\langle \sqrt{3}/2, 1/2 \rangle$

$\mathbf{T}_2 = ||\mathbf{T}||\langle \text{Cos } 150°, \text{ Sen } 150° \rangle = ||\mathbf{T}||\langle -\sqrt{3}/2, 1/2 \rangle$

$\mathbf{W} = 100\langle \text{Cos } 270°, \text{ Sen } 270° \rangle = 100\langle 0, -1 \rangle$

El sistema de fuerzas estará en equilibrio si

$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{W} = \mathbf{O}$

$\Rightarrow ||\mathbf{T}||\langle \sqrt{3}/2, 1/2 \rangle + ||\mathbf{T}||\langle -\sqrt{3}/2, 1/2 \rangle = -100\langle 0, -1 \rangle$

de donde : $||\mathbf{T}||\langle 0, 1 \rangle = 100\langle 0, 1 \rangle \Rightarrow ||\mathbf{T}|| = 100$ kg. ■

Ejemplo 9 Sobre un cuerpo que descansa en un plano inclinado, actúan tres fuerzas : la gravedad **G**, una fuerza **N** de reacción que es perpendicular al plano y una fuerza **F** de fricción que se dirige hacia arriba en la dirección del plano. Se define coeficiente de fricción u, como la razón de $||\mathbf{F}||$ a $||\mathbf{N}||$ cuando el ángulo ψ de inclinación es tal

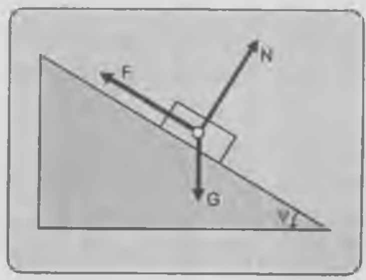


FIGURA 1.161

que cuerpo está a punto de deslizarse. Demostrar que : $u = \text{Tg}\,\psi$

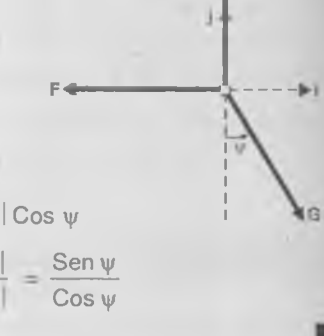
Demostración. En efecto , usando la base ortonormal $\beta = \{i\ ,\ j\}$, con i en la dirección del plano inclinado , se tiene :

$N = ||N||\ \langle \text{Cos } 90°\ ,\ \text{Sen } 90° \rangle = ||N||\ \langle 0\ ,\ 1 \rangle$

$F = ||F||\ \langle \text{Cos } 180°\ ,\ \text{Sen } 180° \rangle = ||F||\ \langle -1\ ,\ 0 \rangle$

$G = ||G||\ \langle \text{Cos}(270° + \psi)\ ,\ \text{Sen}(270° + \psi) \rangle$

$\quad = ||G||\ \langle \text{Sen}\,\psi\ ,\ -\text{Cos}\,\psi \rangle$



Estando el cuerpo en reposo , entonces :

$$N + F + G = O$$

$\Rightarrow ||N|| + ||F||\langle -1\ ,\ 0 \rangle = -||G||\langle \text{Sen}\,\psi\ ,\ -\text{Cos}\,\psi \rangle$

de donde : $-||F|| = -||G||\ \text{Sen}\,\psi$ y $||N|| = ||G||\ \text{Cos}\,\psi$

Dividiendo estas dos igualdades obtenemos : $\dfrac{||F||}{||N||} = \dfrac{\text{Sen}\,\psi}{\text{Cos}\,\psi}$

$$\therefore\ u = \text{Tg}\,\psi$$ ■

Ejemplo 10 Un cuerpo de w = 500 lb. de peso está suspendido como se indica en la Figura 1.162. Determinar cada una de las fuerzas que ejercen sobre el punto C.

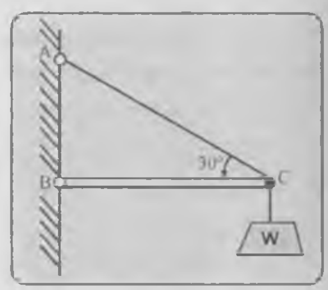


FIGURA 1.162

Solución. Sean **W** , **T** y **Q** las fuerzas que actúan en el punto C , cuyas representaciones son :

$W = 500\ \langle \text{Cos } 270°\ ,\ \text{Sen } 270° \rangle = 500\ \langle 0\ ,\ -1 \rangle$

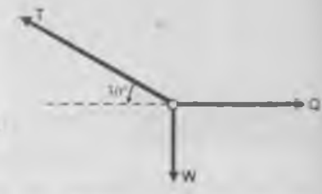
$T = ||T||\ \langle \text{Cos } 150°\ ,\ \text{Sen } 150° \rangle = ||T||\ \langle -\sqrt{3}/2\ ,\ 1/2 \rangle$

$Q = ||Q||\ \langle \text{Cos } 0°\ ,\ \text{Sen } 0° \rangle = ||Q||\ \langle 1\ ,\ 0 \rangle$

Estando las fuerza en equilibrio , entonces

$$W + T + Q = O$$

$\Rightarrow 500\ \langle 0\ ,\ -1 \rangle + ||T||\ \langle -\sqrt{3}/2\ ,\ 1/2 \rangle + ||Q||\ \langle 1\ ,\ 0 \rangle = O$



$$\Rightarrow ||T||\ \langle -\sqrt{3}/2\ ,\ 1/2 \rangle + ||Q||\ \langle 1\ ,\ 0 \rangle = 500\ \langle 0\ ,\ 1 \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{3}}{2}||T|| + ||Q|| = 0 \\ \dfrac{1}{2}||T|| = 500 \end{cases}$$

de donde obtenemos : $||T|| = 1000$ lb. y $||Q|| = 500\sqrt{3}$ lb. ■

EJERCICIOS : *Grupo 14*

1. Un avión recorre 200 km. hacia el Oeste y luego 150 km. Oeste 60° Norte. Hallar el desplazamiento resultante , gráfica y analíticamente.
2. A qué distancia y en qué dirección del punto de partida se encuentra una persona que recorre 20m. hacia el Este 30° Sur , 50m. hacia el Oeste ; 40m. hacia el Noreste , y 30m. hacia el Oeste 60° Sur.
3. Un hombre que se dirige hacia el Sur a 15 km/h observa que el viento sopla del Oeste. Aumenta su velocidad a 25 km/h y le parece que el viento sopla del Suroeste. Determinar la velocidad del viento así como su dirección y sentido.
4. Dos ciudades A y B están situadas una frente a otra en las dos orillas de un río de 8 km. de ancho , siendo la velocidad del agua de 4 km/h. Un hombre en A quiere ir a la ciudad C que se encuentra a 6 km aguas arriba de B y en la misma ribera. Si la embarcación que utiliza tiene una velocidad máxima de 10 km/h y desea llegar a C en el menor tiempo posible ; qué dirección debe tomar y cuanto tiempo emplea en conseguir su propósito.
5. Un río tiene 500m. de ancho y fluye a una velocidad de 4 km/h. Un hombre puede remar a una velocidad de 3 km/h. Si parte de un punto A y rema hacia la orilla opuesta, cuál es el punto más lejano río arriba que puede alcanzar en la orilla opuesta. En que dirección deberá navegar.
6. Hallar la resultante de los siguientes desplazamientos : 10m. hacia el Noreste; 20m. hacia el este 30° Norte ; 35m. hacia el Sur.
7. Dos fuerzas de magnitudes 8 y 10 kg. actúan sobre una partícula a un ángulo de 45°. Hallar la dirección y la magnitud de la resultante.
8. Dado el siguiente sistema de fuerzas : $\mathbf{F}_1$ de 70 kg. que actúa de A(2 , 3) a B(5 , -1) y $\mathbf{F}_2$ de 357 kg. que actúa de C(3 , -9) a D(-5 , 6). Hallar la resultante **R** del sistema y el trabajo realizado por **R** al desplazarse de P(5 , -1) a Q(9 , 1).
9. Un peso de 100 kg. esta suspendido de una cuerda flexible de 5m. que a dos soportes separados entre si 2m. Determinar las fuerzas resultantes en cada soporte si el sistema coordenado se escoge como se muestra en la Figura 1.163.
10. Un peso de 250 kg. descansa en un plano con inclinación de 30° relativa a la horizontal (Figura 1.164). En él actúan una fuerza $\mathbf{F}_1$ con una magnitud de 200 kg. que se dirige hacia arriba a lo largo de una recta que forma un ángulo de 20° con el plano ; la fuerza gravitacional $\mathbf{F}_3$ que actúa hacia abajo ; una fuerza de

reacción F_2 que actúa perpendicularmente con respecto al plano y una fuerza F_4 que actúa hacia abajo en la dirección del plano inclinado. Hallar las fuerzas F_2 y F_4.

11. Un barril está sostenido sobre un plano inclinado $\overline{OP}$ por la fuerza $\mathbf{F}_1$ que actúa paralelamente al plano y por otra fuerza $\mathbf{F}_2$ que actúa perpendicularmente a él (Figura 1.165). Si el peso W del barril es de 300 kg. y el plano forma un ángulo de 30° con la horizontal , hallar $\|\mathbf{F}_1\|$ y $\|\mathbf{F}_2\|$.

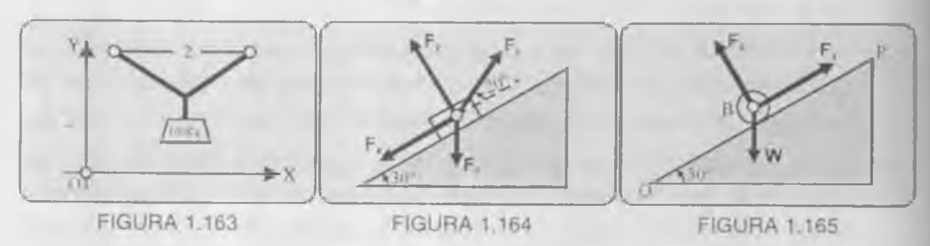


FIGURA 1.163 FIGURA 1.164 FIGURA 1.165

12. Un cuerpo de 540 kg. de peso está suspendido como se indica en la Figura 1.166. Determinar la tensión en cada una de las cuerdas $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$, si $\alpha = 30°$.

13. Se levanta un cuerpo de 200 kg. de peso a velocidad constante , como se indica en la Figura 1.167. Determinar cada una de las fuerzas ejercidas sobre el punto C , si $\alpha = 30°$ y $\beta = 45°$

14. Un peso de 100 kg. está suspendido de alambres como se indica en la Figura 1.168. La distancia $\overline{AB}$ es 20 pies , $\overline{AC}$ mide 10 pies y $\overline{CB} = \sqrt{3}$ pies. Qué fuerzas ejercen $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ sobre el nudo C?

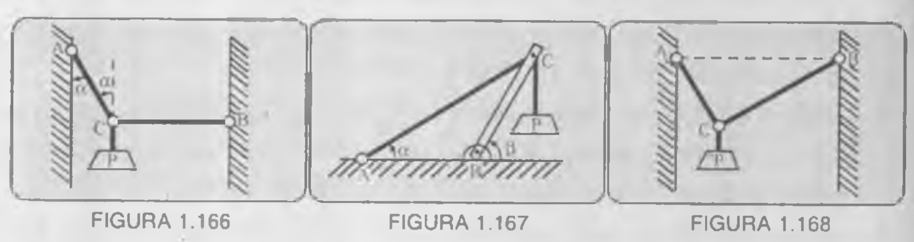


FIGURA 1.166 FIGURA 1.167 FIGURA 1.168

2 RECTAS EN EL PLANO

2.1 RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

Al hacer el estudio de puntos del plano y su relación con los vectores resulta útil denotar al vector que va del origen a un punto A del plano mediante la letra mayúscula **A** o minúscula a, escritas en negrita.

Es bien conocido que dos puntos del plano definen una recta. Veremos como se puede emplear este hecho para obtener la ecuación vectorial de una recta $\mathscr{L}$. En la Figura 2.1 se muestra la recta $\mathscr{L}$, que contiene a los puntos $P_1(x_1 , y_1)$ y $P_2(x_2 , y_2)$, junto con los vectores de posición $\mathbf{P}_1 = \langle x_1 , y_1\rangle$ y $\mathbf{P}_2 = \langle x_2 , y_2\rangle$. Nótese que el vector $\mathbf{a} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$, tiene una representación geométrica que está sobre $\mathscr{L}$ y que por lo tanto es paralelo a dicha recta.

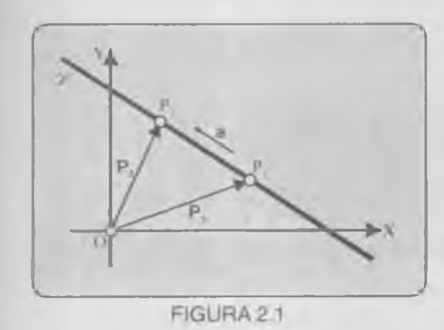


FIGURA 2.1

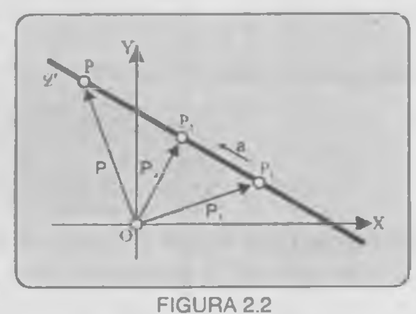


FIGURA 2.2

En la Figura 2.2 se muestra la misma configuración , excepto que se ha añadido al punto genérico P(x , y) sobre la recta $\mathscr{L}$ y se ha trazado el vector

correspondiente $P = \langle x, y\rangle$. Si P está sobre $\mathscr{L}$, el vector $P - P_1$ es paralelo al vector $a = P_2 - P_1$, entonces podemos escribir

$$P - P_1 = t\,(P_2 - P_1)$$

o bien

$$\mathscr{L} : P = P_1 + t\,(P_2 - P_1)\ ,\ t \in R \qquad (1)$$

El escalar t es llamado *parámetro*, por ello a esta ecuación se le llama, *ecuación paramétrica vectorial ordinaria* de la recta que pasa por P_1 y P_2.

Ejemplo 1 Hallar la ecuación paramétrica vectorial de la recta $\mathscr{L}$ que pasa por $P_1(-3, 1)$ y $P_2(1, 4)$. Trácese un diagrama.

Solución. Un dibujo previo del ejercicio se muestra en la Figura 2.3. Luego, si

$P_1 = \langle -3, 1\rangle$ y $P_2 = \langle 1, 4\rangle$

$\Rightarrow P_2 - P_1 = \langle 1, 4\rangle - \langle -3, 1\rangle = \langle 4, 3\rangle$

Por tanto, la ecuación paramétrica vectorial de $\mathscr{L}$, según (1) es

$$\mathscr{L} : P = \langle -3, 1\rangle + t\,\langle 4, 3\rangle\ ,\ t \in R$$ ■

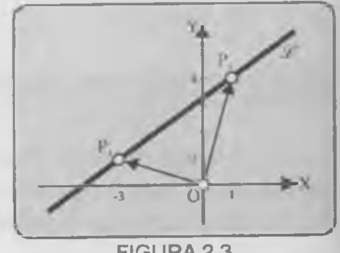


FIGURA 2.3

| **OBSERVACION 2.1** *Ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta*

Si se escribe la ecuación (1) en términos del parámetro t y de las coordenadas de P_1 y P_2 tenemos

$$\begin{aligned}\mathscr{L} : \langle x, y\rangle &= \langle x_1, y_1\rangle + t\,(\langle x_2, y_2\rangle - \langle x_1, y_1\rangle)\\ &= \langle x_1, y_1\rangle + t\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle\\ &= \langle x_1 + t\,(x_2 - x_1), y_1 + t\,(y_2 - y_1)\rangle\end{aligned}$$

Esta ecuación vectorial equivale a las ecuaciones

$$\mathscr{L} : \begin{cases} x = x_1 + t\,(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t\,(y_2 - y_1)\end{cases}\ ,\ t \in R \qquad (2)$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de sistema de *ecuaciones paramétricas cartesianas* de la recta que pasa por P_1 y P_2

Ejemplo 2 Obtener el sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta que pasa por los puntos $P_1(-2, 3)$ y $P_2(5, 1)$.

Solución. Según la ecuación **(2)** : $x = -2 + t\,(5 + 2)$, $y = 3 + t\,(1 - 3)$

de donde ; $\mathscr{L} : \begin{cases} x = -2 + 7t \\ y = 3 - 2t\end{cases}$

son las ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta pedida. ■

2.2 SEGMENTOS DE RECTA

Si el conjunto de valores permitidos de t se restringe a un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la gráfica de la ecuación (1) es un *segmento de recta*. En particular si :

$t = 0 \Rightarrow P(x, y) = P_1(x_1, y_1)$

$t = 1 \Rightarrow P(x, y) = P_2(x_2, y_2)$

Por tanto, como se indica en el Figura 2.4, a medida que t recorre el intervalo $[0, 1]$, el punto $P(x, y)$ recorre el segmento de recta desde $P_1(x_1, y_1)$ hasta $P_2(x_2, y_2)$, de modo que el segmento de recta $\overline{P_1P_2}$ queda definida por la ecuación

$$\overline{P_1P_2} = \{P \in R^2 \mid P = P_1 + t\,(P_2 - P_1)\ ,\ 0 \leq t \leq 1\} \qquad (3)$$

FIGURA 2.4

Los demás puntos de la recta corresponden a valores de t tales que, $t < 0$ y $t > 1$

Se puede emplear la ecuación (1) para calcular las coordenadas de un punto P que está sobre el segmento $\overline{P_1P_2}$ y que está a una distancia r dada de P_1 sobre la medida del segmento $\overline{P_1P_2}$, esto es

$$P = P_1 + r\,(P_2 - P_1)\ ,\ 0 \leq r \leq 1 \qquad (4)$$

Así, en la Figura 2.5 se observa que a medida que r crece de $r = 0$ a $r = 1$, con intervalos de longitud $1/5$, los puntos $P = P_1 + r\,(P_2 - P_1)$ se desplazan de P_1 a P_2 con la siguiente representación vectorial

$A = P_1 + \frac{1}{5}(P_2 - P_1)$ $\qquad C = P_1 + \frac{3}{5}(P_2 - P_1)$

$B = P_1 + \frac{2}{5}(P_2 - P_1)$ $\qquad D = P_1 + \frac{4}{5}(P_2 - P_1)$

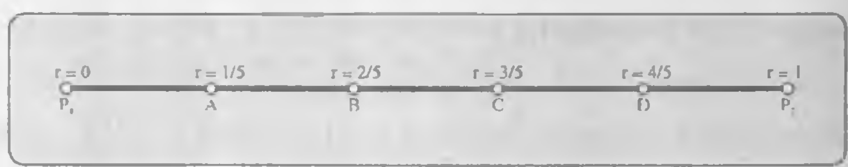


FIGURA 2.5

De esta manera se pueden ubicar puntos que dividen al segmento $[P_1 , P_2]$ en n partes iguales.

Ejemplo 3 Hallar las coordenadas de los puntos de trisección del segmento de recta cuyos extremos son $P_1(-3 , 7)$ y $P_2(4 , 1)$.

Solución. Supongamos que S y T sean los puntos de trisección del segmento $\overline{P_1P_2}$, y que $P_2 - P_1 = \langle 4 , 1\rangle - \langle -3 , 7\rangle = \langle 7 , -6\rangle$, entonces los vectores de posición de los puntos de este segmento están representados por

$P = \langle -3 , 7\rangle + r\langle 7 , -6\rangle , r \in [0 , 1]$

Para $r = 1/3 \Rightarrow \mathbf{S} = \langle -3 , 7\rangle + \frac{1}{3}\langle 7 , -6\rangle = \langle -2/3 , 5\rangle$

y para $r = 2/3 \Rightarrow \mathbf{T} = \langle -3 , 7\rangle + \frac{2}{3}\langle 7 , -6\rangle = \langle 5/3 , 3\rangle$

Por lo tanto , los puntos buscados son $S(-2/3 , 5)$ y $T(5/3 , 3)$ ■

Ejemplo 4 Demostrar que los puntos $\left(\frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2\right)$ y $\left(\frac{1}{3}P_1 + \frac{2}{3}P_2\right)$ trisecan al segmento $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Demostración. En efecto , por definición de segmento de recta :

$$\overline{P_1P_2} = \{P = P_1 + r(P_2 - P_1) \mid r \in [0 , 1]\} \qquad (1)$$

Supóngase que : $\mathbf{S} = \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2$ y $\mathbf{T} = \frac{1}{3}P_1 + \frac{2}{3}P_2$

Luego , podemos escribir :

$$\mathbf{S} = P_1 + \frac{1}{3}P_2 - \frac{1}{3}P_1 \Rightarrow \mathbf{S} = P_1 + \frac{1}{3}(P_2 - P_1) , \ \frac{1}{3} \in [0 , 1] \qquad (2)$$

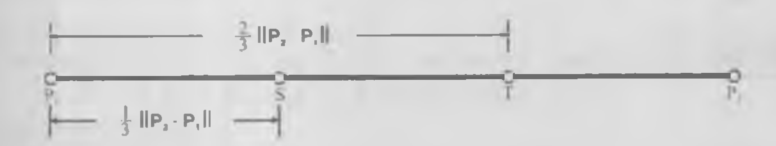
$$\mathbf{T} = P_1 + \frac{2}{3}P_2 - \frac{2}{3}P_1 \Rightarrow \mathbf{T} = P_1 + \frac{2}{3}(P_2 - P_1) , \ \frac{2}{3} \in [0 , 1] \qquad (3)$$

Entonces , por (1) , S y T pertenecen al segmento $\overrightarrow{P_1P_2}$

Además de (2) : $d(P_1 , S) = \|\mathbf{S} - P_1\| = \frac{1}{3}\|P_2 - P_1\|$

y de (3) : $d(P_1 , T) = \|\mathbf{T} - P_1\| = \frac{2}{3}\|P_2 - P_1\|$

Por consiguiente , S y T trisecan al segmento $\overrightarrow{P_1P_2}$ ■



2.3 DIVISION DE UN SEGMENTO EN UNA RAZON DADA

Sea P un punto cualquiera sobre una recta $\mathscr{L}$ que pasa por los puntos P_1 y P_2 y que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón m/n , esto es

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

Entonces , la ecuación vectorial que define al punto P es :

$$P = \left(\frac{n}{m+n}\right)P_1 + \left(\frac{m}{m+n}\right)P_2 \ , \ m \neq -n$$

En efecto , de (1) : $\overline{P_1P} = \left(\frac{m}{n}\right)\overline{PP_2}$

$$= \left(\frac{m}{n}\right)(\overline{P_1P_2} - \overline{P_1P})$$

de donde : $(m + n)\overline{P_1P} = m\,\overline{P_1P_2} \Rightarrow (m + n)(\mathbf{P} - P_1) = m(P_2 - P_1)$

$\Rightarrow (m + n)\mathbf{P} - (m + n)P_1 = m P_2 - m P_1$

$$\therefore \boxed{P = \left(\frac{n}{m+n}\right)P_1 + \left(\frac{m}{m+n}\right)P_2 \ , \ m \neq -n} \qquad (5)$$

OBSERVACIONES 2.2

1. Si m y n tiene el mismo signo , es decir $\frac{m}{n} > 0$, entonces P es interior al segmento $\overline{P_1P_2}$.
2. Si m y n tiene signos diferentes , esto es $\frac{m}{n} < 0$, entonces el punto P es exterior

al segmento $\overline{P_1P_2}$, y ocurre que :

a) Si $\left|\frac{m}{n}\right| < 1$, entonces P estará más cerca de P_1

b) Si $\left|\frac{m}{n}\right| > 1$, entonces P estará más cerca de P_2

Ejemplo 5 Dados los puntos $P_1(-3 , 3)$ y $P_2(2 , 8)$, hallar el punto P que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón 2 : 3

Solución. Si $\frac{m}{n} = \frac{2}{3} \Rightarrow m = 2 \ , \ n = 3 \ y \ m + n = 5$

Como la razón es positiva , el punto P está en el interior del segmento $\overline{P_1P_2}$

Luego , según la ecuación (5) : $\mathbf{P} = \frac{3}{5}\mathbf{P_1} + \frac{2}{5}\mathbf{P_2}$

$\Rightarrow \mathbf{P} = \frac{3}{5}\langle -3 , 3\rangle + \frac{2}{5}\langle 2 , 8\rangle = \langle -1 , 5\rangle \Leftrightarrow P(-1 , 5)$ ■

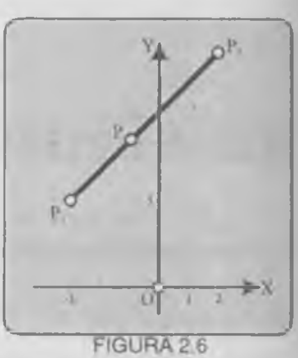


FIGURA 2.6

Ejemplo 6 Dados los puntos $P_1(3 , -1)$ y $P_2(1 , 2)$, hallar el punto P que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón -3 : 2.

Solución. En este caso : $\frac{m}{n} = \frac{-3}{2}$

$\Rightarrow m = -3 \ , \ n = 2 \ , m + n = -1$

Como la razón es negativa y $\left|-\frac{3}{2}\right| > 1$, entonces el punto P es exterior al segmento $\overline{P_1P_2}$ y está más cerca de P_2. Luego, haciendo uso de la ecuación **(5)** :

$$\mathbf{P} = \left(\frac{2}{-1}\right)\langle 3 , -1\rangle + \left(\frac{-3}{-1}\right)\langle 1 , 2\rangle$$

$$= -2\langle 3 , -1\rangle + 3\langle 1 , 2\rangle = \langle -3 , 8\rangle$$

Por lo que el punto buscado es : P(-3 , 8) ■

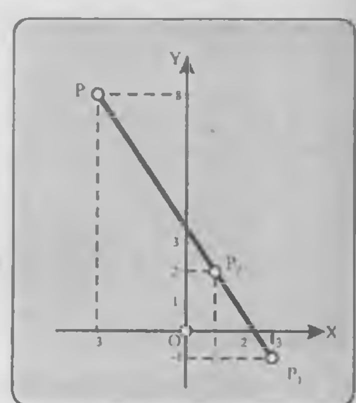


FIGURA 2.7

Ejemplo 7 Sean los puntos $P_1(-2 , 4)$ y $P_2(2 , 6)$, hallar las coordenadas del punto P que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón dada 3 : (-5)

Solución. Si $\frac{m}{n} = \frac{3}{-5} \Rightarrow m = 3 \ , \ n = -5 \ y \ m + n = -2$

Como la razón es negativa y $\left|-\frac{3}{5}\right| < 1$, el punto P es exterior al segmento $\overline{P_1P_2}$ y está más cerca de P_1.

$$\mathbf{P} = \left(\frac{n}{m+n}\right)\mathbf{P_1} + \left(\frac{m}{m+n}\right)\mathbf{P_2} = \frac{-5}{-2}\langle -2 , 4\rangle + \frac{3}{-2}\langle 2 , 6\rangle$$

$$= 5\langle -1 , 2\rangle - 3\langle 1 , 3\rangle$$

$$= \langle -8 , 1\rangle$$ ■

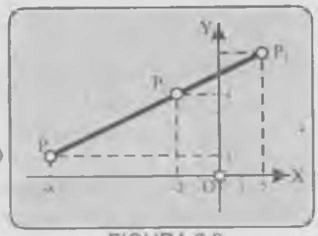


FIGURA 2.8

Ejemplo 8 Un triángulo tiene por vértices A(-2 , -3) , B(2 , 8) y C(5 , 2). Por el punto D(16/5 , 28/5) que pertenece al lado $\overline{BC}$ se traza una paralela a $\overline{AB}$ que corta al lado $\overline{AC}$ en el punto E. Hallar las coordenadas de E.

Solución. Supóngase que : $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$

$\Rightarrow n(\mathbf{D} - \mathbf{B}) = m(\mathbf{C} - \mathbf{D})$

$\Rightarrow n\langle 6/5 , -12/5\rangle = m\langle 9/5 , -18/5\rangle$

de donde : $6n\langle 1 , -2\rangle = 9m\langle 1 , -2\rangle \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{2}{3}$

Como $\overline{DE} \parallel \overline{BA}$, entonces E divide a $\overline{AC}$ en la misma razón , esto es , $\overline{AE} : \overline{EC} = 2 : 3 \Rightarrow m = 2 \ y \ n = 3$

Luego , haciendo uso de la ecuación **(5)** se tiene :

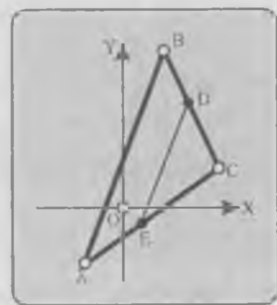


FIGURA 2.9

$$\mathbf{E} = \left(\frac{n}{m+n}\right)\mathbf{A} + \left(\frac{m}{m+n}\right)\mathbf{C} = \frac{3}{5}\langle -2 , -3\rangle + \frac{2}{5}\langle 5 , 2\rangle = \langle 4/5 , -1\rangle$$

$$\therefore E(4/5 , -1)$$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 15*

1. Hallar la ecuación paramétrica vectorial y el sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta que contiene a los puntos dados P_1 y P_2.
   a) $P_1(4 , -2)$, $P_2(4 , 3)$ b) $P_1(-7 , 2)$, $P_2(-3 , -1)$

2. Hallar las coordenadas de los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son los puntos dados P_1 y P_2.
   a) $P_1(-3, 6)$, $P_2(12, -15)$ b) $P_1(-3, 7)$, $P_2(4, 1)$
3. Hallar la ecuación vectorial del segmento que une a $P_1(2, 5)$ con el punto medio del segmento cuyos extremos son A(5 , 1) y B(7 , -3)
4. Hallar la ecuación vectorial del segmento que une el punto medio del segmento de extremos A(-5 , 2) y B(1 , 6) con el punto que está a 1/3 de la distancia que separa a R(-2 , 6) y T(1 , 9).
5. Obtener la ecuación paramétrica vectorial del segmento que une al punto que está a 2/3 de la distancia que separa a los puntos A(8 , -2) y B(2 , 7) con el punto que está a una cuarta parte de la distancia que separa a los puntos C(1 , 6) y D(9 , 10).
6. Demostrar que las coordenadas (x , y) y (x' , y') de los puntos que trisecan el segmento de extremos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ están dadas por :
$$x = \frac{1}{3}(2x_1 + x_2)\ ,\ y = \frac{1}{3}(2y_1 + y_2)\ ;\ x' = \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2)\ ,\ y' = \frac{1}{3}(y_1 + 2y_2)$$
7. Dados los puntos $P_1(-3, 8)$ y $P_2(12, -32)$, hallar los puntos que dividen al segmento $\overline{P_1P_2}$ en cinco partes iguales.
8. Sean los puntos $P_1(3, -2)$ y $P_2(-7, 8)$, hallar el punto P que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ la razón 2 : 3.
9. Dados los puntos $P_1(-7, 6)$ y $P_2(1, 5)$, hallar el punto P que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón (-2) : 1.
10. Si $P_1(2, -3)$ y $P_2(5, -7)$, hallar las coordenadas del punto P que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón 3 : (-4).
11. El segmento de extremos A(-2 , -4) y B(1 , 0) es dividido por P y Q en las razones (-3) : 2 y (-2) : 3 respectivamente. Hallar la norma de $\overline{PQ}$.
12. Un triángulo tiene por vértices A(-1 , -3) , B(3 , 5) y C(5 , -1). Por el punto E(15/4 , 11/4) del lado $\overline{BC}$ se traza una paralela a $\overline{AC}$ que corta al lado $\overline{AB}$ en el punto D. Hallar las coordenadas del punto D.
13. Los vértices de un cuadrilátero son A(-4 , 6) , B(-2 , -1) , C(8 , 0) y D(6 , 11). Hallar la razón m : n = $\overline{BP}$: $\overline{PD}$ en que la diagonal $\overline{AC}$ divide a $\overline{BD}$, donde P es el punto de intersección de las diagonales.
14. Sean A(-2 , 5) y B(1 , -2) los extremos del segmento $\overline{AB}$ y P(x , y) un punto que resulta de prolongar $\overline{AB}$ por B. Si $\overline{BP}$ = 4 $\overline{AB}$, hallar las coordenadas de P.

15. En un triángulo ABC , el punto P(4/5 , 5) divide al segmento $\overline{AB}$ en la razón $\overline{AP}$: $\overline{PB}$ = 2 : 3. El punto Q(27/5 , 22/5) divide al segmento $\overline{BC}$ en la razón $\overline{BQ}$: $\overline{QC}$ = 2 : 3. El punto R(14/5 , 3/5) divide al segmento $\overline{AC}$ en la razón $\overline{AR}$: $\overline{RC}$ = 3 : 2. Hallar los vértices del triángulo.
16. Dos vértices de un triángulo ABC son A(2 , 1) y B(5 , 3). Hallar las coordenadas del tercer vértice C si la intersección de las medianas es G(3 , 4).

2.4 PUNTOS QUE ESTAN SOBRE UNA RECTA

En la Sección 2.1 se vió que la ecuación vectorial , o que el sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas , de una recta $\mathcal{L}$ queda determinada si se conocen las coordenadas de dos puntos de $\mathcal{L}$. Estas ecuaciones también se pueden determinar si se conocen un punto de $\mathcal{L}$ y un *vector de dirección* de $\mathcal{L}$.

Efectivamente , consideremos la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y que es paralela al vector no nulo **a** = ⟨h , k⟩ , (Figura 2.10). Ahora , sabemos que un punto cualquiera P(x , y) está sobre $\mathcal{L}$ si y sólo si el vector **P** - **P**$_1$ es paralelo al vector **a** , esto es ,

$$\mathbf{P} - \mathbf{P}_1 = t\,\mathbf{a}$$

o bien

$$\mathcal{L} = \{ P(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + t\,\mathbf{a} \} \qquad (6)$$

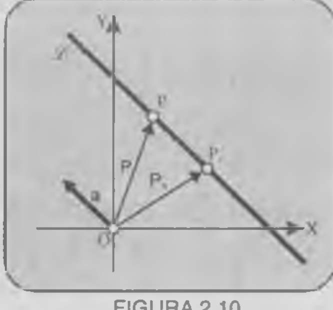


FIGURA 2.10

La ecuación (6) recibe el nombre de *ecuación vectorial ordinaria* de la recta que pasa por P_1 y es paralela al vector **a**. Dado que la ecuación **(6)** se puede escribir en la forma

$$\mathcal{L} : \langle x, y\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + t\langle h, k\rangle$$

el sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas correspondientes para $\mathcal{L}$ es

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x = x_1 + th \\ y = y_1 + tk \end{cases} ,\ t \in \mathbb{R} \qquad (7)$$

Ejemplo 1 Hallar la ecuación vectorial y el sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta que pasa por $P_1(2, 4)$ y es

paralela al vector que va de S(3 , -1) a T(-1 , 4). Determinar si el punto A(1 , 5) está sobre dicha recta.

Solución. Sea $\overline{ST}$ la representación geométrica del vector **a**. Esto es , si :

$\mathbf{a} = \overline{ST} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{T} - \mathbf{S} = \langle -1 , 4\rangle - \langle 3 , -1\rangle = \langle -4 , 5\rangle$

Luego , según **(6)** , la ecuación vectorial de la recta es

$$\mathscr{L} : \mathbf{P} = \langle 2 , 4\rangle + t\langle -4 , 5\rangle \ , \ t \in \mathbf{R}$$

y por **(7)** , $\mathscr{L} : \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 4 + 5t \end{cases} \ , \ t \in \mathbf{R}$

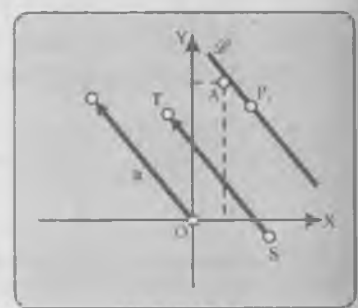


FIGURA 2.11

Si $A(1 , 5) \in \mathscr{L} \Rightarrow \exists ! \, t \in \mathbf{R} \mid \mathbf{A} = \langle 2 , 4\rangle + t\langle -4 , 5\rangle$

$$\Rightarrow \langle 1 , 5\rangle = \langle 2 - 4t , 4 + 5t\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2 - 4t \Rightarrow t = 1/4 \\ 5 = 4 + 5t \Rightarrow t = 1/5 \end{cases}$$

Por lo tanto , como el valor de t no es único , $A \notin \mathscr{L}$ ■

Existe otra manera más sencilla para llegar a esta conclusión y que consiste en la aplicación del corolario del siguiente teorema.

> ***TEOREMA 2.1*** Si $\mathscr{L}$ es una recta que pasa por el punto P_1 y es paralela al vector a , entonces , si :
>
> $$P_2 \in \mathscr{L} \Leftrightarrow (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \parallel \mathbf{a}$$

Demostración. En efecto , si $\mathscr{L}$ tiene por ecuación vectorial

$\mathscr{L} : \mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + t\,\mathbf{a} \ , \ t \in \mathbf{R}$, entonces

$P_2 \in \mathscr{L} \Leftrightarrow \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 + t\,\mathbf{a}$, para algún $t \in \mathbf{R}$

$\Rightarrow \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = t\,\mathbf{a} \Leftrightarrow (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \parallel \mathbf{a}$

Corolario. Si $\mathscr{L}$ es la recta que pasa por el punto P_1 y paralela al vector **a**, entonces:

$\mathbf{P}_2 \in \mathscr{L} \Leftrightarrow (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{a}^{\perp} = 0$

Efectivamente , por el Teorema 2.1 , $P_2 \in \mathscr{L} \Leftrightarrow (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \parallel \mathbf{a}$ y por el Teorema 1.8:

$(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \parallel \mathbf{a} \Leftrightarrow (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{a}^{\perp} = 0$

Ejemplo 2 Determinar si los puntos S(8 , 5) y T(-2 , 2) están sobre la recta

$$\mathscr{L} : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases} \ , \ t \in \mathbf{R}$$

Solución. Por simple inspección. $\mathscr{L} : \langle x , y\rangle = \langle 4 + 2t , -1 + 3t\rangle$

$= \langle 4 , -1\rangle + t\langle 2 , 3\rangle$

Luego , la recta $\mathscr{L}$ pasa por $P_1(4 , -1)$ y es paralela al vector $\mathbf{a} = \langle 2 , 3\rangle$

Para el punto S : $\mathbf{S} - \mathbf{P}_1 = \langle 8 , 5\rangle - \langle 4 , -1\rangle = \langle 4 , 6\rangle$

$\Rightarrow (\mathbf{S} - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{a}^{\perp} = \langle 4 , 6\rangle \cdot \langle -3 , 2\rangle = -12 + 12 = 0$

Por lo tanto , $(\mathbf{S} - \mathbf{P}_1) \parallel \mathbf{a}$ y entonces el punto S está sobre la recta $\mathscr{L}$.

Para el punto T : $\mathbf{T} - \mathbf{P}_1 = \langle -2 , 2\rangle - \langle 4 , -1\rangle = \langle -6 , 3\rangle$

$\Rightarrow (\mathbf{T} - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{a}^{\perp} = \langle -6 , 3\rangle \cdot \langle -3 , 2\rangle = 18 + 6 = 24 \neq 0$

Por lo tanto , $(\mathbf{T} - \mathbf{P}_1) \nparallel \mathbf{a}$, y entonces el punto T no está sobre la recta $\mathscr{L}$. ■

El resultado expresado en el corolario del Teorema 2.1 se puede utilizar para obtener un sencillo criterio que se enuncia a continuación.

> ***Definición 2.1*** *Ecuación normal de una recta*
>
> Si **a** es el vector de dirección de una recta $\mathscr{L}$ que contiene al punto P_1 , entonces un punto P(x , y) está sobre $\mathscr{L}$ si y sólo si
>
> $$\mathscr{L} : \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}_1) = 0 \qquad (8)$$
>
> donde $\mathbf{n} = \mathbf{a}^{\perp}$ es el vector normal de $\mathscr{L}$. Esta expresión se conoce como la *ecuación normal* de la recta $\mathscr{L}$.

Ejemplo 3 Hallar la ecuación normal de la recta $\mathscr{L} : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$

Solución. La ecuación vectorial de la recta dada es , $\mathscr{L} : \mathbf{P} = \langle 1 , 2\rangle + t\langle 3 , -4\rangle , t \in \mathbf{R}$

Si $\mathbf{a} = \langle 3 , -4\rangle \parallel \mathscr{L} \Rightarrow \mathbf{a}^{\perp} = \mathbf{n} = \langle 4 , 3\rangle$ es el vector normal a $\mathscr{L}$

Luego , según **(8)** , $\mathscr{L} : \langle 4 , 3\rangle \cdot (\langle x , y\rangle - \langle 1 , 2\rangle)$

$\Leftrightarrow \mathscr{L} : \langle 4 , 3\rangle \cdot \langle x - 1 , y - 2\rangle$ ■

Ejemplo 4 Una recta $\mathscr{L}$ pasa por el punto A(3k , k - 2) y es ortogonal al vector $\mathbf{v} = \langle 3/k , 3\rangle$, $k \neq 0$; hallar los valores de k tales que el punto B(5k , k^2 - 6) esté sobre $\mathscr{L}$.

Solución. Sea $\mathbf{n} = \mathbf{v}$ el vector normal de $\mathscr{L}$, entonces si

$B \in \mathscr{L} \Leftrightarrow (\mathbf{B} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = 0$ (Def. 2.1)

Luego , $\langle 2k , k^2 - k - 4\rangle \cdot \langle 3/k , 3\rangle = 0 \Rightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = -1$ o $k = 2$ ■

OBSERVACION 2.3 Si el vector de dirección **a** , en la ecuación $\mathscr{L} : \mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + t\,\mathbf{a}$ es un vector unitario , entonces para cualquier punto P sobre la

gráfica de $\mathscr{L}$, $|t|$ es la distancia que separa P_1 de P. (Figura 2.12)

En efecto :

$$d(P_1 , P) = ||P - P_1|| = ||t\,a|| = |t|\;||a||$$

y como $||a|| = 1 \Rightarrow d(P_1 , P) = |t|$

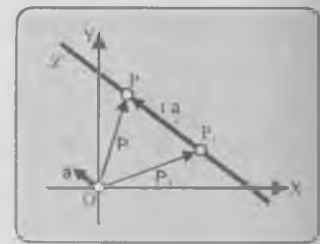


FIGURA 2.12

Ejemplo 5 Dada la recta $\mathscr{L}$: P = ⟨-1 , 6⟩ + t ⟨1 , 4⟩ , obtener las coordenadas de los puntos de $\mathscr{L}$ que están a $2\sqrt{17}$ unidades de distancia del punto S(1 , 14).

Solución. En primer lugar veamos de S(1 , 14) está sobre $\mathscr{L}$.

Efectivamente , $S - P_1 = \langle 1 , 14\rangle - \langle -1 , 6\rangle = \langle 2 , 8\rangle$

$\Rightarrow (S - P_1) \cdot a^{\perp} = \langle 2 , 8\rangle \cdot \langle -4 , 1\rangle = -8 + 8 = 0$. Luego , el punto S está sobre $\mathscr{L}$.

Ahora , un vector unitario en la dirección de a es , $u = \dfrac{\langle 1 , 4\rangle}{\sqrt{17}}$

Como $S \in \mathscr{L}$, otra ecuación de $\mathscr{L}$ es $P = \langle 1 , 14\rangle + t\left\langle \dfrac{1}{\sqrt{17}} , \dfrac{4}{\sqrt{17}}\right\rangle$

Se desea hallar las coordenadas de los puntos P(x , y) tales que

$$|t| = 2\sqrt{17} \Leftrightarrow t = 2\sqrt{17} \text{ o } t = -2\sqrt{17}$$

Para $t = 2\sqrt{17} \Rightarrow \langle x_1 , y_1\rangle = \langle 1 , 14\rangle + 2\sqrt{17}\left\langle \dfrac{1}{\sqrt{17}} , \dfrac{4}{\sqrt{17}}\right\rangle = \langle 3 , 22\rangle$

Para $t = -2\sqrt{17} \Rightarrow \langle x_2 , y_2\rangle = \langle 1 , 14\rangle - 2\sqrt{17}\left\langle \dfrac{1}{\sqrt{17}} , \dfrac{4}{\sqrt{17}}\right\rangle = \langle -1 , 6\rangle$

Por lo tanto , $P_1(3 , 22)$ y $P_2(-1 , 6)$ son los puntos buscados. ■

EJERCICIOS : *Grupo 16*

En los ejercicios 1 - 3 , diga si el punto S está o no sobre la recta $\mathscr{L}$ cuya ecuación paramétrica vectorial se da.

1. S(2 , -1) , $\mathscr{L}$: P = ⟨1 , 2⟩ + t ⟨-1 , 3⟩ , t ∈ **R**
2. S(3 , 2) , $\mathscr{L}$: P = ⟨1 , 1⟩ + t ⟨2 , -3⟩ , t ∈ **R**
3. S(-1 , 1) , $\mathscr{L}$: P = ⟨-2 , -3⟩ + t ⟨1 , 4⟩ , t ∈ **R**

En los ejercicios 4 - 7 , identificar cada uno de los conjuntos en $\mathbf{R}^2$ dado.

4. {(x , y) | x = 2t + 1 , y = -3t + 4 , t ∈ **R**}
6. {(x , y) | ⟨-2 , 1⟩ • ⟨x + 3 , y - 4⟩ = 0 }
5. {(x , y) | ⟨1 , 2⟩ + t ⟨1 , 1⟩ , t ∈ [0 , 1]}
7. {(x , y) | ⟨-1 , -5⟩ • ⟨x - 2 , y⟩ = 0}
8. Hallar la ecuación normal de las rectas

a) $\mathscr{L}$: $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$, t ∈ **R** b) $\mathscr{L}$: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3t \end{cases}$, t ∈ **R**

En los ejercicios 9 -11 , determinar si las ecuaciones vectoriales dadas corresponden a la misma recta o no.

9. P = ⟨2 , 1⟩ + t ⟨3 , -1⟩ , t ∈ **R** ; P = ⟨2 , 1⟩ + t ⟨-3 , 1⟩ , t ∈ **R**
10. P = ⟨-1 , -2⟩ + t ⟨-2 , 4⟩ , t ∈ **R** ; P = ⟨1 , 0⟩ + t ⟨1 , -2⟩ , t ∈ **R**
11. P = ⟨2 , 3⟩ + t ⟨-1 , 2⟩ , t ∈ **R** ; P = ⟨1 , 5⟩ + t ⟨2 , -4⟩ , t ∈ **R**
12. Una recta $\mathscr{L}$ pasa por el punto A(2k - 1 , 3) y es ortogonal al vector **v** = ⟨2 , k + 2⟩; hallar los valores de k tales que B(7k , k - 2) esté sobre $\mathscr{L}$.
13. Una recta $\mathscr{L}$ pasa por el punto S(2k , 3) y es paralela al vector **v** = ⟨3 , - 4/k⟩, k ≠ 0 ; hallar los valores de k tales que el punto $\left(\dfrac{k}{2} , \dfrac{3k^2 + 24}{8}\right)$ pertenezca a $\mathscr{L}$.

En los ejercicios 14 - 15 , hallar las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 que están sobre la recta cuya ecuación paramétrica vectorial se da y que están a la distancia dada del punto S dado.

14. Sobre $\mathscr{L}$: P = ⟨4 , -2⟩ + t ⟨1 , 1⟩ , t ∈ **R** ; $3\sqrt{2}$ unidades de S(4 , -2)
15. Sobre $\mathscr{L}$: P = ⟨-3 , 2⟩ + t ⟨2 , -1⟩ , t ∈ **R** ; $2\sqrt{5}$ unidades de S(1 , 0)

2.5 PENDIENTE DE UNA RECTA

Matemáticamente sabemos que el cociente de la altura y la base de un segmento recibe el nombre de *pendiente del segmento*. Si designamos esta pendiente por m , se tendrá entonces que

$$m = \frac{\text{altura}}{\text{base}}$$

Si a = ⟨h , k⟩ es el vector de dirección de una recta $\mathscr{L}$ que contiene al punto $P_1(x_1 , y_1)$, entonces $\mathscr{L}$ tiene por ecuación vectorial

$$\mathscr{L} : P = P_1 + t\,\langle h , k\rangle \;,\; t \in \mathbf{R}$$

Si se le asigna a t el valor de 1 , vemos que las coordenadas de otro punto $P_2(x_2 , y_2)$

que está sobre $\mathscr{L}$ se puede calcular sumando h y k a las coordenadas respectivas de P_1, esto es

$$x_2 = x_1 + h \quad , \quad y_2 = y_1 + k$$

Por lo tanto, $x_2 - x_1 = h$ y $y_2 - y_1 = k$ son la base y altura del segmento $\overline{P_1P_2}$, y si $h \neq 0$, entonces $\frac{k}{h}$ es la pendiente de $\overline{P_1P_2}$ y de la recta que lo contiene. (Figura 2.13)

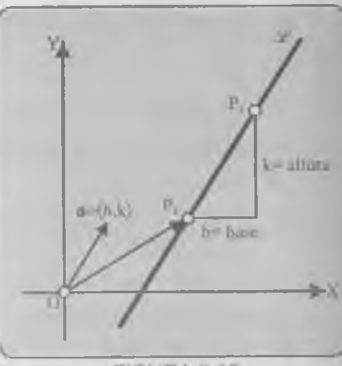


FIGURA 2.13

> **Definición 2.2** *Pendiente de una recta*
>
> Si $\mathscr{L}$ es una recta tal que uno de sus vectores de dirección es $\langle h , k\rangle$ con $h \neq 0$, entonces la pendiente m de la recta $\mathscr{L}$ está dada por
>
> $$m = \frac{k}{h}$$

De esta definición podemos afirmar que si m es la pendiente de una recta $\mathscr{L}$ si y sólo si $\langle 1 , m\rangle$, o bien $\langle 1 , k/h\rangle$, es un vector de dirección de $\mathscr{L}$. Esto indica que la ecuación (6) se puede escribir de la forma

$$\mathscr{L} : P = P_1 + t\langle 1 , m\rangle \;,\; t \in \mathbf{R} \qquad (9)$$

Ejemplo 1 Calcular la pendiente de la recta $\mathscr{L}$ que pasa por los puntos $P_1(5 , 3)$ y $P_2(2 , -6)$, y obtener la ecuación paramétrica vectorial de la forma de la ecuación (9) que describa esta recta.

Solución. El vector de dirección de la recta buscada es

$$a = P_2 - P_1 = \langle 2 , -6\rangle - \langle 5 , 3\rangle = \langle -3 , -9\rangle$$

Luego, por la Definición 2.2 : $m = \frac{-9}{-3} = 3$

Como $P_1(5 , 3) \in \mathscr{L}$, entonces una ecuación paramétrica vectorial de $\mathscr{L}$ es

$$\mathscr{L} : P = \langle 5 , 3\rangle + t\langle 1 , 3\rangle \;,\; t \in \mathbf{R}$$ ■

OBSERVACIONES 2.4

a) Puesto que un vector de dirección de la recta que pasa por $P_1(x_1 , y_1)$ y $P_2(x_2 , y_2)$ es

$$a = P_2 - P_1 = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1\rangle$$

se sigue que de la Definición 2.2, si $x_1 \neq x_2$, entonces la pendiente de la recta $\mathscr{L}$ está dada por :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

b) Se dice que una recta con un vector de dirección de la forma $\langle h , 0\rangle$, es una *recta horizontal* (paralela al eje X) y su pendiente es : $m = \frac{0}{h} = 0$

c) Si una recta tiene un vector de dirección de la forma $\langle 0 , k\rangle$, se dice que la recta es *vertical* (paralela al eje Y), y su pendiente $m = \frac{h}{0}$ no está definida.

> **Definición 2.3** *Rectas paralelas*
>
> Dos rectas en el plano, $\mathscr{L}_1 : P = P_1 + t\,a \;,\; t \in \mathbf{R}$ y $\mathscr{L}_2 : P = P_2 + s\,b \;,\; s \in \mathbf{R}$, son paralelas si y sólo si sus vectores de dirección son paralelos ; esto es
>
> $$\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow a \parallel b$$

Ejemplo 2 Determinar si la recta $\mathscr{L}_1$ que pasa por $P_1(3 , 5)$ y $P_2(2 , 8)$ es paralela a la recta $\mathscr{L}_2$ que pasa por $Q_1(-1 , 9)$ y $Q_2(7 , -15)$. Obtener la ecuación vectorial de cada una.

Solución. El vector de dirección de la recta $\mathscr{L}_1$ es

$$a = P_2 - P_1 = \langle 2 , 8\rangle - \langle 3 , 5\rangle = \langle -1 , 3\rangle$$

y el de $\mathscr{L}_2$ es : $b = Q_2 - Q_1 = \langle 7 , -15\rangle - \langle -1 , 9\rangle = \langle 8 , -24\rangle = -8\langle -1 , 3\rangle$

Obsérvese que $b = r\,a \Rightarrow b \parallel a$, por tanto : $\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2$

$$\therefore \quad P_1 \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow \mathscr{L}_1 : P = \langle 3 , 5\rangle + t\langle -1 , 3\rangle \;,\; t \in \mathbf{R}$$

$$Q_1 \in \mathscr{L}_2 \Rightarrow \mathscr{L}_2 : P = \langle -1 , 9\rangle + s\langle -1 , 3\rangle \;,\; s \in \mathbf{R}$$ ■

> **TEOREMA 2.2** Si $\mathscr{L}_1 : P = P_1 + t\,a \;,\; t \in \mathbf{R}$ y $\mathscr{L}_2 : P = P_1 + s\,b \;,\; s \in \mathbf{R}$, entonces:
>
> $$\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow a \parallel b$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Probaremos que si $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 \Rightarrow a \parallel b$

En efecto :

Sea $Q \in \mathscr{L}_1$; tal que $Q \neq P_1$

Como $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 \Rightarrow Q \in \mathscr{L}_2$, y por el Teorema 2.1 :

$$Q \in \mathscr{L}_1 \Leftrightarrow (Q - P_1) \parallel a$$
$$Q \in \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow (Q - P_1) \parallel b$$

En consecuencia , por transitividad : $a \parallel b$

($\Leftarrow$) Ahora probaremos que si $a \parallel b \Rightarrow \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$

En efecto , siendo $Q \in \mathscr{L}_1 \Leftrightarrow (Q - P_1) \parallel a \Leftrightarrow (Q - P_1) \parallel b \Rightarrow Q \in \mathscr{L}_2$

Por tanto , $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$

TEOREMA 2.3 Si $\mathscr{L}_1 : P = P_1 + ta$, $t \in \mathbb{R}$ y $\mathscr{L}_2 : P = P_2 + sa$, $s \in \mathbb{R}$: entonces

$$P_2 \in \mathscr{L}_1 \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Probaremos que si $P_2 \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$

En efecto , en el Ejemplo 3 de la Sección 1.7 , demostramos que si

$$D = B + C \text{ y } B \parallel A \Rightarrow D \parallel A \Leftrightarrow C \parallel A \quad (1)$$

Luego , partiendo de la siguiente identidad

$$\underbrace{P - P_1}_{D} = \underbrace{(P_2 - P_1)}_{B} + \underbrace{(P - P_2)}_{C}$$

y como por hipótesis $P_2 \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow (P_2 - P_1) \parallel a$, por (1) implica que

$$(P - P_1) \parallel a \Leftrightarrow (P - P_2) \parallel a \quad (2)$$

Ahora , si $P \in \mathscr{L}_1 \Leftrightarrow (P - P_1) \parallel a$, y por (2)

$$\Leftrightarrow (P - P_2) \parallel a \Rightarrow P \in \mathscr{L}_2$$

En consecuencia : $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$

($\Leftarrow$) Si $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 \Rightarrow P_2 \in \mathscr{L}_1$. Trivial ■

TEOREMA 2.4 Sean las rectas $\mathscr{L}_1 : P = P_1 + ta$, $t \in \mathbb{R}$ y $\mathscr{L}_2 : P = P_2 + sb$, $s \in \mathbb{R}$, entonces : $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow P_2 \in \mathscr{L}_1$ y $a \parallel b$

Demostración.

($\Rightarrow$) Probaremos que si $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 \Rightarrow P_2 \in \mathscr{L}_1$ y $a \parallel b$

En efecto , si $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$ y dado que $P_2 \in \mathscr{L}_2 \Rightarrow P_2 \in \mathscr{L}_1$ (Teor. 2.3)

Luego , la ecuación de $\mathscr{L}_1$ se puede escribir , $\mathscr{L}_1 : P = P_2 + ta$, $t \in \mathbb{R}$ y si comparamos con la ecuación de $\mathscr{L}_2 : P = P_2 + sb$, $s \in \mathbb{R}$, y aplicando el Teorema 2.2 , llegamos a la conclusión de que $a \parallel b$.

($\Leftarrow$) Probaremos que si $P_2 \in \mathscr{L}_1$ y $a \parallel b \Rightarrow \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$

En efecto , $P_2 \in \mathscr{L}_1$ y el Teorema 2.3 implican que $\mathscr{L}_1 : P = P_2 + ta$, $t \in \mathbb{R}$

Comparando esta ecuación con la de $\mathscr{L}_2 : P = P_2 + sb$, usando el Teorema 2.2 y el hecho de que $a \parallel b$, obtenemos : $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$ ■

Ejemplo 3 Si $\mathscr{L}_1$ contienen al punto $P_1(1 , -5)$, $\mathscr{L}_2$ contiene a $P_2(-2 , -3)$ y $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ tienen ambas al vector $a = \langle 3 , 2\rangle$ como vector de dirección. Coinciden ambas rectas?

Solución. Si $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ tienen el mismo vector de dirección entonces son paralelas. Coincidirán si y sólo si P_1 y P_2 están sobre ambas rectas ; esto es

$$\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 \text{ , si } (P_2 - P_1) \parallel a \Leftrightarrow (P_2 - P_1) \cdot a^{\perp} = 0$$

Entonces : $(\langle -2 , -3\rangle - \langle 1 , -5\rangle) \cdot \langle -2 , 3\rangle = \langle -3 , 2\rangle \cdot \langle -2 , 3\rangle = 12 \neq 0$

Por lo tanto , $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ no coinciden , es decir , $\mathscr{L}_1 \neq \mathscr{L}_2$ ■

Ejemplo 4 Determinar la pendiente de las siguientes rectas paralelas

$\mathscr{L}_1 : P = \langle x_1 , x_2\rangle + t\langle 2 , b\rangle , t \in \mathbb{R}$, $b > 0$;

$\mathscr{L}_2 : \langle 3 , -2b\rangle \cdot [P - \langle -1 , 5\rangle] = 0$

Solución. Si $a_1 = \langle 2 , b\rangle$ es el vector de dirección de $\mathscr{L}_1 \Rightarrow m = \frac{b}{2}$

$n = \langle 3 , -2b\rangle$ es el vector normal de $\mathscr{L}_2$.

Si $\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2 \Rightarrow a_1 \cdot n = 0 \Rightarrow \langle 2 , b\rangle \cdot \langle 3 , -2b\rangle = 0$

$$\Rightarrow 6 - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow b = \sqrt{3} \text{ ó } b = -\sqrt{3}$$

Por definición de $\mathscr{L}_1$, elegimos $b = \sqrt{3}$

En consecuencia , la pendiente de las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ es , $m = \sqrt{3}/2$ ■

Ejemplo 5 Determinar el valor de m + n para que las rectas

$\mathscr{L}_1 = \{\langle 2 , 0\rangle + t\langle m , 1\rangle \mid t \in \mathbb{R}\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{\langle 1/m , 0\rangle + s\langle -2 , n\rangle \mid s \in \mathbb{R}\}$ sean coincidentes.

Solución. Por el Teorema 2.4 , si $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow P_2 \in \mathscr{L}_1$ y $a_1 \parallel a_2$

Si $P_2 \in \mathscr{L}_1 \Leftrightarrow (P_2 - P_1) \cdot a_1^{\perp} = 0$ (Corolario del Teorema 2.1)

$\Rightarrow ((1/m , 0) - (2 , 0)) \cdot (-1 , m) = 0 \Leftrightarrow (\frac{1}{m} - 2 , 0) \cdot (-1 , m) \Rightarrow m = 1/2$

Si $a_1 \parallel a_2 \Rightarrow a_1 \cdot a_2^{\perp} = 0 \Rightarrow (m , 1) \cdot (-n , -2) = 0$

$\Rightarrow -mn - 2 = 0$, de donde $n = -4$

$\therefore\ m + n = -7/2$ ■

Ejemplo 6 Dadas las rectas $\mathscr{L}_1 = \{(x + 1 , 4x - 1) + t(x^2 + x , -3x^2 - 2x + 1)\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{(2x + 2 , -2x + 1) + s(-2x^2 , 2x^2 + 2x)\}$. Hallar $x \in \mathbb{R}$ tal que $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ no sean coincidentes.

Solución. Sean $a_1 = (x^2 + x , -3x^2 - 2x + 1)$ y $a_2 = (-2x^2 , 2x^2 + 2x)$ los vectores de dirección no nulos de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$.

Si $a_1 \neq 0 \Rightarrow (x(x + 1) , (-3x + 1)(x + 1)) \neq (0 , 0)$, implica que : $x \neq -1$

$a_2 \neq 0 \Rightarrow (-2x^2 , 2x(x + 1)) \neq (0 , 0)$, implica que : $x \neq 0$

O sea , no existen $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ para $x = -1$ y $x = 0$

Supongamos que $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ sean coincidentes , esto es ,

$\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow P_1 \in \mathscr{L}_2$ y $a_1 \parallel a_2$

$\Leftrightarrow (P_2 - P_1) \cdot a_2^{\perp} = 0 \wedge a_1 \cdot a_2^{\perp} = 0$

Si $(P_2 - P_1) \cdot a_2^{\perp} = 0 \Rightarrow (x + 1 , -6x + 2) \cdot (-2x^2 - 2x , -2x^2) = 0$

de donde : $x (x - 1) (5x + 1) = 0$; como $x \neq 0 \Rightarrow x = 1$ ó $x = -1/5$

Si $a_1 \cdot a_2^{\perp} = 0 \Rightarrow (x(x + 1) , (-3x + 1)(x + 1)) \cdot (-2x(x + 1) , -2x^2) = 0$

de donde obtenemos : $4x^2 (x + 1) (x - 1) = 0$; como $x \neq 0$ y $x \neq -1 \Rightarrow x = 1$

Luego , $(x = 1$ ó $x = -1/5) \wedge (x = 1) \Rightarrow x = 1$

Por lo que , $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son coincidentes si $x = 1$

En consecuencia , $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son no coincidentes si $x \in \mathbb{R} - \{-1 , 0 , 1\}$ ■

Ejemplo 7 Hallar la ecuación normal de la recta $\mathscr{L}$ cuyos puntos equidistan de las rectas $\mathscr{L}_1 = \{(0 , 1) + t(4 , 2) , t \in \mathbb{R}\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{(0 , -5) + r(4 , 2) , r \in \mathbb{R}\}$.

Solución. Obsérvese que $a_1 = a_2 = 2(2 , 1)$

Luego , si **a** es el vector de dirección de $\mathscr{L} \Rightarrow \mathbf{a} = (2 , 1)$

Como $\mathscr{L}$ es la paralela media de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, y si $P_1 \in \mathscr{L}_1$, $P_2 \in \mathscr{L}_2$ y $Q \in \mathscr{L}$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = \frac{1}{2}[(0 , 1) + (0 , -5)] = (0 , -2)$$

Por lo que , la ecuación normal de la recta buscada es $\mathscr{L} : \mathbf{a}^{\perp} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) = 0$

$\therefore\ \mathscr{L} : (-1 , 2) \cdot (\mathbf{P} - (0 , -2)) = 0$ ■

Ejemplo 8 Establecer el valor de verdad de las siguientes afirmaciones

1. Existe por lo menos un $k \in \mathbb{R}$ tal que $\mathscr{L}_1 = \{(2 , 3) + t(6k , \frac{1}{2} - 3k)\}$ sea paralela a la recta $\mathscr{L}_2 : x = 0$
2. Si $\mathscr{L}_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$ y $\mathscr{L}_2 = \{(3 , -1) + s(-2 , 2)\} \Rightarrow \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$
3. Existe por lo menos un $k \in \mathbb{R}$ para que $\mathscr{L}_1 = \{(1 , 2) + r(k , 3)\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{(7 , 5) + s(1 , -\frac{1}{2}k)\}$ son paralelas.
4. Sea $\mathscr{L}_1 = \{P_1 + t\,\mathbf{a}\}$ un recta no vertical. Si $Q_1 \notin \mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2 = \{Q_1 + s\,\mathbf{a}\}$, entonces $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \neq \varnothing$

Solución.

1. Dado que $\mathscr{L}_2$ es una recta vertical , entonces para que $\mathscr{L}_1$ sea paralela a $\mathscr{L}_2$ es necesario que $\mathscr{L}_1$ sea vertical , esto es
   $(6k , \frac{1}{2} - 3k) \parallel (0 , 1) \Leftrightarrow (6k , \frac{1}{2} - 3k) \cdot (-1 , 0) = 0$, de donde : $k = 0 \in \mathbb{R}$
   Luego , la afirmación es *verdadera*
2. Si $\mathscr{L}_1 = \{(1 , 1) + t(1 , -1)\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{(3 , -1) + s(-2 , 2)\}$, entonces
   $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow (P_2 - P_1) \cdot a_1^{\perp} = 0$ y $a_2 \parallel a_1$
   $\Leftrightarrow (2 , -2) \cdot (1 , 1) = 2 - 2 = 0$ y $a_2 = -2(1 , -1) = r\,a_1 \Rightarrow a_2 \parallel a_1$
   Se cumplen ambas condiciones , luego la afirmación es *verdadera*.
3. Si $\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2 \Rightarrow m_1 = m_2$, es decir : $\frac{3}{k} = -\frac{1}{2}k \Leftrightarrow k^2 = -6 \Rightarrow \nexists\, k \in \mathbb{R}$
   Por lo que $\mathscr{L}_1 \nparallel \mathscr{L}_2$; luego , la afirmación es *falsa*.
4. Como $Q_1 \notin \mathscr{L}_1$, las rectas dadas son paralelas y no coincidentes.
   Luego , $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \varnothing$, por lo que la afirmación es *falsa*. ■

Ejemplo 9 Sean los conjuntos : $\mathscr{L}_1 = \{\mathbf{P} = (-2 + 3t , 3 - t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{(1 , 3) \cdot (\mathbf{P} - (1 , 2)) = 0 \mid \mathbf{P} \in \mathbb{R}^2\}$ Demostrar que $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ representan rectas y que $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$

Demostración. En efecto , el conjunto $\mathscr{L}_1$ se puede escribir de la forma

$\mathscr{L}_1 : \mathbf{P} = (-2 , 3) + t(3 , -1) , t \in \mathbb{R}$, que por definición es una recta que pasa por $P_1(-2 , 3)$ y cuyo vector de dirección es $\mathbf{a} = (3 , -1)$

El conjunto $\mathscr{L}_2$ es la forma normal de la ecuación de una recta cuyo punto de paso es $P_2(1 , 2)$ y cuyo vector de dirección es

$\mathbf{b} = (1 , 3)^{\perp} = (-3 , 1) \Rightarrow \mathscr{L}_2 : \mathbf{P} = (1 , 2) + s(-3 , 1) , s \in \mathbb{R}$

Obsérvese que $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$, esto es , $\mathscr{L}_1 \| \mathscr{L}_2$

Ahora debemos verificar que $P_1 \in \mathscr{L}_2$ y $P_2 \in \mathscr{L}_1$

En efecto , si $P_1 \in \mathscr{L}_2 \Rightarrow (P_2 - P_1) \cdot n_2 = \langle 3 , -1\rangle \cdot \langle 1 , 3\rangle = 3 - 3 = 0$

Entonces , $(P_2 - P_1) \| \mathbf{b}$, luego $P_1 \in \mathscr{L}_2$, o sea que $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}_2$

Si $P_2 \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow (P_1 - P_2) \cdot n_1 = \langle -3 , 1\rangle \cdot \langle 1 , 3\rangle = -3 + 3 = 0$

Entonces , $(P_1 - P_2) \| \mathbf{a}$, luego $P_2 \in \mathscr{L}_1$, o sea : $\mathscr{L}_2 \subset \mathscr{L}_1$

En consecuencia , si $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_2 \subset \mathscr{L}_1 \Rightarrow \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$ ■

Definición 2.4 *Rectas ortogonales*

Dos rectas en el plano $\mathscr{L}_1 : P = P_1 + t\,\mathbf{a} , t \in \mathbb{R}$ y $\mathscr{L}_2 : P = Q_1 + r\,\mathbf{b} , r \in \mathbb{R}$, se dice que son ortogonales si y sólo si sus vectores de dirección son ortogonales. Esto es

$$\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$

Si m_1 y m_2 son las pendientes de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, entonces sus vectores de dirección tienen la forma , $\mathbf{a}_1 = \langle 1 , m_1\rangle$ y $\mathbf{a}_2 = \langle 1 , m_2\rangle$. Luego , si

$$\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2 \Leftrightarrow \langle 1 , m_1\rangle \cdot \langle 1 , m_2\rangle = 0 \Leftrightarrow 1 + m_1 m_2 = 0$$

de donde : $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$ ó $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$

Entonces , dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si , la pendiente de una es el *negativo del recíproco* de la pendiente de la otra.

Ejemplo 10 Demostrar que la recta $\mathscr{L}_1$ que contiene a los puntos Q(-1 , -2) y R(2 , 2) es perpendicular a la recta $\mathscr{L}_2$ que contiene a los puntos S(-5 , 7) y T(3 , 1).

Demostración. En efecto , sea $\mathbf{a}_1$ el vector de dirección de $\mathscr{L}_1$, entonces

$$\mathbf{a}_1 = \overline{QR} = R - Q = \langle 2 , 2\rangle - \langle -1 , -2\rangle = \langle 3 , 4\rangle$$

Sea $\mathbf{a}_2$ el vector de dirección de $\mathscr{L}_2$, entonces

$$\mathbf{a}_2 = \overline{ST} = T - S = \langle 3 , 1\rangle - \langle -5 , 7\rangle = \langle 8 , -6\rangle$$

Puesto que , $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \langle 3 , 4\rangle \cdot \langle 8 , -6\rangle = 24 - 24 = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2 \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2$ ■

Ejemplo 11 Sean las rectas $\mathscr{L}_1 : P = P_1 + t\,\mathbf{a} , t \in \mathbb{R}$ y $\mathscr{L}_2 : P = P_2 + r\,\mathbf{b} , r \in \mathbb{R}$, donde $\mathbf{a} = \langle 4 - k , k + 3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle k - 3 , k + 2\rangle$. Si $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2$ y si

$\mathbf{v} = \mathbf{a} - \frac{7}{5}\mathbf{b}$; hallar la norma de $\mathbf{v}$.

Solución. Si $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \langle 4 - k , k + 3\rangle \cdot \langle k - 3 , k + 2\rangle = 0$

$$\Rightarrow (4 - k)(k - 3) + (k + 3)(k + 2) = 0$$

de donde obtenemos , $k = 1/2$. Luego : $\mathbf{a} = \left\langle 4 - \frac{1}{2} , \frac{1}{2} + 3\right\rangle = \frac{7}{2}\langle 1 , 1\rangle$

$$\mathbf{b} = \left\langle \frac{1}{2} - 3 , \frac{1}{2} + 2\right\rangle = \frac{5}{2}\langle -1 , 1\rangle$$

Por lo que : $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \frac{7}{5}\mathbf{b} = \frac{7}{2}\langle 1 , 1\rangle - \frac{7}{2}\langle -1 , 1\rangle = \langle 7 , 0\rangle \Rightarrow \|\mathbf{v}\| = 7$ ■

Ejemplo 12 Hallar la ecuación vectorial de la mediatriz del segmento $\overline{RS} = \{\langle -1 , 3\rangle + t\langle 6 , -2\rangle , t \in [0 , 1]\}$

Solución. Como el punto P_1 biseca al segmento $\overline{RS}$

$$\Rightarrow P_1 = \langle -1 , 3\rangle + \frac{1}{2}\langle 6 , -2\rangle = \langle 2 , 2\rangle$$

El vector de dirección de $\overline{RS}$ es :

$$\mathbf{b} = \langle 6 , -2\rangle = 2\langle 3 , -1\rangle$$

La mediatriz $\mathscr{L} \perp \overline{RS} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}^{\perp} = \langle 1 , 3\rangle$

Por lo tanto , su ecuación vectorial es

$$\mathscr{L} : P = \langle 2 , 2\rangle + t\langle 1 , 3\rangle , t \in \mathbb{R}$$ ■

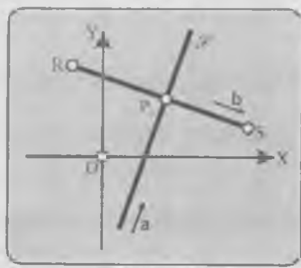


FIGURA 2.14

Ejemplo 13 Hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}$ que pasa por el baricentro del triángulo de vértices A(-2 , 3) , B(7 , 4) y C(4 , -1) y es perpendicular de la recta $\mathscr{L}_1 = \{P_1 + s\langle -1 , -2\rangle \mid s \in \mathbb{R}\}$. En qué punto intercepta $\mathscr{L}$ al eje X?

Solución. En la Figura 2.15 , $\overline{BD}$ es una mediana del triángulo ABC , en donde

$$D = \frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}\langle 2 , 2\rangle = \langle 1 , 1\rangle$$

Si $\overline{DG} = t\,\overline{DB} \Rightarrow G = D + t(B - D)$

es la representación vectorial del baricentro.

Para $t = 1/3$ (propiedad de las medianas) tendremos que. $G = \langle 1 , 1\rangle + \frac{1}{3}\langle 6 , 3\rangle = \langle 3 , 2\rangle \Rightarrow G(3 , 2)$

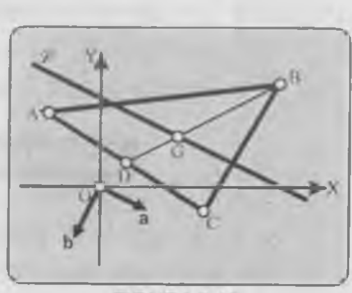


FIGURA 2.15

Si $\mathscr{L} \perp \mathscr{L}_1 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} = \langle -1 , -2\rangle^{\perp} = \langle 2 , -1\rangle$

Por lo tanto , la ecuación vectorial de la recta buscada es

$\mathscr{L}: P = \langle 3, 2\rangle + t\langle 2, -1\rangle, t \in R$

Ahora, como : $\langle x, y\rangle = \langle 3 + 2t, 2 - t\rangle$, si $y = 0 \Rightarrow 2 - t = 0 \Leftrightarrow t = 2$

y para $t = 2$, se tiene : $x = 3 + 2(2) = 7 \Rightarrow$ X - intersección = (7 , 0) ■

Ejemplo 14 Los puntos P(12 , 3) y Q(4 , 9) son dos vértices de un cuadrado PQRS y también de un triángulo equilátero PQT , tal como se muestra en la Figura 2.16. Hallar la ecuación vectorial de la recta $\overleftrightarrow{RT}$.

Solución. El problema se reduce a calcular el punto de paso R y el punto T.

Luego, si $\overline{QP} = \mathbf{P} - \mathbf{Q} \Rightarrow \overline{QP} = \langle 12, 3\rangle - \langle 4, 9\rangle = \langle 8, -6\rangle$

$\overline{RQ} \perp \overline{QP} \Rightarrow \mathbf{Q} - \mathbf{P} = \overline{QP}^{\perp} \Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{Q} - \overline{QP}^{\perp}$

$\Rightarrow \mathbf{R} = \langle 4, 9\rangle - \langle 6, 8\rangle = \langle -2, 1\rangle$

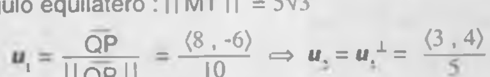
Punto medio de $\overline{QP}$: $M = \left(\frac{12+4}{2}, \frac{3+9}{2}\right) \Rightarrow M(8, 6)$

Lado del cuadrado y del triángulo equilátero :

$\|\overline{QP}\| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$

Altura del triángulo equilátero : $\|\overline{MT}\| = 5\sqrt{3}$

FIGURA 2.16



$$\mathbf{u}_1 = \frac{\overline{QP}}{\|\overline{QP}\|} = \frac{\langle 8, -6\rangle}{10} \Rightarrow \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1^{\perp} = \frac{\langle 3, 4\rangle}{5}$$

Si $\overline{MT} = \mathbf{T} - \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{M} + \|\overline{MT}\|\, \mathbf{u}_2$

$$\Rightarrow \mathbf{T} = \langle 8, 6\rangle + (5\sqrt{3})\frac{\langle 3, 4\rangle}{5} = \langle 8 + 3\sqrt{3}, 6 + 4\sqrt{3}\rangle$$

$\overline{RT} = \mathbf{T} - \mathbf{R} = \langle 8 + 3\sqrt{3}, 6 + 4\sqrt{3}\rangle - \langle -2, 1\rangle = \langle 10 + 3\sqrt{3}, 5 + 4\sqrt{3}\rangle$

Por lo tanto, la ecuación vectorial de $\overline{RT}$ es

$$\overleftrightarrow{RT} : \mathbf{L} = \langle -2, 1\rangle + t\langle 10 + 3\sqrt{3}, 5 + 4\sqrt{3}\rangle, t \in R$$ ■

EJERCICIOS : Grupo 17

En los ejercicios 1 - 4 determinar si las rectas cuyas ecuaciones vectoriales se dan , son : a) paralelas , b) coincidentes , c) perpendiculares , d) oblicuas.

1. $\mathscr{L}_1 : P = \langle 3, -5\rangle + t\langle 2, -3\rangle, t \in \mathbf{R}$, $\mathscr{L}_2 : P = \langle -1, 1\rangle + r\langle -6, 9\rangle, r \in \mathbf{R}$
2. $\mathscr{L}_1 : P = \langle 2, -1\rangle + t\langle -2, 6\rangle, t \in \mathbf{R}$, $\mathscr{L}_2 : P = \langle 0, 1\rangle + r\langle 13, -39\rangle, t \in \mathbf{R}$

3. $\mathscr{L}_1 : P = \langle 1, -2\rangle + t\langle -2, -3\rangle\, t \in \mathbf{R}$, $\mathscr{L}_2 : P = \langle 9, 2\rangle + r\langle 4, -3\rangle, r \in \mathbf{R}$
4. $\mathscr{L}_1 : P = \langle 4, 7\rangle + t\langle -19, 57\rangle, t \in \mathbf{R}$, $\mathscr{L}_2 : P = \langle 3, 0\rangle + r\langle 51, 17\rangle, r \in \mathbf{R}$
5. Determinar la pendiente de las rectas paralelas $\mathscr{L}_1 = \{P_1 + t\langle a, 6\rangle \mid t \in \mathbf{R}, a < 0\}$ y $\mathscr{L}_2 : \langle 3a, -2\rangle \cdot (P - \langle 2, -1\rangle) = 0$
6. Determinar el valor de a + b para las rectas $\mathscr{L}_1 : P = \langle -1, 0\rangle + t\langle -a, 1\rangle$ y $\mathscr{L}_2 : P = \langle 1/b, 0\rangle + a\langle -3, b\rangle$ sean coincidentes
7. Hallar la ecuación normal de la recta $\mathscr{L}$ cuyos puntos equidistan de las rectas $\mathscr{L}_1 = \{\langle -1, 5\rangle + t\langle 3, -6\rangle \mid t \in R\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{\langle 5, -9\rangle + r\langle 7, -14\rangle \mid r \in R\}$
8. Sean A(2 , 3) y B(-4 , 7) dos puntos de $\mathbf{R}^2$. Cuántas de las siguientes expresiones vectoriales representa a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.
   a) $P = \langle 2t + 1, 8 + 3t\rangle, t \in \mathbf{R}$ c) $P = \langle 5 + 2t, 14 + 3t\rangle, t \in \mathbf{R}$
   b) $P = \langle 2t - 3, 4 + 3t\rangle, t \in \mathbf{R}$ d) $P = \langle 2t - 1, 5 + 3t\rangle, t \in \mathbf{R}$
9. Hallar la ecuación vectorial de la mediatriz del segmento $\overline{AB} = \{\langle -2, 3\rangle + t\langle 6, -4\rangle, t \in [0, 1]\}$
10. Los extremos de una de las diagonales de un rombo son S(2 , -1) y T(14 , 3). Hallar la ecuación vectorial que contiene a la otra diagonal.
11. Determinar el valor de m + n para que las rectas $\mathscr{L}_1 : P = \langle -1, 2\rangle + t\langle m, 2\rangle, t \in \mathbf{R}$ y $\mathscr{L}_2 = \{\langle 1/n, 0\rangle + r\langle 3, -n\rangle, r \in R\}$, sean coincidentes.
12. Hallar la pendiente de la recta que pasa por el origen y por el baricentro del triángulo de vértices : A(-1 , -4) , B(1 , 5) y C(5 , -2)
13. Si $\mathscr{L}_1 = \{\langle a^3 + 3, -7\rangle + t\langle 1 - a^2, a\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{\langle a, 3a - 7\rangle + s\langle a - 5, 8 - 3a\rangle \mid s \in \mathbf{R}\}$, hallar $a \in \mathbf{N}$ tal que $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ sean rectas coincidentes.
14. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por (-3 , 1) y es tangente a la circunferencia $\mathscr{C} = \{P \in \mathbf{R}^2 \mid \|P\| = 2\sqrt{2}\}$
15. Sean A(-3 , 2) , B , C(-1 , 13) y D los vértices de un rectángulo, tal que $\overline{AC}$ es una de las diagonales y $\overline{AB}$ es ortogonal al vector $\mathbf{v} = \langle 4, -3\rangle$. Hallar :
    a) La ecuación vectorial de la recta que contiene a $\overline{BD}$. b) $\text{Proy}_{\overline{BD}}\overline{AC}$
16. El triángulo ABC está dado por las coordenadas de sus vértices , A(2 , -2) , B(6 , 1) y C(-2 , 0). Se necesita :
    a) Escribir la ecuación vectorial del lado $\overline{AB}$.
    b) Escribir la ecuación vectorial de la altura $\overline{CD}$ y calcular $h = \|\overline{CD}\|$
    c) Hallar el ángulo θ entre la altura $\overline{CD}$ y la mediana $\overline{BM}$
    d) Escribir la ecuación de las bisectrices $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ de los ángulos interior y exterior en el vértice A.

ECUACIONES CARTESIANAS DE LA RECTA

2.6 FORMA GENERAL DE LA ECUACION DE UNA RECTA

La forma general de la ecuación de una recta es

$$\mathscr{L} : Ax + By + C = 0$$

donde al menos uno de los coeficientes reales A o B es diferente de cero.

En efecto, cualquier vector no nulo que sea perpendicular al vector de dirección de una recta $\mathscr{L}$ es un vector normal a $\mathscr{L}$. En la Figura 2.17 , se muestra a una recta $\mathscr{L}$ que contiene al punto $P_1(x_1 , y_1)$, así como al vector $n = \langle A , B\rangle$, normal a $\mathscr{L}$, donde A y B ∈ **R** , uno de los cuales es diferente de cero. Un punto P(x , y) está sobre $\mathscr{L}$ si y sólo si $P - P_1$ es paralelo a $\mathscr{L}$, es decir, si sólo si $P - P_1$ es perpendicular a n. Entonces una ecuación de $\mathscr{L}$ es :

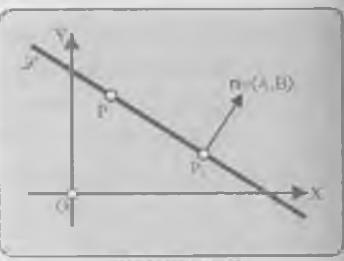


FIGURA 2.17

$$(\mathbf{P} - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n}} \quad (10)$$

Puesto que $\mathbf{P} = \langle x , y\rangle$, $\mathbf{P}_1 = \langle x_1 , y_1\rangle$ y $n = \langle A , B\rangle$, la ecuación se puede escribir de la forma

$$\langle x , y\rangle \cdot \langle A , B\rangle = \langle x_1 , y_1\rangle \cdot \langle A , B\rangle \Leftrightarrow Ax + By = Ax_1 + By_1$$

Dado que x_1 , y_1 , A y B son constantes , el número $Ax_1 + By_1$, es también constante, y podemos denotarlo por -C . Se tendrá entonces que

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \quad (11)$$

Como la ecuación **(11)** no contiene vectores se le denomina también , *ecuación escalar* de $\mathscr{L}$.

Nota. Si $\mathbf{n} = \langle A , B\rangle$ es un vector normal a una recta $\mathscr{L}$, entonces $\mathbf{a} = \langle -B , A\rangle$ es un vector de dirección de $\mathscr{L}$. Por consiguiente la pendiente de $\mathscr{L}$ está dada por

$$m = -\frac{A}{B} \ , \ \text{si } B \neq 0$$

Ejemplo 1 Hallar la ecuación general de la recta que contienen al punto R(-3 , 2) y que tiene a $\mathbf{a} = \langle 1 , -2\rangle$ como vector de dirección.

Solución. Usaremos dos métodos para resolver el problema

1. Dado que $\mathbf{a} = \langle 1 , -2\rangle \Rightarrow \mathbf{n} = \mathbf{a}^{\perp} = \langle 2 , 1\rangle$

Si P(x , y) es el punto genérico de la recta $\mathscr{L}$, entonces

$$(\mathbf{P} - \mathbf{R}) \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow [\langle x , y\rangle - \langle -3 , 2\rangle] \cdot \langle 2 , 1\rangle = 0$$
$$\Leftrightarrow \langle x + 3 , y - 2\rangle \cdot \langle 2 , 1\rangle = 0$$

de donde obtenemos , $\mathscr{L} : 2x + y + 4 = 0$

2. Si $\mathbf{a} = \langle -1 , 2\rangle \Rightarrow \mathbf{n} = \langle 2 , 1\rangle = \langle A , B\rangle \Leftrightarrow A = 2$ y $B = 1$

Entonces en la ecuación **(11)** , $\mathscr{L} : 2x + y + C = 0$

Como $R(-3 , 2) \in \mathscr{L} \Rightarrow 2(-3) + (2) + C = 0 \Leftrightarrow C = 4$

$$\therefore \ \mathscr{L} : 2x + y + 4 = 0$$ ■

OBSERVACIONES 2.5

a) Puesto que los vectores $\mathbf{n}_1 = \langle A , B\rangle$ y $\mathbf{n}_2 = \langle -B , A\rangle$ son perpendiculares, y si son respectivamente normales a las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, se tiene que las ecuaciones de la forma

$$\mathbf{Ax + By + C = 0}$$
$$\mathbf{- Bx + Ay + k = 0} \quad \mathbf{(12)}$$

donde A o B es diferente de cero , son ecuaciones generales de dos rectas que son perpendiculares.

b) Si $\mathbf{n} = \langle A , B\rangle$ es un vector normal a una recta $\mathscr{L}$, entonces es también normal a cualquier otra recta paralela a $\mathscr{L}$. Esta propiedad se indica por las ecuaciones

$$\mathbf{Ax + By + C = 0}$$
$$\mathbf{Ax + By + k = 0} \quad \mathbf{(13)}$$

donde A o B es diferente de cero.

Ejemplo 2 Hallar la ecuación general de la recta que pasa por A(1 , 3) y es perpendicular a la recta $\mathscr{L}_1 : 2x - 5y + 7 = 0$

Solución. La ecuación **(12)** establece que la recta buscada tiene por ecuación

$$\mathscr{L} : 5x + 2y + k = 0$$

Como $A(1 , 3) \in \mathscr{L} \Rightarrow 5(1) + 2(3) + k = 0$, de donde obtenemos : $k = -11$

$$\therefore \ \mathscr{L} : 5x + 2y - 11 = 0$$ ■

Ejemplo 3 Hallar la ecuación general de la recta que pasa por S(-6 , 2) y es paralela a la recta $\mathscr{L}_1 : 5x + 6y - 9 = 0$

Solución. Por la ecuación **(13)** , la recta buscada tendrá por ecuación

$$\mathscr{L}_2 : 5x + 6y + k = 0 \quad (1)$$

Ahora , si $S(-6 , 2) \in \mathscr{L}_2 \Rightarrow 5(-6) + 6(2) + k = 0$, de donde , $k = 18$

Por lo que , en (1) , tendremos , $\mathscr{L}_2 : 5x + 6y + 18 = 0$ ■

2.7 FORMA PUNTO PENDIENTE

En la figura 2.18 se muestra a una recta $\mathscr{L}$ que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$. Si $P(x, y)$ es un punto genérico de $\mathscr{L}$, entonces un vector direccional de dicha recta es

$$\mathbf{a} = P - P_1 = \langle x - x_1 , y - y_1 \rangle$$

Luego, por la Definición 2.2, la pendiente m de la recta $\mathscr{L}$ está dada por

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

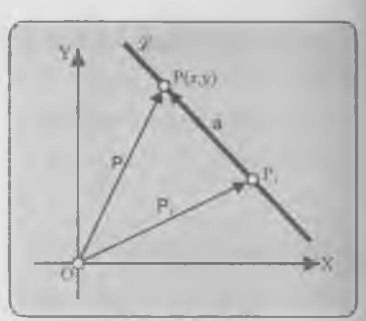


FIGURA 2.18

de donde obtenemos, $\boxed{\mathscr{L} : y - y_1 = m(x - x_1)}$ (14)

Ejemplo 4 Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $P_1(1, -3)$ y cuyo vector de dirección es $\mathbf{a} = \langle 5, 2 \rangle$

Solución. Si hacemos $x_1 = 1$, $y_1 = -3$ y $m = 2/5$, en la ecuación **(14)** se tiene

$$y - (-3) = \frac{2}{5}(x - 1) \Leftrightarrow \mathscr{L} : 2x - 5y - 17 = 0$$ ■

Nota. Si una recta $\mathscr{L}$ contiene a los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, con $x_1 \neq x_2$, entonces la pendiente m de la recta está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si se sustituye esta expresión de m en la ecuación (14) se obtiene la ecuación equivalente

$$\boxed{y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)} \quad (15)$$

Esta es la ecuación cartesiana de $\mathscr{L}$ que pasa por dos puntos dados.

Ejemplo 5 Hallar la ecuación general de la recta que pasa por los puntos S(-4, 3) y T(-2, -1)

Solución. Si en la ecuación (15) se sustituye x_1, y_1 por las coordenadas del punto S(-4, 3), y a x_2 e y_2 por las coordenadas del punto T(-2, -1) obtenemos

$$y - 3 = \left(\frac{-1 - 3}{-2 + 4}\right)(x + 4 \Leftrightarrow \mathscr{L} : 2x + y + 5 = 0$$ ■

2.8 FORMA PENDIENTE Y ORDENADA AL ORIGEN

En la Figura 2.19 se muestra una recta $\mathscr{L}$, no vertical que corta al eje Y en el punto $T(0, b)$, $b \in \mathbb{R}$. El número b se llama la *ordenada en el origen* de $\mathscr{L}$. Si se sustituye a x_1 por 0 y a y_1 por b en la ecuación (14) se obtiene

$$y - b = m(x - 0) \Leftrightarrow \boxed{\mathscr{L} : y = mx + b} \quad (16)$$

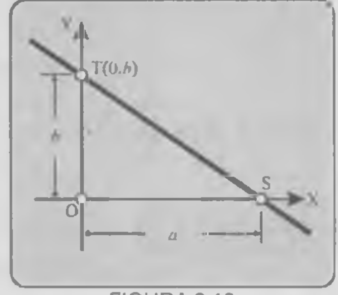


FIGURA 2.19

Si en la ecuación general $Ax + By + C = 0$, $B \neq 0$, se despeja a y en función de x, se obtiene

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Si comparamos con la ecuación (16) resulta que : $m = -A/B$ y $b = -C/B$

Ejemplo 6 Calcular la pendiente y la ordenada al origen de la recta cuya ecuación general es

$$\mathscr{L} : (k - 2n + 5)x + (2k + n - 1)y + (3 + n - 2k) = 0$$

sabiendo que pasa por S(-1, 2) e intercepta al eje X en T(3, 0).

Solución. Si $S(-1, 2) \in \mathscr{L} \Rightarrow (k - 2n + 5)(-1) + (2k + n - 1)(2) + (3 + n - 2k) = 0$

$$\Rightarrow k + 5n - 4 = 0 \quad (1)$$

y si $T(3, 0) \in \mathscr{L} \Rightarrow (k - 2n + 5)(3) + (2k + n - 1)(0) + (3 + n - 2k) = 0$

$$\Rightarrow k - 5n + 18 = 0 \quad (2)$$

Resolviendo (1) y (2) por simultáneas obtenemos : $k = -7$, $n = 11/5$

$$\Rightarrow \mathscr{L} : (-7 - \frac{22}{5} + 5)x + (-14 + \frac{11}{5} - 1)y + (3 + \frac{11}{5} + 14) = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L} : x + 2y - 3 = 0$$

Despejando y en función de x se tiene : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Luego, por simple inspección : $m = -1/2$ y $b = 3/2$ ■

2.9 FORMA ABSCISA Y ORDENADA AL ORIGEN

En la Figura 2.18 se muestra una recta no horizontal, que intercepta al eje X en el punto $S(a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$. El número a recibe el nombre de *abscisa al origen* de $\mathscr{L}$. Si sustituimos las coordenadas de los puntos $S(a, 0)$ y $T(0, b)$ en la ecuación (15)

se obtiene

$$y - 0 = \left(\frac{b - 0}{0 - a}\right)(x - a) \Leftrightarrow bx + ay = ab$$

Dividiendo ambos miembros entre $a\,b$ resulta

$$\mathscr{L} : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (17)$$

Esta es la ecuación *abscisa y ordenada al origen* de la recta $\mathscr{L}$.

Ejemplo 7 Hallar la ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada al origen suman -1 , y que pasa por el punto S(2 , 2)

Solución. Sea la recta buscada , $\mathscr{L} : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Si $S(2, 2) \in \mathscr{L} \Rightarrow \frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 1 \Leftrightarrow 2a + 2b = ab$ (1)

Dado que $a + b = -1$, entonces : $b = -1 - a$ (2)

Resolviendo (1) y (2) obtenemos : $a_1 = -2$, $a_2 = 1$; $b_1 = 1$, $b_2 = -2$

Por tanto , hay dos soluciones : $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$ ó $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} = 1$

$$\Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : x - 2y + 2 = 0 \text{ ó } \mathscr{L}_2 : 2x - y - 2 = 0$$ ■

2.10 FORMA SIMETRICA

Dada la ecuación paramétrica vectorial de una recta

$$\mathscr{L} : \mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + t\mathbf{a} , t \in \mathbf{R}$$

las componentes h y k del vector de dirección **a** = ⟨h , k⟩ recibe el nombre de *números directores* de $\mathscr{L}$.

Si $P_1(x_1 , y_1)$ es un punto de $\mathscr{L}$, entonces una ecuación paramétrica vectorial de la recta es :

$$\langle x , y\rangle = \langle x_1 , y_1\rangle + t\langle h , k\rangle , t \in \mathbf{R}$$

de donde se obtienen las ecuaciones paramétricas cartesianas

$$x = x_1 + th \quad , \quad y = y_1 + tk$$

despejando t de cada una de estas ecuaciones obtenemos

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{y - y_1}{k} \quad , \quad h \neq 0 \; , \; k \neq 0 \qquad (18)$$

La ecuación (18) recibe el nombre de *forma simétrica* de la ecuación de una recta.

Ejemplo 8 Hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}$, en su forma simétrica que pasa por los puntos S(-1 , 3) y T(4 , -3)

Solución. Un vector de dirección de $\mathscr{L}$ es $\mathbf{a} = \overrightarrow{ST}$

$$\Rightarrow \mathbf{a} = \langle 4 , -3\rangle - \langle -1 , 3\rangle = \langle 5 , -6\rangle$$

Por lo que el par de números directores son : h = 5 y k = -6

Sustituyendo a x_1 e y_1 , en la ecuación (18) , por las coordenadas del punto S o T , se tiene :

$$\frac{x + 1}{5} = \frac{y - 3}{-6} \quad \text{ó} \quad \frac{x - 4}{5} = \frac{y + 3}{-6}$$

Se puede verificar que cada una de estas ecuaciones representa a la misma recta reduciéndolas a su forma general. ■

OBSERVACIONES 2.6 Dada una ecuación general para una recta $\mathscr{L}$, se puede escribir una ecuación equivalente en forma simétrica identificando un punto $P_1(x_1 , y_1)$ que está sobre la gráfica de $\mathscr{L} : Ax + By + C = 0$, y notando que el vector **a** = ⟨-B , A⟩ es un vector de dirección de la gráfica. Por lo tanto, se tiene que la ecuación de $\mathscr{L}$ en forma simétrica es

$$\frac{x - x_1}{-B} = \frac{y - y_1}{A} \qquad (19)$$

Ejemplo 9 Hallar la ecuación en su forma simétrica que sea equivalente a la ecuación $\mathscr{L} : 2x + 5y - 10 = 0$

Solución. Resolvemos la ecuación $2x + 5y - 10 = 0$ asignándole un valor a x , por ejemplo , x = -5 , se obtiene : $2(-5) + 5y - 10 = 0$, de donde , y = 4 ; luego $P_1(-5 , 4)$ es un punto de la gráfica de la ecuación dada. Como A = 2 y B = 5 , el vector **a** = ⟨-5 , 2⟩ es un vector de dirección de $\mathscr{L}$. Por tanto , la ecuación en su forma simétrica es

$$\mathscr{L} : \frac{x + 5}{-5} = \frac{y - 4}{2}$$ ■

OBSERVACION 2.7 Se puede emplear los números directores h y k de una recta $\mathscr{L}$ para determinar otra forma simétrica en función de los ángulos directores α y β (Figura 2.20).

En efecto , recordemos que la pendiente m = k/h , entonces α se puede determinar a través de la ecuación

$$Tg\alpha = \frac{k}{h}$$

y como **a** = ⟨h , k⟩ = ⟨-B , A⟩ es el vector de dirección de la recta $\mathscr{L} : Ax + By + C = 0$,

entonces si $B \neq 0$, el ángulo de dirección a está

dado por $\quad Tg\alpha = -\frac{A}{B}$, $0° \leq \alpha \leq 180°$

Si en la ecuación (14) sustituimos $m = Tg\alpha = \frac{Sen\,\alpha}{Cos\,\alpha}$

tendremos : $\quad y - y_1 = \frac{Sen\,\alpha}{Cos\,\alpha}(x - x_1)$

Pero como $\beta = 90 - \alpha \Rightarrow Cos\,\beta = Cos\,(90 - \alpha) = Sen\,\alpha$

Por lo que :

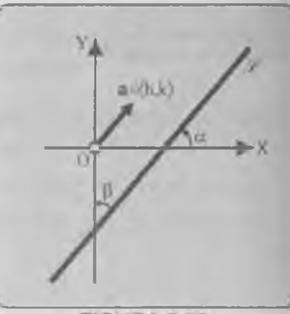


FIGURA 2.20

$$y - y_1 = \frac{Cos\,\beta}{Cos\,\alpha}(x - x_1) \Leftrightarrow \boxed{\mathscr{L}: \frac{x - x_1}{Cos\,\alpha} = \frac{y - y_1}{Cos\,\beta}} \qquad (20)$$

Ejemplo 10 Hallar la ecuación simétrica de la recta que pasa por S(-5 , 3), y cuyo ángulo de dirección α sea 60°.

Solución. Si $\alpha = 60° \Rightarrow \beta = 30°$, luego, los cosenos directores de la recta $\mathscr{L}$ son:

$$Cos\,\alpha = 1/2 \quad y \quad Cos\,\beta = \sqrt{3}/2$$

Por lo tanto , si sustituimos las coordenadas de S en la ecuación (20) obtendremos

$$\mathscr{L}: \frac{x + 5}{1/2} = \frac{y - 3}{\sqrt{3}/2}$$ ■

MISCELANEA DE EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Dados los puntos $P_1(-2 , 3)$ y la recta $\mathscr{L}: 3x - 4y + 8 = 0$, hallar

a) El punto P que es la intersección de $\mathscr{L}$ con la recta que pasa por P_1 y es perpendicular a $\mathscr{L}$.

b) El punto P_2 tal que el punto P divide al segmento orientado $\overline{P_1P_2}$ en la razón r = 3/2.

Solución. a) Sea $\mathscr{L}_1$ la recta que pasa por P_1 y es perpendicular a $\mathscr{L}$. Si $n = \langle 3 , -4\rangle$ es la normal a $\mathscr{L}$, entonces $n_1 = \langle 4 , 3\rangle$ es la normal a $\mathscr{L}_1$, por lo que su ecuación general lo obtenemos a partir de la ecuación (10) , esto es :

$$P \cdot n_1 = P_1 \cdot n_1 \Rightarrow \langle x , y\rangle \cdot \langle 4 , 3\rangle = \langle -2 , 3\rangle \cdot \langle 4 , 3\rangle$$

$$\Rightarrow 4x + 3y = -8 + 9 \Leftrightarrow \mathscr{L}_1: 4x + 3y - 1 = 0$$

$$\therefore \mathscr{L} \cap \mathscr{L}_1 = (3x - 4y + 8 = 0) \cap (4x + 3y - 1 = 0) = P(4 , 5)$$

b) Si $\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{m}{n} = \frac{3}{2} \Rightarrow P = \left(\frac{n}{m+n}\right)P_1 + \left(\frac{m}{m+n}\right)P_2$ (Ec. (5))

$$\Rightarrow \langle 4 , 5\rangle = \left(\frac{2}{3+2}\right)\langle -2 , 3\rangle + \left(\frac{3}{3+2}\right)P_2$$

de donde obtenemos $P_2 = \langle 8 , 19/3\rangle \Rightarrow P_2(8 , 19/3)$ ■

Ejemplo 2 Calcular el área del triángulo formado por la mediatriz del segmento $\overline{AB} = \{\langle -1 , -1\rangle + r\langle 6 , -4\rangle , r\,[0 , 1]\}$ y los ejes coordenados.

Solución. El punto de paso de la mediatriz es el punto medio del segmento $\overline{AB}$, esto es : $M = \langle -1 , -1\rangle + \frac{1}{2}\langle 6 , -4\rangle = \langle 2 , -3\rangle$

Un vector paralelo a la mediatriz es $\langle 6 , -4\rangle^{\perp} = 2\langle 2 , 3\rangle$, luego su ecuación vectorial es,

$$\mathscr{L}: P = \langle 2 , -3\rangle + t\langle 2 , 3\rangle , t \in \mathbf{R} \Rightarrow \mathscr{L}: \langle x , y\rangle = \langle 2 , 2t , -3 + 3t\rangle$$

La abscisa en el origen lo obtenemos haciendo $-3 + 3t = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Entonces , para este valor de t : $a = 2 + 2(1) = 4$

La ordenada en el origen lo obtenemos haciendo : $2 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = -1$

$$\Rightarrow b = -3 + 3(-1) = -6$$

Por lo tanto , si $S = a(\Delta ABC) = \frac{1}{2}|ab| \Rightarrow S = \frac{1}{2}|(4)(-6)| = 12\,u^2$ ■

Ejemplo 3 Emplee el método expuesto en el Ejemplo 5 de la Sección 2.4 para calcular las coordenadas de los vértices del triángulo cuyos lados tienen los puntos medios R(-3 , 1) , S(2 , 3) y T(1 , -1).

Solución. Recuerde que el segmento cuyos extremos son los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado del triángulo , y que su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado.

Luego , si $\overline{TS} = S - T = \langle 2 , 3\rangle - \langle 1 , -1\rangle = \langle 1 , 4\rangle$

un vector unitario en la dirección de $\overline{TS}$ es

$$u_{TS} = \frac{\overline{TS}}{||\overline{TS}||} = \frac{\langle 1 , 4\rangle}{\sqrt{17}}$$

y si $\overline{AB} \,||\, \overline{TS} \Rightarrow \overline{AB} = r\langle 1 , 4\rangle$

Una recta que contienen a los vértices A y B es

$$\mathscr{L}_1: P = R + r\,u_{TS} = \langle -3 , 1\rangle + r\left(\frac{\langle 1 , 4\rangle}{\sqrt{17}}\right) \qquad (1)$$

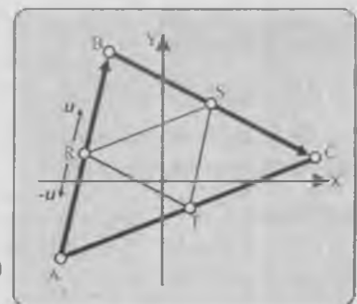


FIGURA 2.21

Dado que $|r|$ es la distancia que separa a A de R

y a R de B, y si $|r| = ||\vec{TS}|| = \sqrt{17} \Rightarrow r = \pm\sqrt{17}$

Ahora, si A y B $\in \mathscr{L}_1$, entonces en (1) se tiene:

$$r = -\sqrt{17} \Rightarrow A = \langle -3, 1\rangle - \langle 1, 4\rangle = \langle -4, -3\rangle$$
$$r = \sqrt{17} \Rightarrow B = \langle -3, 1\rangle + \langle 1, 4\rangle = \langle -2, 5\rangle$$

Análogamente: $\vec{RT} = T - R = \langle 1, -1\rangle - \langle -3, 1\rangle = \langle 4, -2\rangle$ y $||\vec{RT}|| = 2\sqrt{5}$

Una ecuación de la recta que contiene a los vértices B y C es

$$\mathscr{L}_2 : P = S + t\,u_{RT} = \langle 2, 3\rangle + t\left(\frac{\langle 2, -1\rangle}{\sqrt{5}}\right) \qquad (2)$$

Si $|t| = ||\vec{RT}|| = 2\sqrt{5}$, entonces en (2) se tiene:

$$t = -2\sqrt{5} \Rightarrow B = \langle 2, 3\rangle - 2\langle 2, -1\rangle = \langle -2, 5\rangle$$
$$t = 2\sqrt{5} \Rightarrow C = \langle 2, 3\rangle + 2\langle 2, -1\rangle = \langle 6, 1\rangle$$

Por lo tanto, los vértices del triángulo son: A(-4, -3), B(-2, 5) y C(6, 1) ■

Ejemplo 4 Hallar la ecuación general de la recta cuyos puntos equidistan de las rectas paralelas $\mathscr{L}_1 : P = \langle 0, 1\rangle + t\langle -2, -1\rangle,\ t \in \mathbb{R}$ y $\mathscr{L}_2 : \langle 1, -2\rangle \cdot (P - \langle 0, -5\rangle) = 0$.

Solución. Recuerde que si $\mathscr{L}_1 : y = mx + b_1$ y $\mathscr{L} : y = mx + b_2$ son dos rectas paralelas, entonces la ecuación de la recta *paralela media* a $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ está dada por, $\mathscr{L} : y = mx + \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$

Luego, si $\mathscr{L}_1 : (x, y) = \langle -2t, 1 - t\rangle \Rightarrow t = \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{-1} \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : y = \frac{1}{2}x + 1$

$$\mathscr{L}_2 : \langle 1, -2\rangle \cdot \langle x, y\rangle = \langle 1, -2\rangle \cdot \langle 0, -5\rangle \Rightarrow x - 2y = 10 \Leftrightarrow \mathscr{L}_2 : y = \frac{1}{2}x - 5$$

Por lo tanto, $\mathscr{L} : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(1 - 5) \Leftrightarrow \mathscr{L} : x - 2y - 4 = 0$

es la recta cuyos puntos equidistan de las dos rectas dadas. ■

Ejemplo 5 Sean: $\mathscr{L}$ la recta con ecuación $2x + y - 4 = 0$, P(2, 0) un punto de $\mathscr{L}$ y el punto Q(7, -1). Si A y B son puntos de $\mathscr{L}$, cada uno de los cuales dista $\sqrt{5}$ unidades de P, hallar:

a) Las ecuaciones cartesianas de las rectas $\overleftrightarrow{AQ}$ y $\overleftrightarrow{BQ}$

b) El área del triángulo ABQ.

Solución. Si $\mathscr{L} : 2x + y - 4 = 0 \Rightarrow n = \langle 2, 1\rangle$, luego el vector direccional de $\mathscr{L}$ es $a = \langle -1, 2\rangle$, entonces un vector unitario en dicha dirección es:

$$u = \frac{\langle -1, 2\rangle}{\sqrt{5}}$$

$\vec{PA} = ||\vec{PA}||\,u$

$\Rightarrow A = P + ||\vec{PA}||\,u = \langle 2, 0\rangle + \sqrt{5}\left(\frac{\langle -1, 2\rangle}{\sqrt{5}}\right) = \langle 1, 2\rangle$

$\vec{BP} = ||\vec{BP}||\,u$

$\Rightarrow B = P - ||\vec{BP}||\,u = \langle 2, 0\rangle - \sqrt{5}\left(\frac{\langle -1, 2\rangle}{\sqrt{5}}\right) = \langle 3, -2\rangle$

FIGURA 2.22

a) Ecuación cartesiana de $\overleftrightarrow{AQ} : y - 2 = \left(\frac{-1-2}{7-1}\right)(x - 1)$

$$\Leftrightarrow \overleftrightarrow{AQ} : x + 2y - 5 = 0$$

Ecuación cartesiana de $\overleftrightarrow{BQ} : y + 2 = \left(\frac{-1+2}{7-3}\right)(x - 3) \Leftrightarrow \overleftrightarrow{BQ} : x - 4y - 11 = 0$

b) $\vec{AB} = B - A = \langle 3, -2\rangle - \langle 1, 2\rangle = \langle 2, -4\rangle \Rightarrow \vec{AB}^{\perp} = \langle 4, 2\rangle$

$\vec{BQ} = Q - B = \langle 7, -1\rangle - \langle 3, -2\rangle = \langle 4, 1\rangle$

$$\therefore a(\Delta ABQ) = \frac{1}{2}\,\vec{BQ} \cdot \vec{AB}^{\perp} = \frac{1}{2}\langle 4, 1\rangle \cdot \langle 4, 2\rangle = 9\ u^2$$ ■

Ejemplo 6 Dados los vértices A(-2, 4) y B(6, -2) de un triángulo ABC, y el punto de intersección H(1, 3) de sus alturas, hallar:

a) La ecuación de la recta $\overleftrightarrow{AC}$ b) El vértice C

Solución. a) Si $\vec{HB} = B - H = \langle 6, -2\rangle - \langle 1, 3\rangle = 5\langle 1, -1\rangle$

$\Rightarrow n_1 = \langle 1, -1\rangle$ es un vector normal a la recta $\overleftrightarrow{AC}$ cuya ecuación cartesiana lo obtenemos a partir de:

$P \cdot n_1 = A \cdot n_1 \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \cdot \langle 1, -1\rangle = \langle -2, 4\rangle \cdot \langle 1, -1\rangle$

$$\Leftrightarrow \overleftrightarrow{AC} : x - y + 6 = 0$$

b) $\vec{AB} = B - A = \langle 6, -2\rangle - \langle -2, 4\rangle = 2\langle 4, -3\rangle$

$\Rightarrow n_2 = \langle 4, -3\rangle$ es un vector normal a $\overline{DC}$

Si $P \cdot n_2 = H \cdot n_2 \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \cdot \langle 4, -3\rangle = \langle 1, 3\rangle \cdot \langle 4, -3\rangle$

$$\Leftrightarrow \overleftrightarrow{DC} : 4x - 3y + 5 = 0$$

$\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{DC} = \{C\} \Rightarrow (x - y + 6 = 0) \cap (4x - 3y + 5 = 0) = C(13, 19)$ ■

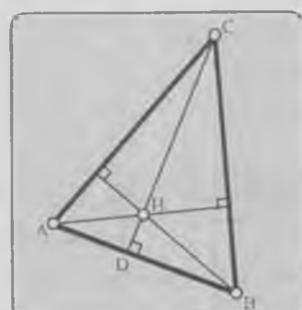


FIGURA 2.23

Ejemplo 7 Sean A(0, 0), B y C los vértices de un triángulo; sabiendo que $B + C = \langle 23, 7\rangle$, $||\vec{AB}|| = 5\sqrt{5}$, $||\vec{AC}|| = 13$, $\vec{BC} \cdot \langle 3, -1\rangle = 0$ y

$\overline{BC}\cdot\langle 0\,,\,1\rangle > 0$; hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por C y es perpendicular al lado $\overline{AB}$.

Solución. Sean los vértices B(a , b) y C(x , y)

$\Rightarrow \overline{BC} = \mathbf{C} - \mathbf{B} = \langle x - a\,,\, y - b\rangle$

Dado $\overline{BC}\cdot\langle 3\,,\,-1\rangle = 0 \Rightarrow 3x - 3a - y + b = 0$ (1)

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \langle 23\,,\,7\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} a + x = 23 \\ b + y = 7 \end{cases} \quad (2)$$

Combinando las ecuaciones (2) con (1) obtenemos : $y = 3x - 31$, $b = 3a - 31$

Si $\|\overline{AB}\| = 5\sqrt{5} \Rightarrow a^2 + b^2 = 125$

$\Rightarrow a^2 + (3a - 31)^2 = 125 \Rightarrow 5a^2 - 93a + 418 = 0$

$\Leftrightarrow a = 11$ ó $a = 38/5$

$\Leftrightarrow b = 2$ ó $b = -41/5$

Si $\|\overline{AC}\| = 13 \Rightarrow x^2 + y^2 = 169$

$\Rightarrow x^2 + (3x - 31)^2 = 169 \Rightarrow 5x^2 - 93x + 792 = 0$

$\Leftrightarrow x = 12$ ó $x = 33/5$

$\Leftrightarrow y = 5$ ó $y = -56/5$

Luego , hay dos posibles soluciones : B(11 , 2) ó B(38/5 , -41/5)

C(12 , 5) ó C(33/5 , -56/5)

Como $\overline{BC}\cdot\langle 0\,,\,1\rangle > 0 \Rightarrow \langle x - a\,,\, y - b\rangle\cdot\langle 0\,,\,1\rangle > 0 \Rightarrow y - b > 0 \Leftrightarrow y > b$

Se cumple sólo para la primera alternativa (5 > 2). En consecuencia B(11 , 2) y C(12 , 5). Si $\overline{AB} = \langle 11\,,\,2\rangle \Rightarrow \overline{AB}^{\perp} = \langle -2\,,\,11\rangle$, por lo que la ecuación vectorial de la recta pedida es

$$\mathscr{L} : \mathbf{P} = \langle 12\,,\,5\rangle + t\langle -2\,,\,11\rangle\,,\ t \in \mathbb{R}$$ ■

FIGURA 2.24

Ejemplo 8 La recta $\mathscr{L}_1 : \mathbf{P} = \langle 1\,,\,3\rangle + t\langle 2\,,\,-6\rangle$ forma con los ejes coordenados un triángulo de área S_1. Si $\mathscr{L}_2 \,||\, \mathscr{L}_1$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de área S_2 tal que $S_1/S_2 = 4$. Hallar la ecuación vectorial de $\mathscr{L}_2$.

Solución. $\mathscr{L}_1 : \mathbf{P} = \langle 1\,,\,3\rangle + t\langle 2\,,\,-6\rangle \Rightarrow \langle x\,,\,y\rangle = \langle 1 + 2t\,,\, 3 - 6t\rangle$

Intersecciones de $\mathscr{L}_1$ con los ejes coordenados.

Con el eje X : $y = 0 \Rightarrow 3 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 1/2$

$\Rightarrow x = 1 + 2(1/2) = 2 \Rightarrow$ A(2 , 0)

Con el eje Y : $x = 0 \Rightarrow 1 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = -1/2$

$\Rightarrow y = 3 - 6(-1/2) = 6 \Rightarrow$ B(0 , 6)

Luego , $S_1 = a(\Delta AOB) = \frac{1}{2}(2)(6) = 6u^2$

Como $\frac{S_1}{S_2} = 4 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{4}(6) = \frac{3}{2}\,u^2$

Si $\mathscr{L}_2 : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{2}|ab|$

$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{2}|ab| \Leftrightarrow ab = 3$ ó $ab = -3$ (1)

Dado que $\mathscr{L}_2 \,||\, \mathscr{L}_1 \Rightarrow m_2 = m_1 = -3$, y como $m_2 = -\frac{b}{a}$

se sigue que : $b = 3a$

Sustituyendo en (1) : $3a^2 = 3$ ó $3a^2 = -3$

$a^2 = 1$ ó $a^2 = -1$ (No existe solución real)

$\Leftrightarrow a = 1$ y $b = 3$ ó $a = -1$ y $b = -3$

Por lo tanto , existe dos soluciones

$\mathscr{L}_2 : \mathbf{P} = \langle 1\,,\,0\rangle + t\langle 1\,,\,-3\rangle\,,\ t \in \mathbb{R}$ ó $\mathscr{L}'_2 ; \mathbf{P} = \langle -1\,,\,0\rangle + t\langle 1\,,\,-3\rangle\,,\ t \in \mathbb{R}$ ■

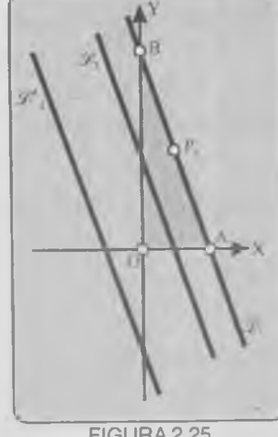


FIGURA 2.25

Ejemplo 9 Dados el circuncentro D(6 , 1) , el ortocentro H(3 , -3) , el vértice A(8 , 12) y $\text{Proy}_{\overline{AC}}\overline{AD} = r\langle 1\,,\,-7\rangle$, $r > 0$, de un triángulo ABC ; hallar las ecuaciones vectoriales de las rectas que contienen a los lados del triángulo.

Solución. La Figura 2.26 muestra al triángulo ABC al circuncentro D (intersección de las mediatrices) y el ortocentro (intersección de las alturas).

$\overline{AD} = \mathbf{D} - \mathbf{A} = \langle 6\,,\,1\rangle - \langle 8\,,\,12\rangle = \langle -2\,,\,-11\rangle$

Si $\text{Proy}_{\overline{AC}}\overline{AD} = r\langle 1\,,\,-7\rangle\,,\ r > 0 \Rightarrow \overline{AC} \,||\, \langle 1\,,\,-7\rangle$

y $\overline{AM} = \text{Proy}_{\overline{AC}}\overline{AD} = \left(\frac{\langle -2\,,\,-11\rangle\cdot\langle 1\,,\,-7\rangle}{\|\langle 1\,,\,-7\rangle\|^2}\right)\langle 1\,,\,-7\rangle = \frac{3}{2}\langle 1\,,\,-7\rangle$

Dado que $\overline{AC} = 2\,\overline{AM} \Rightarrow \overline{AC} = 3\langle 1\,,\,-7\rangle = \langle 3\,,\,-21\rangle$

$\Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{A} + \langle 3\,,\,-21\rangle = \langle 8\,,\,12\rangle + \langle 3\,,\,-21\rangle = \langle 11\,,\,-9\rangle$

$\overline{HA} = \mathbf{A} - \mathbf{H} = \langle 8\,,\,12\rangle - \langle 3\,,\,-3\rangle = 5\langle 1\,,\,3\rangle$

$\overline{HC} = \mathbf{C} - \mathbf{H} = \langle 11\,,\,-9\rangle - \langle 3\,,\,-3\rangle = 2\langle 4\,,\,-3\rangle$

FIGURA 2.26

Por tanto : $\overline{AB} \perp \overline{HC} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} : \mathbf{P} = \mathbf{A} + r\overline{HC}^{\perp} \Leftrightarrow \overleftrightarrow{AB} : \mathbf{P} = \langle 8\,,\,12\rangle + r\langle 3\,,\,4\rangle\,,\ r \in \mathbb{R}$

$\overline{BC} \perp \overline{HA} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} : \mathbf{P} = \mathbf{C} + s\overline{HA}^{\perp} \Leftrightarrow \overleftrightarrow{BC} : \mathbf{P} = \langle 11\,,\,-9\rangle + s\langle -3\,,\,1\rangle\,,\ s \in \mathbb{R}$

$\overleftrightarrow{AC} : \mathbf{P} = \mathbf{A} + t\langle 1\,,\,-7\rangle \Leftrightarrow \overleftrightarrow{AC} : \mathbf{P} = \langle 8\,,\,12\rangle + t\langle 1\,,\,-7\rangle\,,\ t \in \mathbb{R}$ ■

Ejemplo 10 En un triángulo ABC, el lado $\overline{BC}$ mide $5\sqrt{10}$; la mediatriz del lado $\overline{AB}$ corta a $\overline{AC}$ en el punto E(-3, -5) y a la prolongación de $\overline{BC}$ en D(-15, -21). Si C es punto medio de $\overline{BD}$ y $Proy_{\overline{DE}}\overline{DB} = 6\langle 3, 4\rangle$, a) hallar los vértices del triángulo ABC, b) hallar la ecuación general de la recta $\mathscr{L}$ que pasa por E y es ortogonal a $\overline{BC}$ (la abscisa de A es positiva).

Solución. La Figura 2.27 muestra al ΔABC, junto con la mediatriz $\overline{DM}$ y el vértice A con abscisa positiva. Luego, si

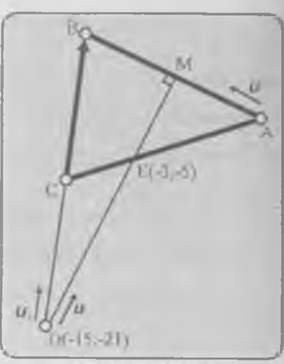


FIGURA 2.27

$Proy_{\overline{DE}}\overline{DB} = \overline{DM} = 6\langle 3, 4\rangle \Rightarrow \|\overline{DM}\| = 6\sqrt{3^2+4^2} = 30$

C es punto medio de $\overline{DB} \Rightarrow \|\overline{DB}\| = 2(5\sqrt{10}) = 10\sqrt{10}$

En el triángulo rectángulo BMD se tiene :

$\|\overline{MB}\|^2 = \|\overline{DB}\|^2 - \|\overline{DM}\|^2 = (10\sqrt{10})^2 - (30)^2 = 100$

$\Rightarrow \|\overline{MB}\| = \|\overline{AM}\| = 10$

$\overline{DE} = \mathbf{E} - \mathbf{D} = \langle -3, -5\rangle - \langle -15, -21\rangle = 4\langle 3, 4\rangle$

Un vector unitario en la dirección de $\overline{DE}$ es

$$\boldsymbol{u} = \frac{\overline{DE}}{\|\overline{DE}\|} = \frac{\langle 3, 4\rangle}{5} \Rightarrow \boldsymbol{u}^{\perp} = \frac{\langle -4, 3\rangle}{5}$$

a) Cálculo de los vértices del triángulo ABC

$\overline{DM} = \|\overline{DM}\|\,\boldsymbol{u} \Rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{D} + \|\overline{DM}\|\,\boldsymbol{u} = \langle -15, -21\rangle + 30\left(\frac{\langle 3, 4\rangle}{5}\right) = \langle 3, 3\rangle$

$\overline{MB} = \|\overline{MB}\|\,\boldsymbol{u}^{\perp} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{M} + \|\overline{MB}\|\,\boldsymbol{u}^{\perp} = \langle 3, 3\rangle + 10\left(\frac{\langle -4, 3\rangle}{5}\right) = \langle -5, 9\rangle$

$\overline{AM} = \|\overline{AM}\|\,\boldsymbol{u}^{\perp} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{M} - \|\overline{AM}\|\,\boldsymbol{u}^{\perp} = \langle 3, 3\rangle - 10\left(\frac{\langle -4, 3\rangle}{5}\right) = \langle 11, -3\rangle$

$\overline{DB} = \mathbf{B} - \mathbf{D} = \langle -5, 9\rangle - \langle -15, -21\rangle = 10\langle 1, 3\rangle$

Un vector unitario en la dirección de $\overline{DB}$ es : $\boldsymbol{u}_1 = \frac{\overline{DB}}{\|\overline{DB}\|} = \frac{\langle 1, 3\rangle}{\sqrt{5}}$

Luego, si $\overline{CB} = \|\overline{CB}\|\,\boldsymbol{u}_1 \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{B} - \|\overline{CB}\|\,\boldsymbol{u}_1$

$$= \langle -5, 9\rangle - 5\sqrt{10}\left(\frac{\langle 1, 3\rangle}{\sqrt{10}}\right) = \langle -10, -6\rangle$$

Por lo tanto, los vértices del triángulo son : A(11, -3), B(-5, 9) y C(-10, -6)

b) El vector normal a la recta $\mathscr{L}$ es paralelo a $\overline{DB}$, esto es, si $\mathbf{n} = \langle 1, 3\rangle$, entonces su ecuación normal es

$$\mathscr{L} : \mathbf{P}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{n} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle\cdot\langle 1, 3\rangle = \langle -3, -5\rangle\cdot\langle 1, 3\rangle$$

de donde obtenemos la forma general $\mathscr{L} : x + 3y + 18 = 0$ ■

Ejemplo 11 Hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}_2$ de pendiente entera negativa que no pasa por el tercer cuadrante. Si $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_3$ en A, $\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3 = B$, $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = C$, la abscisa de A es 3, $\mathscr{L}_1 : 3x - y - 5 = 0$, $\|\overline{BC}\| = 5\sqrt{10}$ y el área del triángulo ABC es 60 u².

Solución. Si $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_3$ en A $\Rightarrow$ A $\in \mathscr{L}_1$

y si $\mathscr{L}_1 : 3x - y - 5 = 0$ y A(3, y), entonces

$3(3) - y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = 4$, luego A(3, 4)

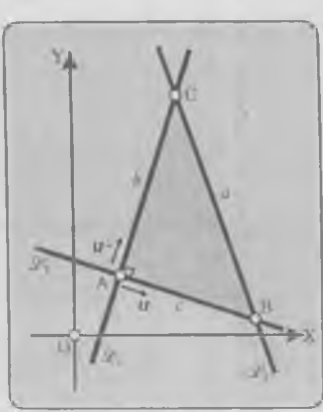


FIGURA 2.28

Sean $a = \|\overline{BC}\| = 5\sqrt{10}$, $b = \|\overline{AC}\|$ y $c = \|\overline{AB}\|$

$a(\Delta ABC) = 60\ u^2 \Rightarrow \frac{1}{2}bc = 60 \Leftrightarrow bc = 120$ (1)

Por el Teorema de Pitágoras

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = 250$ (2)

Resolviendo (1) y (2) por simultáneas obtenemos

$b = 3\sqrt{10}$ ó $b = 4\sqrt{10} \Rightarrow c = 4\sqrt{10}$ ó $c = 3\sqrt{10}$

El vector normal a la recta $\mathscr{L}_1$ es $\mathbf{n} = \langle 3, -1\rangle$,

$\Rightarrow \boldsymbol{u} = \frac{\langle 1, 3\rangle}{\sqrt{10}}$ es un vector unitario en la dirección de $\overline{AB}$.

Cálculo de los vértices B y C con $b = 3\sqrt{10}$ y $c = 4\sqrt{10}$

$\overline{AB} = \|\overline{AB}\|\,\boldsymbol{u} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A} + c\,\boldsymbol{u} = \langle 3, 4\rangle + 4\sqrt{10}\left(\frac{\langle 3, -1\rangle}{\sqrt{10}}\right) \Rightarrow \mathbf{B} = \langle 15, 0\rangle$

$\overline{AC} = \|\overline{AC}\|\,\boldsymbol{u}^{\perp} \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{A} + b\,\boldsymbol{u}^{\perp} = \langle 3, 4\rangle + 3\sqrt{10}\left(\frac{\langle 1, 3\rangle}{\sqrt{10}}\right) \Rightarrow \mathbf{C} = \langle 6, 13\rangle$

Pendiente de $\mathscr{L}_2$: $m_2 = \frac{13 - 0}{6 - 15} = -\frac{13}{9} \notin \mathbb{Z}^-$

Por la condición del problema se descarta esta solución.

Cálculo de los vértices B y C con $b = 4\sqrt{10}$ y $c = 3\sqrt{10}$

$\overline{AB} = \|\overline{AB}\|\,\boldsymbol{u} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A} + c\,\boldsymbol{u} = \langle 3, 4\rangle + 3\sqrt{10}\left(\frac{\langle 3, -1\rangle}{\sqrt{10}}\right) \Rightarrow \mathbf{B} = \langle 12, 1\rangle$

$\overline{AC} = \|\overline{AC}\|\,\boldsymbol{u}^{\perp} \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{A} + b\,\boldsymbol{u}^{\perp} = \langle 3, 4\rangle + 4\sqrt{10}\left(\frac{\langle 1, 3\rangle}{\sqrt{10}}\right) \Rightarrow \mathbf{C} = \langle 7, 16\rangle$

Pendiente de al recta $\mathscr{L}_2$: $m_2 = \frac{16 - 1}{7 - 12} = -3 \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow \mathbf{n}_2 = \langle 3, 1\rangle$

Por lo tanto, la ecuación general de la recta $\mathscr{L}_2$ lo obtenemos a partir de

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}_2 = \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}_2 \Rightarrow \langle x, y\rangle\cdot\langle 3, 1\rangle = \langle 12, 1\rangle\cdot\langle 3, 1\rangle \Leftrightarrow \mathscr{L}_2 : 3x + y - 37 = 0$$ ■

EJERCICIOS : Grupo 18

1. Hallar los valores de k para que la recta $\mathscr{L} : \langle 4 , 1\rangle \cdot \left[\mathbf{P} - \langle \frac{k-3}{2} , 4\rangle\right] = 0$, forme con los ejes coordenados un triángulo de área $S = 8\ u^2$.
2. Emplee el método expuesto en el Ejemplo 5 de la Sección 2.4 para calcular las coordenadas de los vértices del triángulo cuyos lados tienen los puntos medios R(0 , 5) , S(2 , 3) y T(-3 , -3).
3. Calcular el área del triángulo formado por la mediatriz del segmento $\overline{AB} = \{\langle -1 , 3\rangle + r\langle 6 , -2\rangle , r \in [0 , 1]\}$ y los ejes coordenados.
4. Calcular el área del triángulo OAQ si $\|\overline{OA}\| = 5$, $\mathscr{L}_1 : \mathbf{P} = r\langle 4 , 3\rangle , r \in \mathbb{R}$, $\mathscr{L}_2 : \mathbf{Q} = \langle 2 , 5\rangle + s\langle 4 , 3\rangle , s \in \mathbb{R}$; donde O es el origen de coordenadas . A y Q puntos del primer cuadrante sobre las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ respectivamente.
5. Dados los puntos medios de los lados de un triángulo : R(2 , 1) , S(5 , 3) y T(3 , -4) , hallar las ecuaciones cartesianas de sus lados.
6. Sea el triángulo ABC , donde el lado $\overline{AC}$ mide $3\sqrt{10}$ unidades y se encuentra sobre la recta $\mathscr{L} : x + 3y + 2 = 0$. Si el ortocentro del triángulo es H(3 , 5) y $\text{Proy}_{\overline{AB}}\overline{BH} = \frac{1}{5}\langle 7 , 1\rangle$, hallar los vértices del triángulo.
7. A , B y C son vértices de un triángulo de área 16 u². A(-2 , -1) , B(5 , 2) y C está sobre la recta $\mathscr{L}_1 : \langle 1 , 1\rangle \cdot [\mathbf{P} - \langle 2 , 1\rangle] = 0$. Hallar el vértice C.
8. Dados los vértices de un triángulo A(1 , -1) , B(-2 , 1) y C(3 , 5) , hallar la ecuación vectorial de la perpendicular bajada desde el vértice A a la mediana , trazada desde el vértice B.
9. Dados dos vértices de un triángulo A(-10 , 2) y B(6 , 4) , cuyas alturas se cortan en el punto H(5 , 2) , hallar : a) La ecuación de la recta $\overline{AC}$, b) El vértice C.
10. El área de un triángulo es $S = 4\ u^2$; dos de sus vértices son los puntos A(2 , 1) y B(3 , -2) , el tercer vértice C está situado en el eje X. Hallar la ecuación normal de la mediana que pasa por C.
11. El área de un triángulo es $S = 8\ u^2$, dos de sus vértices son los puntos A(1 , -2), B(2 , 3) y el tercer vértice C , de ordenada positiva , está en la recta $\mathscr{L}_1 : 2x + y - 2 = 0$. Hallar la ecuación vectorial de la recta que por C y es perpendicular a la recta $\mathscr{L}_1$.
12. Sean las rectas $\mathscr{L}_1 = \{(x , y) \in \mathbb{R}^2 | 2x - y = 5\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{C + t\langle 11 , 2\rangle\}$; A(9 , 13) $\in \mathscr{L}_1$, C(25 , -3) y el punto $B \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$. Hallar la ecuación vectorial de la recta $\mathscr{L}$ que contiene a la bisectriz del ángulo ABC

3 APLICACIONES DE LA RECTA

3.1 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA DADA

Dada la recta $\mathscr{L}$, cuyo vector de dirección es **a** , y dadas las coordenadas de P y de algún punto P_1 sobre $\mathscr{L}$, entonces la distancia de P a la recta $\mathscr{L}$, denotada por $d(P , \mathscr{L})$, es la norma de la proyección del vector $\mathbf{P} - \mathbf{P}_1$ en la dirección de la normal **n**. (Figura 3.1) Esto es :

$d(P , \mathscr{L}) = \|\text{Proy}_{\mathbf{n}}(\mathbf{P} - \mathbf{P}_1)\| = |\text{Comp}_{\mathbf{n}}(\mathbf{P} - \mathbf{P}_1)|$

$$\therefore \quad d(P , \mathscr{L}) = \frac{|(\mathbf{P} - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} \qquad (1)$$

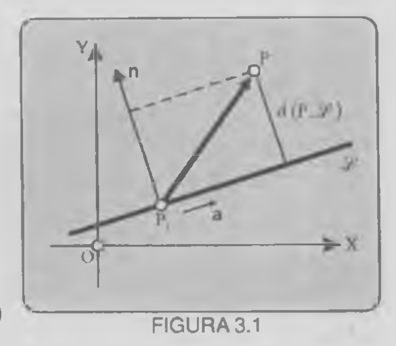


FIGURA 3.1

La distancia que separa a P de $\mathscr{L}$ no depende de la elección de un punto particular P_1 de $\mathscr{L}$. En efecto , tomemos dos puntos P_1 y P_2 sobre $\mathscr{L}$. En la Figura 3.2 se observa que

$$\mathbf{P} - \mathbf{P}_1 = (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) + (\mathbf{P} - \mathbf{P}_2)$$

Multiplicando escalarmente ambos miembros por **n** se tiene :

$$(\mathbf{P} - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{P} - \mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{n}$$
$$= 0 + (\mathbf{P} - \mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{n}$$

$$\therefore \quad \frac{(\mathbf{P} - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{(\mathbf{P} - \mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}$$

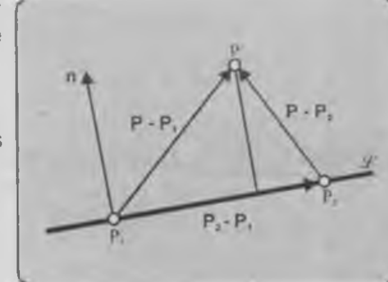


FIGURA 3.2

Ejemplo 1 Hallar la distancia que separa al punto P(4 , -2) de la recta $\mathscr{L}$ que pasa por T(5 , -3) y cuya pendiente es 1/2.

Solución. Si m = 1/2 $\Rightarrow$ $\mathbf{a} = \langle 2 , 1\rangle$ es el vector direccional de $\mathscr{L}$, y $\mathbf{n} = \mathbf{a}^{\perp} = \langle -1 , 2\rangle$ es su normal.

El vector que va de P a T es : $\overline{PT} = \langle 5 , -3\rangle - \langle 4 , -2\rangle = \langle 1 , -1\rangle$

Luego , por la fórmula **(1)** :

$$d(P , \mathscr{L}) = \frac{|\langle 1 , -1\rangle \cdot \langle -1 , 2\rangle|}{||\langle -1 , 2\rangle||} = \frac{|-1 -2|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$ ■

Nota. Para hallar una fórmula que permita calcular la $d(P , \mathscr{L})$ cuando la ecuación de $\mathscr{L}$ está dada en la forma general Ax + Bx + C = 0 , se procede de la siguiente manera.

Supongamos que $P(x_0 , y_0)$ y $P_1(x_1 , y_1)$ $\Rightarrow$ $\mathbf{P} - \mathbf{P_1} = \langle x_0 - x_1 , y_0 - y_1\rangle$, y $\mathbf{n} = \langle A , B\rangle$.

Si sustituimos las componentes de estos vectores en la fórmula (1) se tiene :

$$d(P , \mathscr{L}) = \frac{|\langle x_0 - x_1 , y_0 - y_1\rangle \cdot \langle A , B\rangle|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 - Ax_1 + By_0 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Como $P_1(x_1 , y_1) \in \mathscr{L}$ $\Rightarrow$ $Ax_1 + By_1 + C = 0$ $\Rightarrow$ $C = -(Ax_1 + By_1)$

$$\therefore\ d(P , \mathscr{L}) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (2)$$

Ejemplo 2 Hallar la distancia del punto P(-2 , 5) a la recta $\mathscr{L}$: 5x - 12y - 8 = 0

Solución. Dado que A = 5 , B = -12 y $x_0 = -2$, $y_0 = 5$, haciendo uso de la fórmula **(2)** tendremos :

$$d(P , \mathscr{L}) = \frac{|5(-2) - 12(5) - 8|}{\sqrt{(5)^2 + (-12)^2}} = \frac{|-10 - 60 - 8|}{13} = 6$$ ■

Ejemplo 3 Hallar el valor de k tal que el punto P(2 , k) sea equidistante de las rectas cuyas ecuaciones son $\mathscr{L}_1$: x + y - 2 = 0 y $\mathscr{L}_2$: x - 7y + 2 = 0

Solución. Se debe verificar que $d(P , \mathscr{L}_1) = d(P , \mathscr{L}_2)$

Entonces , por la fórmula (2) se sigue que :

$$\frac{|2 + k - 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{|2 - 7k + 2|}{\sqrt{1 + 49}} \Rightarrow \frac{|k|}{\sqrt{2}} = \frac{|4 - 7k|}{5\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 5|k| = |4 - 7k| \Leftrightarrow k = 1/3 \text{ ó } k = 2$$ ■

Ejemplo 4 Obtener las ecuaciones de las rectas que son paralelas a la recta $\mathscr{L}$: 3x - 4y + 10 = 0 y que están a 5 unidades de $\mathscr{L}$.

Solución. El problema se puede resolver por dos métodos

Método 1. Por familia de rectas paralelas, que en este caso tienen la forma

$$\ell : 3x - 4y + k = 0 \qquad (1)$$

Como todos los puntos de $\mathscr{L}$ equidistan de ℓ , podemos elegir un punto cualquiera de $\mathscr{L}$, dando una solución para 3x - 4y + 10 = 0.

Por ejemplo , para x = 2 $\Rightarrow$ 3(2) - 4y + 10 = 0 $\Leftrightarrow$ y = 4 ; luego P(2 , 4) $\in \mathscr{L}$

Entonces , si $d(P , \mathscr{L}) = 5$ $\Leftrightarrow$ $\frac{|3(2) - 4(4) + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$

de donde obtenemos : $|k - 10| = 25 \Leftrightarrow k = 35$ ó $k = -15$

que sustituidas en (1) obtenemos las ecuaciones buscadas , esto es

$$\ell : 3x - 4y + 35 = 0 \text{ ó } \ell : 3x - 4y - 15 = 0$$

Método 2. Es el método directo , que consiste en lo siguiente :

Dadas dos rectas paralelas $\mathscr{L}_1 : Ax + By + C_1 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : Ax + By + C_2 = 0$

$$\Rightarrow\ d(\mathscr{L}_1 , \mathscr{L}_2) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (3)$$

Luego , si $\mathscr{L}$: 3x - 4y + 10 = 0 y ℓ : 3x - 4y + k = 0 son dos rectas paralelas , entonces

por la fórmula (3) : $\frac{|k - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5 \Rightarrow |k - 10| = 25 \Leftrightarrow k = 35$ ó $k = -15$

$$\therefore\ \ell : 3x - 4y + 35 = 0 \text{ ó } \ell : 3x - 4y - 15 = 0$$ ■

Ejemplo 5 Los puntos $A(x_1 , y_1)$ y $B(x_2 , y_2)$ sobre la recta $\mathscr{L}$: 5x - 12y + 15 = 0 , distan 3 unidades de la recta $\mathscr{L}_1 : \langle 3 , 4\rangle \cdot [\langle x , y\rangle - \langle 0 , 3\rangle] = 0$. Hallar el valor de $x_1 + x_2$

Solución. En $\mathscr{L}_1$ se tiene : $\mathbf{n} = \langle 3 , 4\rangle$ y $P_1(0 , 3)$. Si $P(x , y) \in \mathscr{L} \Rightarrow d(P , \mathscr{L}_1) = 3$

$$\text{O sea : } \frac{|(\mathbf{P} - \mathbf{P_1}) \cdot \mathbf{n}|}{||\mathbf{n}||} = 3 \Rightarrow \frac{|\langle x , y - 3\rangle \cdot \langle 3 , 4\rangle|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$$

de donde obtenemos : $|3x + 4y - 12| = 15 \Leftrightarrow 3x + 4y - 12 = 15$ ó $3x + 4y - 12 = -15$

$\Leftrightarrow 3x_1 + 4y_1 = 27$ ó $3x_2 + 4y_2 = -3$ (1)

Como A , B $\in \mathscr{L} \Rightarrow 5x_1 - 12y_1 = -15$ ó $5x_2 - 12y_2 = -15$ (2)

Eliminando y_1 e y_2 del sistema de ecuaciones (1) y (2) obtenemos

$x_1 = 33/7$ y $x_2 = -12/7 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$ ■

Ejemplo 6 Hallar el perímetro del triángulo equilátero ABC , si A(-1 , 3) y sabiendo que el lado $\overline{BC}$ está contenido en la recta $\mathscr{L} = \{\langle -2 , -4\rangle + t\langle 4 , 3\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$

Solución. En un triángulo equilátero

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell \Rightarrow \ell = \frac{2\sqrt{3}}{3}h$$

Perímetro del ΔABC : $2p = 3\ell \Rightarrow 2p = 2\sqrt{3}h$ (1)

$$h = d(A , \mathscr{L}) = \frac{|\langle A - P_1\rangle \cdot n|}{||n||}$$

Si $A = \langle -1 , 3\rangle$, $P_1 = \langle -2 , -4\rangle$ y $n = \langle 4 , 3\rangle^{\perp} = \langle -3 , 4\rangle$

$$\Rightarrow h = \frac{|\langle 1 , 7\rangle \cdot \langle -3 , 4\rangle|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = 5$$

Por tanto , en (1) , el perímetro es : $2p = 10\sqrt{3}$ ■

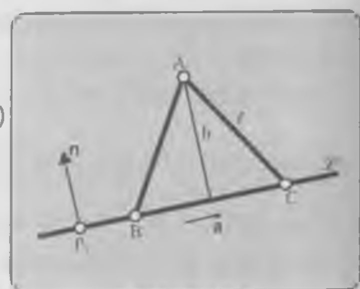


FIGURA 3.3

Ejemplo 7 Las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son paralelas , siendo α el ángulo de inclinación. Si $\mathscr{L}_1$ pasa por $P_1(a , b)$ y $\mathscr{L}_2$ pasa por $P_2(h , k)$, hallar la distancia entre las rectas en términos de α y los puntos dados , si $\mathscr{L}_1 \neq \mathscr{L}_2$.

Solución. La pendiente de ambas rectas es

$$m = Tg\,\alpha = \frac{Sen\,\alpha}{Cos\,\alpha}$$

Luego,si $a = \langle Cos\alpha , Sen\alpha\rangle$es el vector direccional , entonces el vector normal es $n = \langle -Sen\,\alpha , Cos\,\alpha\rangle$. El vector que va de P_1 a P_2 es $V = P_2 - P_1 = \langle h - a , k - b\rangle$

Por lo que : $d(\mathscr{L}_1 , \mathscr{L}_2) = |Comp_n V| = \dfrac{|V \cdot n|}{||n||}$

$$\Rightarrow d(\mathscr{L}_1 , \mathscr{L}_2) = \frac{|\langle h - a , k - b\rangle \cdot \langle -Sen\,\alpha , Cos\,\alpha\rangle|}{\sqrt{Sen^2\alpha + Cos^2\alpha}}$$

$$\therefore d(\mathscr{L}_1 , \mathscr{L}_2) = |(a - h)\,Sen\,\alpha + (k - b)\,Cos\,\alpha|$$ ■

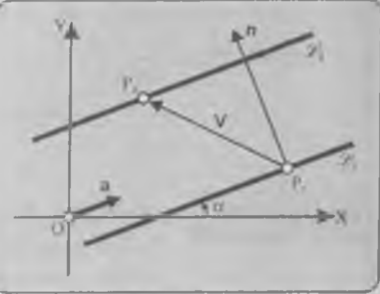


FIGURA 3.4

Ejemplo 8 Hallar el punto simétrico al punto Q(-2 , -9) respecto de la recta $\mathscr{L} : P = \langle 4 , 6\rangle + t\langle 5 , -2\rangle , t \in \mathbf{R}$

Solución. De la ecuación de la recta $\mathscr{L}$ se tiene : $P_1(4 , 6)$ y $a = \langle 5 , -2\rangle$.

Un vector unitario en la dirección de la normal $n = a^{\perp} = \langle 2 , 5\rangle$ es :

$$u = \frac{n}{||n||} = \frac{\langle 2 , 5\rangle}{\sqrt{29}}$$

Si $V = \overline{QP_1} \Rightarrow V = \langle 4 , 6\rangle - \langle -2 , -9\rangle = 3\langle 2 , 5\rangle$

$$\Rightarrow d(Q , \mathscr{L}) = \frac{|V \cdot n|}{||n||} = \frac{|3\langle 2 , 5\rangle \cdot \langle 2 , 5\rangle|}{\sqrt{29}} = 3\sqrt{29}$$

$\overline{QP} = P - Q \Rightarrow P = Q + \overline{QP} = Q + 2d(Q , \mathscr{L})\,u$

$$\Rightarrow P = \langle -2 , -9\rangle + 6\sqrt{29}\left(\frac{\langle 2 , 5\rangle}{\sqrt{29}}\right) = \langle 10 , 21\rangle$$

Por lo tanto , el punto buscado es P(10 , 21) ■

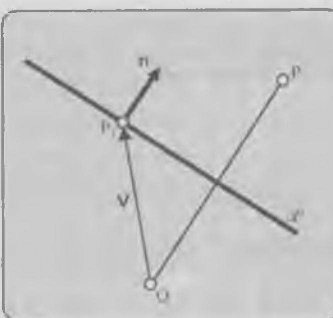


FIGURA 3.5

Ejemplo 9 Dada la recta $\mathscr{L} : P = \langle -4 , -10\rangle + t\langle 5 , 12\rangle , t \in \mathbf{R}$, y el punto $A\left(\frac{7 + 12\sqrt{3}}{2} , \frac{16 - 5\sqrt{3}}{2}\right)$, hallar dos puntos B y C sobre $\mathscr{L}$, que que unidos con A formen un triángulo equilátero. Calcular el área de dicho triángulo.

Solución. Si $a = \langle 5 , 12\rangle$ es el vector direccional de $\mathscr{L}$, entonces $n = \langle -12 , 5\rangle$ es el vector normal y si $P_1(-4 , -10)$ es el punto de paso , su ecuación general lo obtenemos de

$P \cdot n = P_1 \cdot n \Leftrightarrow \langle x , y\rangle \cdot \langle -12 , 5\rangle = \langle -4 , -10\rangle \cdot \langle -12 , 5\rangle$

$\Leftrightarrow \mathscr{L} : 12x - 5y - 2 = 0$

La altura del triángulo es : $h = d(A , \mathscr{L})$

$$\Rightarrow h = \frac{\left|6(7 + 12\sqrt{3}) - \frac{5}{2}(16 - 5\sqrt{3}) - 2\right|}{\sqrt{(12)^2 + (-5)^2}} = \frac{13\sqrt{3}}{2}$$

y como : $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = 13$

Un vector unitario en la dirección de $\mathscr{L}$ es : $u = \dfrac{a}{||a||} = \dfrac{\langle 5 , 12\rangle}{13}$

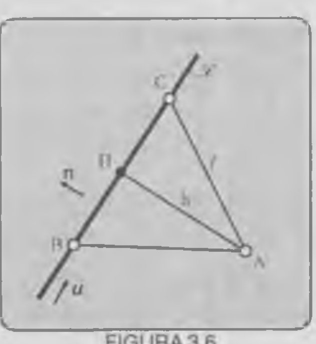


FIGURA 3.6

Luego : $\overline{AH} = ||\overline{AH}||\,u^{\perp} \Rightarrow H = A + h\,u^{\perp} = A + \left(\frac{13\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\langle -12 , 5\rangle}{13} = \left\langle \frac{7}{2} , 8\right\rangle$

$\overline{HC} = ||\overline{HC}||\,u \Rightarrow C = H + \left(\frac{\ell}{2}\right)u = \left\langle \frac{7}{2} , 8\right\rangle + \left(\frac{13}{2}\right)\frac{\langle 5 , 12\rangle}{13} = \langle 6 , 14\rangle$

$$\overline{BH} = ||\overline{BH}||\,\boldsymbol{u} \Rightarrow B = H - \left(\tfrac{\ell}{2}\right)\boldsymbol{u} = \left\langle \tfrac{7}{2}, 8\right\rangle - \left(\tfrac{13}{2}\right)\frac{\langle 5, 12\rangle}{13} = \langle 1, 2\rangle$$

El área del triángulo equilátero es : $S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{169\sqrt{3}}{4}\ u^2$ ■

Ejemplo 10 Sea P un punto que divide al segmento $\overline{AB}$ en la razón (-3) : 1, donde A(3 , 2) y B(9 , 6). Si por P pasa una recta $\mathscr{L}_1$, con pendiente 3/2 , otra recta $\mathscr{L}_2$ pasa por A , tal que $d(C, \mathscr{L}) = 10\sqrt{13}$; donde $\mathscr{L}$ es la recta que contiene al segmento $\overline{AB}$ y $\{C\} = (\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2)$. Hallar a) El punto C ; b) Las ecuaciones vectoriales de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$

Solución. Dado que $\left|\frac{-3}{1}\right| > 1$, el punto P está más cerca de B , luego si :

$$P = \left(\frac{n}{m+n}\right)A + \left(\frac{m}{m+n}\right)B \Rightarrow P = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B = \langle 12, 8\rangle$$

Entonces la ecuación vectorial de $\mathscr{L}_1$ es

$$\mathscr{L}_1 = \{\langle 12, 8\rangle + t\langle 1, 3/2\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$$

de donde obtenemos la ecuación general

$$\mathscr{L}_1 : 3x - 2y - 20 = 0$$

Si $\{C\} = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \Rightarrow C(x_1, y_1) \in \mathscr{L}_1$

$$\Rightarrow 3x_1 - 2y_1 - 20 = 0 \qquad (1)$$

Como $\mathscr{L}$ contiene al segmento $\overline{AB}$, su ecuación cartesiana es :

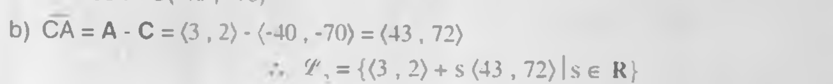
$$y - 2 = \left(\frac{6-2}{9-3}\right)(x-3) \Leftrightarrow \mathscr{L} : 2x - 3y = 0$$

Si $d(C, \mathscr{L}) = 10\sqrt{13} \Rightarrow \frac{2x_1 - 3y_1}{\sqrt{13}} = 10\sqrt{13}$

$$\Rightarrow 2x_1 + 3y_1 = 130 \qquad (2)$$

FIGURA 3.7

a) Resolviendo (1) y (2) por simultáneas obtenemos : C(-40 , -70)



b) $\overline{CA} = A - C = \langle 3, 2\rangle - \langle -40, -70\rangle = \langle 43, 72\rangle$

$$\therefore\ \mathscr{L}_2 = \{\langle 3, 2\rangle + s\langle 43, 72\rangle \mid s \in \mathbf{R}\}$$ ■

Ejemplo 11 Sea el cuadrado ABCD ; si los vértices A y D pertenecen a la recta $\mathscr{L}$: P = ⟨5 , -4⟩ + t ⟨3 , 1⟩ , t ∈ R y B(-1 , 4) , hallar las coordenadas de los otros vértices. Se sabe además que : $x_A < x_D$ y $x_C < x_D$.

Solución. La Figura 3.8 muestra la gráfica de la recta $\mathscr{L}$ y del cuadrado según las

condiciones dadas. Si a = ⟨3 , 1⟩ es el vector direccional de $\mathscr{L}$, entonces el vector normal es n = ⟨-1 , 3⟩

Sea $V = \overline{P_1B} = \langle -1, 4\rangle - \langle 5, -4\rangle = \langle -6, 8\rangle$

La magnitud del lado del cuadrado es la distancia del punto B a la recta $\mathscr{L}$.

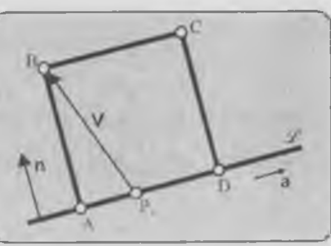


FIGURA 3.8

$$\ell = d(B, \mathscr{L}) = \frac{|V \cdot n|}{||n||} = \frac{|\langle -6, 8\rangle \cdot \langle -1, 3\rangle|}{||\langle -1, 3\rangle||} = 3\sqrt{10}$$

Un vector unitario en la dirección de **a** es $\boldsymbol{u} = \frac{\langle 3, 1\rangle}{\sqrt{10}}$

Luego : $\overline{AB} = ||\overline{AB}||\,\boldsymbol{u}^{\perp} \Rightarrow A = B - 3\sqrt{10}\left(\frac{\langle -1, 3\rangle}{\sqrt{10}}\right) = \langle -1, 4\rangle - \langle -3, 9\rangle \Rightarrow A(2, -5)$

$$\overline{AD} = ||\overline{AD}||\,\boldsymbol{u} \Rightarrow D = A + 3\sqrt{10}\left(\frac{\langle 3, 1\rangle}{\sqrt{10}}\right) = \langle 2, -5\rangle + \langle 9, 3\rangle \Rightarrow D(11, -2)$$

$$\overline{BC} = ||\overline{BC}||\,\boldsymbol{u} \Rightarrow C = B + 3\sqrt{10}\left(\frac{\langle 3, 1\rangle}{\sqrt{10}}\right) = \langle -1, 4\rangle + \langle 9, 3\rangle \Rightarrow C(8, 7)$$ ■

Ejemplo 12 Una persona tiene que ir desde un punto A(1 , 5) hasta un punto B(11 , 5) pero pasando por un río para sacar agua. Si la orilla del río se encuentra en la recta $\mathscr{L}$: P = ⟨-2 , 4⟩ + t ⟨2 , -1⟩ , t ∈ R ; ubicar un punto T en la orilla del río de modo que dicha persona recorra la mínima distancia.

Solución. Como los puntos A y B están situados a un mismo lado de la recta $\mathscr{L}$, se halla el punto B' , simétrico de B respecto de la recta $\mathscr{L}$.

Es evidente que la suma

$$\overline{AT} + \overline{TB} = \overline{AT} + \overline{TB'}$$

es mínima , donde $T \in (\mathscr{L} \cap \overline{AB'})$

La ecuación cartesiana de la recta dada es

$$\mathscr{L} : x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow n = \langle 1, 2\rangle$$

Un vector unitario en la dirección de **n** es

$$\boldsymbol{u} = \frac{n}{||n||} = \frac{\langle 1, 2\rangle}{\sqrt{5}}$$

$$d(B, \mathscr{L}) = \frac{|1(11) + 2(5) - 6|}{\sqrt{1+4}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$$

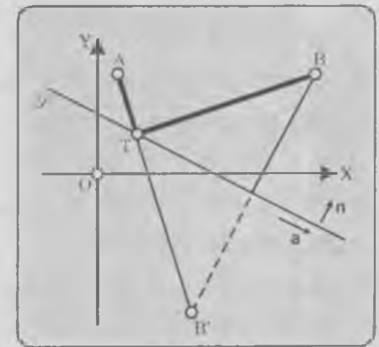


FIGURA 3.9

Si $\overline{B'B} = B - B' \Rightarrow B' = B - \overline{B'B} = B - ||\overline{B'B}||\,\boldsymbol{u}$

$$\Rightarrow B' = \langle 11 , 5\rangle - 2\,(3\sqrt{5})\,\frac{\langle 1 , 2\rangle}{\sqrt{5}} = \langle 5 , -7\rangle$$

Ecuación cartesiana de $\overline{AB'}$: $y - 5 = \left(\frac{-7 - 5}{5 - 1}\right)(x - 1) \Leftrightarrow \overline{AB'} : 3x + y - 8 = 0$

$$\therefore (x + 2y - 6 = 0) \cap (3x + y - 8 = 0) = T(2 , 2)$$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 19*

1. Desde el punto P(1 , 2) se trazan dos lados de un triángulo equilátero cuya base se halla en la recta $\mathscr{L} = \{\langle 0 , 1\rangle + t\langle -3 , 1\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$. Hallar el perímetro de dicho triángulo.
2. Si $\mathscr{L}_1 : 2x - 5y + 7 = 0$, $\mathscr{L}_2 : P = \langle 1 , 3\rangle + t\langle -1 , 4\rangle , t \in \mathbf{R}$, $\mathscr{L}_3 = \{P \mid \langle x - 2 , y + 1\rangle \cdot \langle -3 , 1\rangle = 0\}$ y si $d_1 = d(O , \mathscr{L}_1)$, $d_2 = d(O , \mathscr{L}_2)$ y $d_3 = d(O , \mathscr{L}_3)$, hallar el valor de $d_1^{-2} + d_2^{-2} + d_3^{-2}$.
3. Hallar el valor de k tal que el punto P(k , 4) sea equidistante de las rectas $\mathscr{L}_1 : 13x - 9y - 10 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : x + 3y - 6 = 0$
4. La distancia del punto P(7 , 1) a la recta $\mathscr{L} = \{\langle 2 , 1\rangle + t\,\mathbf{a} \mid t \in \mathbf{R}\}$ es $\sqrt{2}$. Hallar la pendiente de $\mathscr{L}$, sabiendo que es positiva.
5. Sea k un número real diferente de cero , $P_1(2 , 1)$ un punto y $\mathscr{L}_1 : k^2x + (k + 1)y + 3 = 0$, $\mathscr{L}_2 : \frac{1}{k}x - 2ky + 7 = 0$, rectas ortogonales. Hallar $d(P_1 , \mathscr{L}_1) \cdot d(P_1 , \mathscr{L}_2)$.
6. Sean las rectas $\mathscr{L}_1 : 2x + 3y + 4 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 3x + 4y - 6 = 0$. Hallar los puntos de $\mathscr{L}_1$ que distan 2 unidades de $\mathscr{L}_2$.
7. Hallar las ecuaciones de las rectas paralelas a $\mathscr{L} : \langle 3 , 4\rangle \cdot [P - \langle 3 , -1\rangle] = 0$, distantes 2 unidades de ésta.
8. Hallar el simétrico del punto Q(4 , 8) con respecto de la recta $\mathscr{L} : x - y + 2 = 0$
9. Sea ABC un triángulo isósceles de lados iguales $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$. Si A(5 , 2) , B(13 , 8), $\mathscr{L} = \{P_1 + t\,\mathbf{a} \mid t \in \mathbf{R}\}$ contiene a los puntos medios de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, $\|\overline{AC}\| = 5\sqrt{5}$; hallar la distancia de $P_1(-12 , -9/2)$ a la recta que contiene al lado $\overline{BC}$ del triángulo.
10. Desde el punto A(2 , -3) se traza una perpendicular a la recta $\mathscr{L} : 3x - 4y = 0$. A qué distancia se halla dicha perpendicular del punto P(6 , 5).
11. Demostrar que la distancia entre las rectas paralelas $\mathscr{L}_1 : Ax + By + C_1 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : Ax + By + C_2 = 0$ es :

$$d(\mathscr{L}_1 , \mathscr{L}_2) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

12. Hallar los valores de k de modo tal que la distancia del punto P(-3 , 2) a la recta $\mathscr{L} : 5x - 12y + 3 + k = 0$ sea igual a 4 unidades.
13. Hallar la ecuación vectorial de la recta $\mathscr{L}$ cuyos puntos se encuentran a un tercio de la distancia entre las rectas $\mathscr{L}_1 : 2x - y + 9 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 2x - y + 3 = 0$, si la distancia es medida desde la recta $\mathscr{L}_1$.
14. Hallar dos puntos A y B de la recta $\mathscr{L} : x + y - 8 = 0$, tales que si $C(6 + 3\sqrt{3} , 2 + 3\sqrt{3})$, el triángulo ABC resulta equilátero , y encontrar su área.
15. Sea el cuadrado ABCD , donde B y C pertenecen a la recta $\mathscr{L} : \langle -3 , 4\rangle \cdot [P - \langle 3 , 9\rangle] = 0$ y A(2 , 2). Hallar las coordenadas de los otros vértices si se sabe además que $x_C < x_B$ y $x_B < x_A$.
16. Jaimito tiene que ir desde un punto A(1 , 6) hasta el punto B(5 , 10) pero pasando por el río que se halla en la recta $\mathscr{L} : P = \langle 1 , 2\rangle + t\langle 3 , 1\rangle , t \in \mathbf{R}$; ubicar un punto T en la orilla del río de manera que Jaimito recorra la mínima distancia.
17. Las rectas $\mathscr{L}_1 : P = \langle 10 , 20\rangle + t\langle 1 , a\rangle , t \in \mathbf{R}$; $\mathscr{L}_2 : P\langle 10 , 20\rangle + r\langle 1 , -a\rangle , r \in \mathbf{R}$ intersecan al eje X en los puntos A y B respectivamente. Si la distancia entre A y B es 30 , hallar la distancia del punto A a la recta $\mathscr{L}_2$.

3.2 INTERSECCION DE RECTAS

Sabemos que si $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son dos rectas no paralelas en $\mathbf{R}^2$, entonces se intersectan en uno y solamente un punto.

En efecto , sean las rectas no paralelas $\mathscr{L}_1 = \{P_1 + t\,\mathbf{a} \mid t \in \mathbf{R}\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{Q_1 + s\,\mathbf{b} \mid s \in \mathbf{R}\}$

Si $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ no son paralelas implican que **a** y **b** no son paralelos. Entonces existen números t y s tales que

$$\overline{Q_1P_1} = \overline{Q_1P} + \overline{PP_1}$$

O sea

$$P_1 - Q_1 = s\,\mathbf{b} + t\,\mathbf{a} \Rightarrow P_1 - t\,\mathbf{a} = Q_1 + s\,\mathbf{b}$$

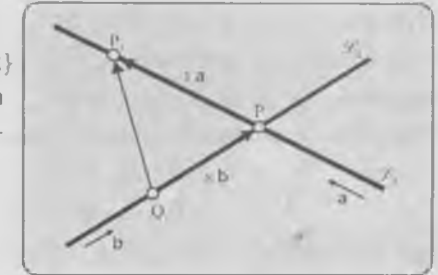


FIGURA 3.10

Por tanto , el punto $P = P_1 - t\,\mathbf{a} = Q_1 + s\,\mathbf{b}$ pertenece tanto a $\mathscr{L}_1$ como a $\mathscr{L}_2$, y es el punto de intersección de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$.

Ejemplo 1 Hallar la intersección de las rectas $\mathscr{L}_1 = \{\langle 2 , 1\rangle + t\langle 1 , -1\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{\langle -5 , 3\rangle + s\langle 3 , 2\rangle \mid s \in \mathbf{R}\}$

Solución. Primero verifiquemos que $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ no son paralelos

Como $\langle 1 , -1\rangle^{\perp} \cdot \langle 3 , 2\rangle = \langle 1 , 1\rangle \cdot \langle 3 , 2\rangle = 3 + 2 = 5 \neq 0 \Rightarrow \mathscr{L}_1 \nparallel \mathscr{L}_2$

Luego , $\exists\, t , s \in \mathbf{R} \mid P = \langle 2 , 1\rangle + t\langle 1 , 1\rangle = \langle -5 , 3\rangle + s\langle 3 , 2\rangle$ (1)

O sea :

$$t\langle 1 , -1\rangle - s\langle 3 , 2\rangle = \langle -7 , 2\rangle \quad (2)$$

Para eliminar s , tomemos el producto escalar de la ecuación (2) con el vector $\langle 3 , 2\rangle^{\perp} = \langle -2 , 3\rangle$, para obtener

$$t\langle 1 , -1\rangle \cdot \langle -2 , 3\rangle - s\,(0) = \langle -7 , 2\rangle \cdot \langle -2 , 3\rangle \Rightarrow t = -4$$

Sustituyendo en (1) : $P = \langle 2 , 1\rangle - 4\langle 1 , -1\rangle = \langle -2 , 5\rangle$

Para comprobar este resultado , eliminemos t , multiplicando escalarmente la ecuación (2) por $\langle 1 , -1\rangle^{\perp} = \langle 1 , 1\rangle$

$$t\,(0) - s\langle 3 , 2\rangle \cdot \langle 1 , 1\rangle = \langle -7 , 2\rangle \cdot \langle 1 , 1\rangle \Rightarrow s = 1$$

Luego en (1) : $P = \langle -5 , 3\rangle + \langle 3 , 2\rangle = \langle -2 , 5\rangle \Rightarrow P(-2 , 5) \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ ■

Ejemplo 2 Hallar la intersección de la recta $\mathscr{L}_1$ que pasa por los puntos (3 , 7) y (9 , 10) , y la recta $\mathscr{L}_2$ que pasa por (2 , -1) y (11 , 8).

Solución. Los vectores direccionales de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son respectivamente

$$\mathbf{a} = \langle 9 , 10\rangle - \langle 3 , 7\rangle = \langle 6 , 3\rangle = 3\langle 2 , 1\rangle$$

$$\mathbf{b} = \langle 11 , 8\rangle - \langle 2 , -1\rangle = \langle 9 , 9\rangle = 9\langle 1 , 1\rangle$$

Como $(3 , 7) \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow \mathscr{L}_1 = \{\langle 3 , 7\rangle + t\langle 2 , 1\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$

$(2 , -1) \in \mathscr{L}_2 \Rightarrow \mathscr{L}_2 = \{\langle 2 , -1\rangle + s\langle 1 , 1\rangle \mid s \in \mathbf{R}\}$

Dado que $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ no son paralelos , entonces $\exists\, t , s \in \mathbf{R}$, tales que

$$P = \langle 3 , 7\rangle + t\langle 2 , 1\rangle = \langle 2 , -1\rangle + s\langle 1 , 1\rangle \quad (1)$$

de donde : $t\langle 2 , 1\rangle - s\langle 1 , 1\rangle = \langle -1 , -8\rangle \Leftrightarrow \langle 2t - s , t - s\rangle = \langle -1 , -8\rangle$

Por la igualdad de vectores : $2t - s = -1$ y $t - s = -8$

Resolviendo el sistema obtenemos : $t = 7$ y $s = 15$

Finalmente , sustituyendo ambos valores en (1) se tiene :

$$P = \langle 3 , 7\rangle + 7\langle 2 , 1\rangle = \langle 17 , 14\rangle$$

$$P = \langle 2 , -1\rangle + 15\langle 1 , 1\rangle = \langle 17 , 14\rangle$$

En consecuencia , $P(17 , 14) \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ ■

Ejemplo 3 Hallar vectorialmente el punto de intersección de las rectas de ecuaciones $\mathscr{L}_1 : x + 3y = 7$ y $\mathscr{L}_2 : 2x + y = -1$

Solución. La ecuación vectorial equivalente al sistema dado es

$$\langle x + 3y , 2x + y\rangle = \langle 7 , -1\rangle \Leftrightarrow x\langle 1 , 2\rangle + y\langle 3 , 1\rangle = \langle 7 , -1\rangle \quad (1)$$

Esta ecuación se puede resolver empleando el método descrito en el Ejemplo 1. Es decir , se elimina y multiplicando ambos miembros de la ecuación (1) por $\langle 3 , 1\rangle^{\perp} = \langle -1 , 3\rangle$

$$\Rightarrow x\langle 1 , 2\rangle \cdot \langle -1 , 3\rangle = \langle 7 , -1\rangle \cdot \langle -1 , 3\rangle$$

$$x\,(-1 + 6) = (-7 - 3) \Leftrightarrow x = -2$$

Ahora , para eliminar x multiplicamos escalarmente (1) por $\langle 1 , 2\rangle^{\perp} = \langle -2 , 1\rangle$

$$\Rightarrow y\langle 3 , 1\rangle \cdot \langle -2 , 1\rangle = \langle 7 , -1\rangle \cdot \langle -2 , 1\rangle$$

$$y\,(-6 + 1) = (-14 - 1) \Leftrightarrow y = 3$$

Por lo tanto , el punto de intersección es P(-2 , 3) ■

Nota. Los ejemplos anteriores ilustran tres de los muchos métodos que existen para hallar la intersección de dos rectas en el plano. Dé aquí en adelante , usaremos el *método directo* mostrado en el Ejemplo 1.

Ejemplo 4 Si $\mathscr{L}_1$ es la recta que pasa por A(4 , 2) y es perpendicular al vector $\mathbf{V} = \langle 5 , 3\rangle$ y $\mathscr{L}_2$ es la recta que pasa por B(-1 , -1) y es paralela a la recta $\mathscr{L}_3 : 10x - 6y + 3 = 0$, hallar $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$.

Solución. Si $\mathscr{L}_1 \perp \mathbf{V} = \langle 5 , 3\rangle \Rightarrow \mathscr{L}_1 = \{\langle 4 , 2\rangle + t\langle -3 , 5\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$

$\mathscr{L}_2 \parallel \mathscr{L}_3 \Rightarrow m_2 = m_3 = \frac{10}{6}$, luego $\mathbf{b} = \langle 3 , 5\rangle$ es el vector direccional de $\mathscr{L}_2$, entonces : $\mathscr{L}_2 = \{\langle -1 , -1\rangle + r\langle 3 , 5\rangle \mid r \in \mathbf{R}\}$

Dado que $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ no son paralelos $\Rightarrow \exists\, t , r \in \mathbf{R}$ tales que :

$$P = \langle 4 , 2\rangle + t\langle -3 , 5\rangle = \langle -1 , -1\rangle + r\langle 3 , 5\rangle \quad (1)$$

$$\Rightarrow t\langle -3 , 5\rangle - r\langle 3 , 5\rangle = \langle -5 - 3\rangle$$

Para eliminar r , multipliquemos escalarmente ambos miembros por $\langle 3 , 5\rangle^{\perp}$

$$t\langle -3 , 5\rangle \cdot \langle -5 , 3\rangle = \langle -5 , -3\rangle \cdot \langle -5 , 3\rangle$$

$$\Rightarrow t\,(15 + 15) = (25 - 9) \Leftrightarrow t = 8/15$$

Sustituyendo en (1) obtenemos : $P = \langle 4 , 2\rangle + \frac{8}{15}\langle -3 , 5\rangle = \left\langle \frac{12}{5} , \frac{14}{3} \right\rangle$

$$\therefore \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \{P(12/5 , 14/3)\}$$ ■

Ejemplo 5 Sea $\overline{AB} = \{P \in R^2 | P = \langle 3, -5\rangle + t\langle -6, 4\rangle, t [0, 1]\}$. Determinar el punto de la recta $\mathscr{L} = \{\langle 1, -3\rangle + t\langle -7, 2\rangle | t \in R\}$ que equidiste de los puntos A y B.

Solución. Los puntos que equidistan de A y B se encuentran en la recta $\mathscr{L}_1$, mediatriz del segmento $\overline{AB}$. Luego, el punto pedido I se halla en la intersección de $\mathscr{L}_1$ con la recta dada $\mathscr{L}$.

El punto medio del segmento $\overline{AB}$ es : $M = \langle 3, -5\rangle + \frac{1}{2}\langle -6, 4\rangle \Rightarrow M(0, -3)$

El vector normal al segmento $\overline{AB}$ es $\mathbf{n} = \langle -6, 4\rangle^{\perp} = \langle -4, -6\rangle = -2\langle 2, 3\rangle$

Como el vector direccional de la mediatriz **a**, es paralelo a **n** $\Rightarrow$ $\mathbf{a} = \langle 2, 3\rangle$

Por lo que, la ecuación vectorial de la mediatriz es $\mathscr{L}_1 = \{\langle 0, -3\rangle + s\langle 2, 3\rangle | s \in R\}$

Si $I \in \mathscr{L} \cap \mathscr{L}_1 \Rightarrow \exists\, t, s \in R$, tales que

$$I = \langle 1, -3\rangle + t\langle -7, 2\rangle = \langle 0, -3\rangle + s\langle 2, 3\rangle \quad (1)$$

$$\Rightarrow t\langle -7, 2\rangle - s\langle 2, 3\rangle = \langle -1, 0\rangle$$

$$\Rightarrow t\langle -7, 2\rangle \cdot \langle -3, 2\rangle = \langle -1, 0\rangle \cdot \langle -3, 2\rangle \Leftrightarrow t = 3/25$$

Sustituyendo en (1) : $I = \langle 1, -3\rangle + \frac{3}{25}\langle -7, 2\rangle \Rightarrow I(4/25, -69/25)$ ■

Ejemplo 6 Sean las rectas $\mathscr{L}_1 : P = \langle 1, 2\rangle + t\langle 1, -2\rangle, t \in R$; $\mathscr{L}_2 : P = \langle a, 2a\rangle + s\mathbf{b}, s \in R$. Si $\mathscr{L}_2 \perp \mathscr{L}_1$ y $(\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_1) \cap$ (Eje Y) $\neq \varnothing$, hallar a.

Solución. Si $\mathscr{L}_2 \perp \mathscr{L}_1 \Rightarrow \mathscr{L}_2 : P = \langle a, 2a\rangle + s\langle 2, 1\rangle, s \in R$

$$\text{En } \mathscr{L}_1 : \langle x, y\rangle = \langle 1, 2\rangle + t\langle 1, -2\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$$

Si $x = 0 \Rightarrow 1 + t = 0 \Leftrightarrow t = -1$; luego, $y = 2 - 2(-1) = 4$

Por tanto, $\mathscr{L}_1$ intercepta al eje Y en el punto P(0, 4)

Dado que, $(\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_1) \cap$ (Eje Y) $\neq \varnothing \Rightarrow P(0, 4) \in \mathscr{L}_2$

$$\Rightarrow \langle 0, 4\rangle = \langle a, 2a\rangle + s\langle 2, 1\rangle$$

Multiplicando escalarmente ambos miembros de esta ecuación por $\langle 2, 1\rangle^{\perp}$ obtendremos lo deseado, esto es

$$\langle 0, 4\rangle \cdot \langle -1, 2\rangle = \langle a, 2a\rangle \cdot \langle -1, 2\rangle, \text{ de donde : } a = 8/3$$ ■

Ejemplo 7 En la Figura 3.11 se tiene la recta $\mathscr{L}_1 : x + 2y - 16 = 0$ y la recta $\mathscr{L}_2$ que es perpendicular a $\mathscr{L}_1$ y que corta al eje X en el punto A(1, 0). Hallar el área del triángulo ABC.

Solución. La familia de rectas que son perpendiculares a $\mathscr{L}_1$ tiene la forma

$$\mathscr{L}_2 : 2x - y + k = 0$$

Como $A(1, 0) \in \mathscr{L}_2 \Rightarrow 2(1) - (0) + k = 0 \Leftrightarrow k = -2$

$$\therefore \mathscr{L}_2 : 2x - y - 2 = 0$$

En $\mathscr{L}_1$, si $y = 0 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow C(16, 0)$

$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = (x + 2y = 16) \cap (2x - y = 2) = B(4, 6)$

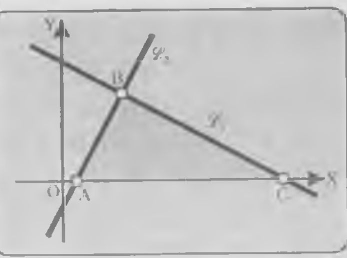


FIGURA 3.11

Entonces, $\overline{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = \langle 3, 6\rangle$ y $\overline{BC} = \mathbf{C} - \mathbf{B} = \langle 12, -6\rangle$

$$\therefore a(\Delta ABC) = \frac{1}{2} | \overline{AB} \cdot \overline{BC}^{\perp} | = \frac{1}{2} | \langle 3, 6\rangle \cdot \langle 6, 12\rangle = 45\ u^2$$ ■

Ejemplo 8 Dadas las rectas $\mathscr{L}_1 = \{\langle 3, 6\rangle + t\langle 1, 2\rangle | t \in R\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{\langle 0, 3\rangle + s\langle 1, -1\rangle | s \in R\}$. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ y que forma con los ejes coordenados positivos un triángulo de área 4 u².

Solución. Si $P_1 \in (\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2) \Rightarrow \exists\, t, s \in R$, tales que

$$P_1 = \langle 3, 6\rangle + t\langle 1, 2\rangle = \langle 0, 3\rangle + s\langle 1, -1\rangle \quad (1)$$

$$\Rightarrow t\langle 1, 2\rangle - s\langle 1, -1\rangle = \langle -3, -3\rangle$$

$$\Rightarrow t\langle 1, 2\rangle \cdot \langle 1, 1\rangle = \langle -3, -3\rangle \cdot \langle 1, 1\rangle \Leftrightarrow t = -2$$

Sustituyendo en (1) se tiene $P_1(1, 2)$

Sea la recta buscada, $\mathscr{L} : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (2)$

Si $P_1(1, 2) \in \mathscr{L} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1 \Leftrightarrow 2a + b = ab \quad (3)$

Dado que $a(\Delta AOB) = 4 \Rightarrow |ab| = 8 \Leftrightarrow ab = 8$ ó $ab = -8$

Como a y b son positivos $\Rightarrow ab = 8 \quad (4)$

Resolviendo (3) y (4) obtenemos, $a = 2$ y $b = 4$

FIGURA 3.12

Luego, en (2) : $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1 \Leftrightarrow \mathscr{L} : 2x + y - 4 = 0 \Rightarrow m = -2$

Por tanto, haciendo uso de la ecuación (9), $\mathscr{L} : P = \langle 1, 2\rangle + t\langle 1, -2\rangle, t \in R$ ■

Ejemplo 9 Hallar el área del triángulo determinado por las rectas $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$, sabiendo que $\mathscr{L}_1$ pasa por el punto (1, 4) y es ortogonal al vector $\langle 3, 5\rangle$; $\mathscr{L}_2$ pasa por el punto (6, 1) y es paralela a la recta $\mathscr{L} : 5x - 2y = 3$; $\mathscr{L}_3$ pasa por el punto (8, 6) y es perpendicular a una recta de pendiente -7/2.

Solución. Las ecuaciones paramétricas vectoriales de las tres rectas son

$$\mathscr{L}_1 : P = \langle 1 , 4\rangle + t\langle -5 , 3\rangle , \ \mathscr{L}_2 : P = \langle 6 , 1\rangle + r\langle 2 , 5\rangle , \ \mathscr{L}_3 : P = \langle 8 , 6\rangle + s\langle 7 , 2\rangle$$

Si $A \in (\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2) \Rightarrow \exists\, r , t \in \mathbf{R}$, tales que

$A = \langle 1 , 4\rangle + t\langle -5 , 3\rangle = \langle 6 , 1\rangle + r\langle 2 , 5\rangle$ (1)

$\Rightarrow t\langle -5 , 3\rangle - r\langle 2 , 5\rangle = \langle 5 , -3\rangle$

$\Rightarrow t\langle -5 , 3\rangle \cdot \langle 3 , 5\rangle = \langle 5 , -3\rangle \cdot \langle 3 , 5\rangle \Leftrightarrow t = -1$

Sustituyendo en (1) obtenemos , A(6 , 1)

Si $B \in (\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_3) \Rightarrow \exists\, t , s \in \mathbf{R}$, tales que

$B = \langle 1 , 4\rangle + t\langle -5 , 3\rangle = \langle 8 , 6\rangle + s\langle 7 , 2\rangle$ (2)

$\Rightarrow t\langle -5 , 3\rangle - s\langle 7 , 2\rangle = \langle 7 , 2\rangle$

$\Rightarrow t\langle -5 , 3\rangle \cdot \langle -2 , 7\rangle = \langle 7 , 2\rangle \cdot \langle -2 , 7\rangle \Leftrightarrow t = 0$

FIGURA 3.13

Sustituyendo en (2) se tiene : B(1 , 4)

Si $C \in (\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3) \Rightarrow \exists\, r , s \in \mathbf{R} \mid C = \langle 6 , 1\rangle + r\langle 2 , 5\rangle = \langle 8 , 6\rangle + s\langle 7 , 2\rangle$ (3)

$\Rightarrow r\langle 2 , 5\rangle - s\langle 7 , 2\rangle = \langle 2 , 5\rangle \Rightarrow r\langle 2 , 5\rangle \cdot \langle -2 , 7\rangle = \langle 2 , 5\rangle \cdot \langle -2 , 7\rangle \Leftrightarrow r = 1$

Reemplazando en (3) obtenemos : C (8 , 6)

Luego , $\vec{AB} = \langle 1 , 4\rangle - \langle 6 , 1\rangle = \langle -5 , 3\rangle$ y $\vec{AC} = \langle 8 , 6\rangle - \langle 6 , 1\rangle = \langle 2 , 5\rangle$

$$\therefore\ a(\Delta ABC) = \frac{1}{2}|\vec{AB} \cdot \vec{AC}^{\perp}| = \frac{1}{2}|\langle -5 , 3\rangle \cdot \langle -5 , 2\rangle| = 15.5\ u^2$$ ■

Ejemplo 10 En el plano , dados los vectores **A** y **B** , no paralelos ; sean $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ dos rectas tales que $P_0 \in \mathscr{L}_1$, $Q_0 \in \mathscr{L}_2$, $\mathbf{A} \parallel \mathscr{L}_1$, $\mathbf{B} \parallel \mathscr{L}_2$, y sea $M \in (\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2)$.

a) Mostrar que : $\mathbf{M} = \mathbf{Q}_0 + \left(\dfrac{\vec{Q_0P_0} \cdot \mathbf{A}^{\perp}}{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{\perp}}\right) \mathbf{B}$

b) Usando lo anterior , para $\mathscr{L}_1 : 3x - 2y + 1 = 0$ y $\mathscr{L}_2$ que pasa por los puntos (-3 , 2) y (2 , 5) , hallar $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$

Solución. a) En la Figura 3.14 : $\vec{Q_0M} \parallel \mathbf{B} \Rightarrow \vec{Q_0M} = t\mathbf{B}$

$\Rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{Q}_0 + t\,\mathbf{B}$ (1)

En el $\Delta\, M P_0 Q_0$: $\vec{Q_0M} = \vec{Q_0P_0} + \vec{P_0M}$

Multiplicando escalarmente ambos extremos de esta igualdad por $\mathbf{A}^{\perp}$ se tiene :

$\vec{Q_0M} \cdot \mathbf{A}^{\perp} = \vec{Q_0P_0} \cdot \mathbf{A}^{\perp} + 0$

$t\,\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{\perp} = \vec{Q_0P_0} \cdot \mathbf{A}^{\perp} \Rightarrow t = \dfrac{\vec{Q_0P_0} \cdot \mathbf{A}^{\perp}}{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{\perp}}$

Luego , en (1) : $\mathbf{M} = \mathbf{Q}_0 + \left(\dfrac{\vec{Q_0P_0} \cdot \mathbf{A}^{\perp}}{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{\perp}}\right) \mathbf{B}$

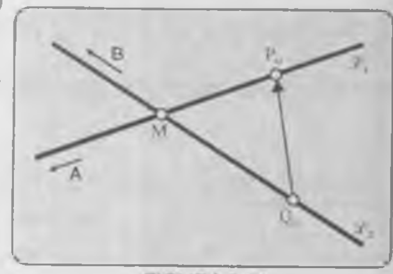


FIGURA 3.14

b) En $\mathscr{L}_1$, el vector normal es $\mathbf{n} = \langle 3 , -2\rangle \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{n}^{\perp} = \langle 2 , 3\rangle$

Si elegimos $x_0 = 1 \Rightarrow 3(1) - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y_0 = 2 \Rightarrow P_0(1 , 2) \in \mathscr{L}_1$

En $\mathscr{L}_2$, el vector direccional es $\mathbf{B} = \langle 2 , 5\rangle - \langle -3 , 2\rangle = \langle 5 , 3\rangle$ y $Q_0(-3 , 2) \in \mathscr{L}_2$

Por lo tanto , en la fórmula obtenida en la parte a) , tendremos :

$$M = \langle -3 , 2\rangle + \left(\frac{\langle 4 , 0\rangle \cdot \langle -3 , 2\rangle}{\langle 5 , 3\rangle \cdot \langle -3 , 2\rangle}\right)\langle 5 , 3\rangle = \langle -3 , 2\rangle + \left(\frac{-12}{-9}\right)\langle 5 , 3\rangle = \langle 11/3 , 6\rangle$$

$\therefore$ M(11/3 , 6) ■

Ejemplo 11 Sean las rectas $\mathscr{L}_1 = \{\langle 4 , 5\rangle + t\langle -3 , 2\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{\langle 5 , 4\rangle + s\langle -2 , 1\rangle \mid s \in \mathbf{R}\}$. Hallar la ecuación general de la recta $\mathscr{L}$ que pasa por $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ e interseca al eje X en un punto cuya abscisa es igual a dos veces su pendiente.

Solución. Si $P(x , y) \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \Rightarrow \exists\, r , s \in \mathbf{R}$, tales que

$P = \langle 4 , 5\rangle + t\langle -3 , 2\rangle = \langle 5 , 4\rangle + s\langle -2 , 1\rangle$ (1)

$\Rightarrow t\langle -3 , 2\rangle - s\langle -2 , 1\rangle = \langle 1 , -1\rangle$

$\Rightarrow t\langle -3 , 2\rangle \cdot \langle -1 , -2\rangle = \langle 1 , -1\rangle \cdot \langle -1 , -2\rangle \Leftrightarrow t = -1$

Sustituyendo en (1) obtenemos : $P = \langle 4 , 5\rangle - \langle -3 , 2\rangle \Rightarrow P(7 , 3) \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$

La recta $\mathscr{L}$ buscada tiene la forma , $\mathscr{L} : y = mx + b$

Como $P(7 , 3) \in \mathscr{L} \Rightarrow 3 = m(7) + b \Rightarrow b = 3 - 7m$; luego , $\mathscr{L} : y = mx + 3 - 7m$

Si $\mathscr{L}$ interseca al eje X en el punto $(x_0 , 0) \Rightarrow 0 = mx_0 + 3 - 7m \Rightarrow x_0 = \dfrac{7m - 3}{m}$

Por la condición del problema ; $x_0 = 2m \Rightarrow x_0 = \dfrac{7m - 3}{m} = 2m$

$\Rightarrow 2m^2 - 7m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1/2$ ó $m = 3$

Hay soluciones :

$m = 1/2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 3 - \frac{7}{2} \Leftrightarrow \mathscr{L} : x - 2y - 1 = 0$

$m = 3 \Rightarrow y = 3x + 3 - 21 \Leftrightarrow \mathscr{L} : 3x - y - 18 = 0$ ■

Ejemplo 12 Una de las diagonales de un rombo está contenida en la recta $\mathscr{L}_1 = \{\langle k - 1 , 5k - 6\rangle + t\langle k - 3 , 1\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$ y uno de los lados del mismo está contenido en la recta $\mathscr{L}_2 = \{\langle -4k , k - 2\rangle + s\langle 3k , k + 1\rangle \mid s \in \mathbf{R}\}$. Si $k > 0$ y $M(3k + 1 , 6k)$ es el punto de intersección de las diagonales del rombo , hallar los vértices y el área del rombo.

Solución. Si $P_1(k-1\ ,\ 5k-6)$ es el punto de paso y $\mathbf{a} = \langle k-3\ ,\ 1\rangle$ es el vector direccional de $\mathscr{L}_1$, entonces

$\overline{P_1M} \parallel \mathbf{a} \Leftrightarrow \overline{P_1M} \cdot \mathbf{a}^{\perp} = 0$

$\Rightarrow \langle 2k+2\ ,\ k+6\rangle \cdot \langle -1\ ,\ k-3\rangle = 0$

de donde obtenemos : $k^2 + k - 20 = 0 \Leftrightarrow k = 4$ ó $k = -5$

Dado que $k > 0$, se elige $k = 4$

Para este valor de k se tiene : $M(13\ ,\ 24)$

FIGURA 3.15

$\mathscr{L}_1 = \{\langle 3\ ,\ 14\rangle + t\langle 1\ ,\ 1\rangle \mid t \in \mathbb{R}\}$, $\mathscr{L}_2 = \{\langle -16\ ,\ 2\rangle + s\langle 12\ ,\ 5\rangle \mid s \in \mathbb{R}\}$

Si $\{A\} \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \Rightarrow \exists\, t\ ,\ s \in \mathbb{R}$, tales que

$$\mathbf{A} = \langle 3\ ,\ 14\rangle + t\langle 1\ ,\ 1\rangle = \langle -16\ ,\ 2\rangle + s\langle 12\ ,\ 5\rangle \qquad (1)$$

$\Rightarrow t\langle 1\ ,\ 1\rangle - s\langle 12\ ,\ 5\rangle = \langle -19\ ,\ -12\rangle$

$\Rightarrow t\langle 1\ ,\ 1\rangle \cdot \langle -5\ ,\ 12\rangle = \langle -19\ ,\ -12\rangle \cdot \langle -5\ ,\ 12\rangle$, de donde : $t = -7$

Sustituyendo en (1) : $\mathbf{A} = \langle 3\ ,\ 14\rangle - 7\langle 1\ ,\ 1\rangle \Rightarrow A(-4\ ,\ 7)$

M es punto medio de $\overline{AC} \Rightarrow \mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{C}) \Rightarrow \mathbf{C} = 2\mathbf{M} - \mathbf{A}$

$\Rightarrow \mathbf{C} = \langle 26\ ,\ 48\rangle - \langle -4\ ,\ 7\rangle \Rightarrow C(30\ ,\ 41)$

Como : $\mathscr{L}_3 \perp \mathscr{L}_1 \Rightarrow \mathscr{L}_3 = \{\langle 13\ ,\ 24\rangle + r\langle -1\ ,\ 1\rangle \mid r \in \mathbb{R}\}$

Si $\{D\} \in \mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3 \Rightarrow \exists\, s\ ,\ r \in \mathbb{R}$, tales que

$$\mathbf{D} = \langle -16\ ,\ 2\rangle + s\langle 12\ ,\ 5\rangle = \langle 13\ ,\ 24\rangle + r\langle -1\ ,\ 1\rangle \qquad (2)$$

$\Rightarrow s\langle 12\ ,\ 5\rangle - r\langle -1\ ,\ 1\rangle = \langle 29\ ,\ 22\rangle$

$\Rightarrow s\langle 12\ ,\ 5\rangle \cdot \langle -1\ ,\ -1\rangle = \langle 29\ ,\ 22\rangle \cdot \langle -1\ ,\ -1\rangle \Rightarrow s = 3$

Reemplazando en (2) : $\mathbf{D} = \langle -16\ ,\ 2\rangle + 3\langle 12\ ,\ 5\rangle \Rightarrow D(20\ ,\ 17)$

También : $\mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{D}) \Rightarrow \mathbf{B} = 2\mathbf{M} - \mathbf{D} = \langle 26\ ,\ 48\rangle - \langle 20\ ,\ 17\rangle \Rightarrow B(6\ ,\ 31)$

Area del rombo : $S = |\overline{AB} \cdot \overline{BC}^{\perp}| = |\langle 10\ ,\ 24\rangle \cdot \langle -10\ ,\ 24\rangle| \Rightarrow S = 476\ u^2$ ■

EJERCICIOS : Grupo 20

1. Sean $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ dos rectas ortogonales tales que $\mathscr{L}_1$ pasa por (3 , 2) y (2 , 5) y $\mathscr{L}_2$ pasa por (2 , 1). Hallar la intersección de ambas rectas.
2. Sean las rectas $\mathscr{L}_1 : \mathbf{P} = \langle 1\ ,\ 0\rangle + s\langle 2\ ,\ 1\rangle$, $s \in \mathbb{R}$; $\mathscr{L}_2 : \mathbf{P} = \langle a\ ,\ 2a\rangle + t\,b$, $t \in \mathbb{R}$. Si $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \cap$ (Eje Y) $\neq \varnothing$, hallar el valor de a.
3. Hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}$ que pasa por la intersección de las rectas $\mathscr{L}_1 = \{\langle 3\ ,\ 2\rangle \cdot (\mathbf{P} - \langle 0\ ,\ 2\rangle) = 0\}$, $\mathscr{L}_2 : \mathbf{P} = \langle 1\ ,\ 0\rangle + t\langle 6\ ,\ 2\rangle$, $t \in \mathbb{R}$, sabiendo que $\mathscr{L} \parallel \mathbf{i}$.

4. Dadas las rectas $\mathscr{L}_1 : \begin{cases} x = -3r \\ y = 2r \end{cases}$, $\mathscr{L}_2 : \langle -12\ ,\ 3\rangle \cdot (\mathbf{P} - \langle 0\ ,\ 3\rangle) = 0$ y $\mathscr{L}_3 : \langle a\ ,\ b\rangle + t\,\mathbf{i}$, $t \in \mathbb{R}$. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ y sea perpendicular a $\mathscr{L}_3$.
5. Dados los vértices consecutivos de un cuadrilátero A(-3 , 1) , B(3 , 9) , C(7 , 6) y D(-2 , -6) , hallar el punto de intersección de sus diagonales.
6. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $P_1(2/5\ ,\ 4/5)$ y por el punto de intersección de las rectas $\mathscr{L}_1 : \mathbf{P} = \langle 4\ ,\ -3\rangle + t\langle 1\ ,\ 2\rangle$, $t \in \mathbb{R}$ y $\mathscr{L}_2 : \mathbf{P} = \langle 2\ ,\ 1\rangle + r\langle -3\ ,\ 4\rangle$, $r \in \mathbb{R}$.
7. Si $\mathscr{L}_2 : \langle 5\ ,\ 3\rangle \cdot [\,\mathbf{P} - \langle 0\ ,\ 1\rangle] = 0$, hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}_1$ tal que $(7\ ,\ 0) \in \mathscr{L}_1$ y $\{(4\ ,\ k)\} \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$.
8. Hallar el perímetro del triángulo determinado por las rectas $\mathscr{L}_1 : \mathbf{P} = \langle 5\ ,\ 4\rangle + t\langle -3\ ,\ -4\rangle$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathscr{L}_2 : \mathbf{Q} = \langle 5\ ,\ 0\rangle + s\langle 0\ ,\ 4\rangle$, $s \in \mathbb{R}$ y el eje X.
9. Hallar el punto de la recta $\mathscr{L} : \mathbf{P} = \langle -2\ ,\ 0\rangle + t\langle 4\ ,\ 3\rangle$ que está más cercano al punto Q(3 , 5).
10. Hallar la ecuación normal de la recta $\mathscr{L}_2$ de pendiente entera negativa , que no pase por el tercer cuadrante : sabiendo además que $\mathscr{L}_3 \perp \mathscr{L}_1$ en A , $B \in (\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3)$, $C \in (\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2)$, la abscisa de A es 3 , $\mathscr{L}_1 : 3x - y - 5 = 0$, $\|\overline{BC}\| = 5\sqrt{10}$ y $a(\Delta ABC) = 60\ u^2$.
11. Sea $\mathscr{L}$ una recta que pasa por la intersección de $\mathscr{L}_1 : x + 2y - 1 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 5x - 3y - 18 = 0$, y que forma con los ejes coordenados un triángulo de área igual a 6 u^2. Halle la ecuación de $\mathscr{L}$ en su forma simétrica.
12. Sea ABCD un rombo tal que A(-2 , 1) y la diagonal $\overline{BD}$ mide $2\sqrt{13}$ unidades y está contenida en la recta $\mathscr{L} : 2x - 3y + 6 = 0$. Hallar :
    a) El área del rombo.
    b) Las pendientes de las rectas que contienen a los lados del rombo.
13. La recta $\mathscr{L} : \mathbf{P} = \langle 0\ ,\ 3\rangle + t\langle 2\ ,\ 3\rangle$, $t \in \mathbb{R}$ contiene a un lado de un paralelogramo, y la recta $\mathscr{L}_1 : \mathbf{P} = \langle 0\ ,\ 4\rangle + r\langle 1\ ,\ 5\rangle$ contiene a una de sus diagonales. Si el punto A(3 , -3) es un vértice del paralelogramo , halle la ecuación vectorial de la recta que contiene a la otra diagonal.
14. La distancia que separa a una recta $\mathscr{L}$, que pasa por la intersección de $\mathscr{L}_1 : x - 2y + 3 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : x - y - 5 = 0$, del punto Q(1 , 4) es de 4 unidades. Hallar la ecuación de esta recta. (Dos soluciones)

3.3 ANGULO ENTRE DOS RECTAS

Designemos por $\mathscr{L}_2$ la recta con mayor inclinación α_2, y por $\mathscr{L}_1$ la recta de menor inclinación α_1. Si estas dos rectas se cortan, entonces el ángulo θ entre ambas se define por

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

Así, la Figura 3.16, muestra un caso en que el ángulo θ de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ es agudo, y la Figura 3.17, un caso en que el ángulo θ es obtuso.

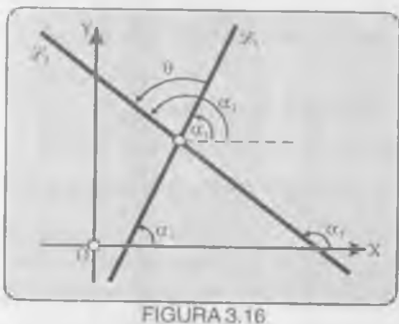


FIGURA 3.16

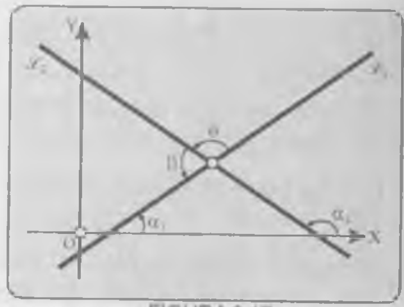


FIGURA 3.17

Nota 1. A la recta de menor inclinación $\mathscr{L}_1$, se le denomina *recta inicial* porque a partir de ella se mide, en sentido antihorario, el ángulo θ. A la recta de mayor inclinación $\mathscr{L}_2$ se le llama *recta final*, por que allí termina la medida del ángulo θ.

Si m_1 y m_2 son las pendientes de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, entonces por definición

$$m_1 = Tg\alpha_1 \quad y \quad m_2 = Tg\alpha_2$$

En la Figura 3.16 se observa claramente que $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$

Aplicando tangentes se tiene

$$Tg\theta = Tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{Tg\alpha_2 - Tg\alpha_1}{1 + Tg\alpha_1 \cdot Tg\alpha_2}$$

$$\therefore \quad Tg\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \qquad (4)$$

Si $Tg\theta > 0$, entonces θ es agudo, o sea, $0° < \theta < 90°$

$Tg\theta = 0$, entonces $\theta = 0°$, implica que : $\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2$, $(m_1 = m_2)$

$Tg\theta < 0$, entonces θ es obtuso, o sea : $90° < \theta < 180°$

$Tg\theta = \infty$, entonces $\theta = 90°$, implica que $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2$, $(m_1 \cdot m_2 = -1)$

Nota 2. Para aplicar la fórmula **(4)** y evitar confusiones, es necesario trazar las gráficas de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$. Sin embargo, en la Figura 3.17, se observa que

$$\beta = \pi - \theta \Rightarrow Tg\beta = Tg(\pi - \theta) = -Tg\theta$$

Es decir, las tangentes de los ángulos suplementarios que forman dos rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, son iguales pero difieren en signo.

Esta propiedad se puede emplear para hallar el ángulo θ entre $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ sin necesidad de trazar sus gráficas, haciendo uso de la fórmula

$$Tg\,\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| \qquad (5)$$

Ejemplo Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto P(2 , -1) y forman cada una un ángulo de 45° con la recta $\mathscr{L}$: 2x - 3y + 7 = 0.

Solución. Sean m_1 y m_2 las pendientes de las rectas buscadas.

Si $\mathscr{L} : 2x - 3y + 7 = 0 \Leftrightarrow m_3 = 2/3$

Por la fórmula **(5)** : $Tg\,45° = \left|\frac{m - m_3}{1 + m \cdot m_3}\right|$

Donde m es el valor de m_1 o el de m_2

$$\Rightarrow 1 = \left|\frac{m - 2/3}{1 + (1/3)m}\right| \Leftrightarrow |2m + 3| = |3m - 2|$$

$$\Leftrightarrow m_1 = -1/2 \text{ ó } m_2 = 5$$

FIGURA 3.18

En consecuencia, las ecuaciones requeridas son

$$y + 1 = -\frac{1}{5}(x - 2) \text{ ó } y + 1 = 5(x - 2) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : x + 5y + 3 = 0 \text{ ó } \mathscr{L}_2 : 5x - y - 11 = 0 \quad ■$$

OBSERVACION 3.1 La fórmula **(4)** nos permite hallar el ángulo agudo o el obtuso entre $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ en términos de sus respectivas pendientes. Análogamente, si $\mathscr{L}_1 = \{P_1 + t\mathbf{a}\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{P_2 + s\mathbf{b}\}$, son las ecuaciones vectoriales de dos rectas no verticales, entonces el ángulo formado por $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ es el ángulo formado por sus vectores de dirección **a** y **b** respectivamente, y se determina mediante la fórmula

$$Cos\,\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|} \qquad (6)$$

Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0 \Rightarrow Cos\,\theta > 0$, implica que θ es agudo

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0 \Rightarrow Cos\,\theta < 0$, implica que θ es obtuso.

OBSERVACION 3.2 Si a y **b** son vectores de igual magnitud, es decir $||\mathbf{a}|| = ||\mathbf{b}||$ y $\mathbf{a} \neq -\mathbf{b}$, entonces el vector suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ divide al ángulo θ formado por **a** y **b** en dos partes iguales , esto es , $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ sigue la dirección de la bisectriz de **a** y **b**.

En efecto , por la fórmula (6)

$$\text{Cos}\,\alpha_1 = \frac{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})}{||\mathbf{a}||\,||\mathbf{a}+\mathbf{b}||} = \frac{||\mathbf{a}||^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||\,||\mathbf{a}+\mathbf{b}||} = \frac{||\mathbf{b}||^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{b}||\,||\mathbf{a}+\mathbf{b}||} = \frac{\mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{a})}{||\mathbf{b}||\,||\mathbf{a}+\mathbf{b}||} = \text{Cos}\,\alpha_2$$

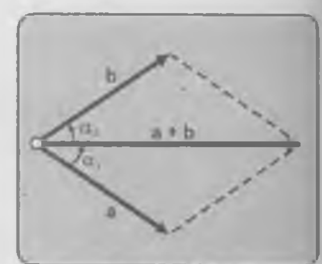


FIGURA 3.19

Luego , si $\text{Cos}\,\alpha_1 = \text{Cos}\,\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$

OBSERVACION 3.3 Si a y **b** son vectores no necesariamente de igual magnitud y no paralelas , entonces el vector suma $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ sigue la dirección de la bisectriz del ángulo formado por **a** y **b** , donde

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v} = \frac{\mathbf{b}}{||\mathbf{b}||}$$

son vectores unitarios en las direcciones de **a** y **b** respectivamente.

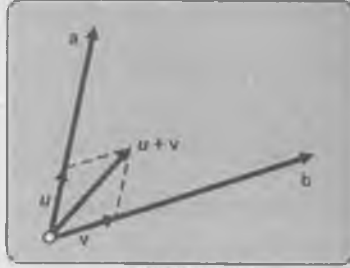


FIGURA 3.20

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Los vértices de un triángulo son A(9 , 12) , B(4 , 2) y C(1 , 6). Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo ACB del triángulo.

Solución. En el ΔACB de la Figura 3.21 se tiene :

$CB = \mathbf{B} - \mathbf{C} = \langle 4 , 2\rangle - \langle 1 , 6\rangle = \langle 3 , -4\rangle$

$CA = \mathbf{A} - \mathbf{C} = \langle 9 , 12\rangle - \langle 1 , 6\rangle = 2\langle 4 , 3\rangle$

Los vectores unitarios en las direcciones de $\overline{CB}$ y CA son respectivamente :

$$\boldsymbol{u} = \frac{\langle 3 , -4\rangle}{5} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v} = \frac{\langle 4 , 3\rangle}{5}$$

Un vector en la dirección de la bisectriz buscada es

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \frac{1}{5}\langle 7 , -1\rangle$$

Por lo que su ecuación vectorial es

$$\mathscr{L} : \mathbf{P} = \langle 1 , 6\rangle + t\langle 7 , -1\rangle , t \in \mathbb{R}$$ ■

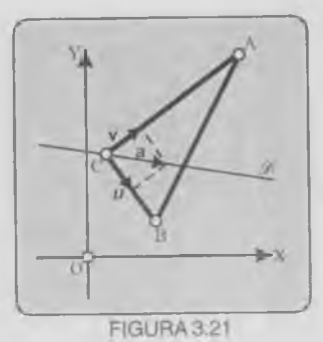


FIGURA 3.21

Ejemplo 2 Los puntos B(6 , 3) , Q(10 , 6) y R(-6 , 8) son vértices de un triángulo. Determinar la ecuación de la recta $\mathscr{L}$ que es perpendicular a la bisectriz del ángulo QBR y que contiene al punto Q.

Solución. Si $\vec{BQ} = \mathbf{Q} - \mathbf{B} \Rightarrow \vec{BQ} = \langle 4 , 3\rangle$

$\vec{BR} = \mathbf{R} - \mathbf{B} \Rightarrow \vec{BR} = \langle -12 , 5\rangle$

Los vectores unitarios en las direcciones de $\overline{BQ}$ y $\overline{BR}$ son , respectivamente

$$\boldsymbol{u} = \frac{\langle 4 , 3\rangle}{5} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v} = \frac{\langle -12 , 5\rangle}{13}$$

Luego ,el vector direccional de la bisectriz $\mathscr{L}_1$

es : $\mathbf{a}_1 = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \dfrac{\langle -8 , 64\rangle}{65} = -\dfrac{8}{65}\langle 1 , -8\rangle$

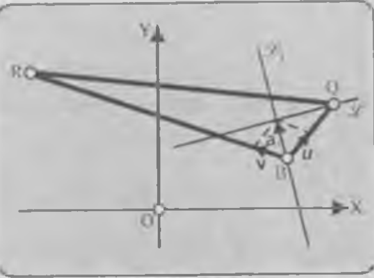


FIGURA 3.22

Por lo tanto , la ecuación vectorial de la recta $\mathscr{L} \perp \mathscr{L}_1$ es

$$\mathscr{L} : \mathbf{P} = \mathbf{Q} + t\mathbf{a}_1^{\perp} , t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathscr{L} : \mathbf{P} = \langle 10 , 6\rangle + t\langle 8 , 1\rangle , t \in \mathbb{R}$$ ■

Ejemplo 3 Demostrar que si las rectas paralelas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son interceptadas por una secante $\mathscr{L}$, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.

Demostración. Probaremos que $\alpha = \beta$

En efecto, supongamos que los vectores de dirección de $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son respectivamente , **a** , $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$

$$\mathscr{L}_1 \,||\, \mathscr{L}_2 \Rightarrow \mathbf{a}_1 = r\mathbf{a}_2 \qquad (r > 0)$$

Dado que α es el ángulo formado por **a** y $\mathbf{a}_1$

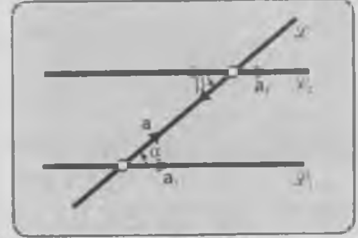


FIGURA 3.23

$$\Rightarrow \text{Cos}\,\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot \mathbf{a}_1}{||\mathbf{a}||\,||\mathbf{a}_1||} = \frac{\mathbf{a}\cdot(r\,\mathbf{a}_2)}{||\mathbf{a}||\,|r|\,||\mathbf{a}_2||}$$
$$= \frac{\mathbf{a}\cdot \mathbf{a}_2}{||\mathbf{a}||\,||\mathbf{a}_2||}$$

Sea β el ángulo formado por los vectores $-\mathbf{a}$ y $-\mathbf{a}_2$

$$\Rightarrow \text{Cos}\,\beta = \frac{(-\mathbf{a})\cdot(-\mathbf{a}_2)}{||\mathbf{a}||\,||\mathbf{a}_2||} = \frac{\mathbf{a}\cdot \mathbf{a}_2}{||\mathbf{a}||\,||\mathbf{a}_2||} = \text{Cos}\,\alpha$$

$$\therefore\ \beta = \alpha$$ ■

Ejemplo 4 Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $\mathscr{L}_1 : x + y - 3 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 2x - y + 6 = 0$, y demostrar que son perpendiculares.

Solución. Sea $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \{Q(-1 , 4)\}$

Si $\mathbf{n}_1 = \langle 1 , 1\rangle \Rightarrow \mathbf{a}_1 = \langle -1 , 1\rangle$

$\mathbf{n}_2 = \langle 2 , -1\rangle \Rightarrow \mathbf{a}_2 = \langle 1 , 2\rangle$

Entonces , los vectores unitarios en las direcciones de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son respectivamente

$$\mathbf{u} = \frac{\langle -1 , 1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \frac{\langle 1 , 2\rangle}{\sqrt{5}}$$

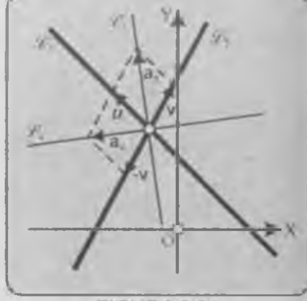


FIGURA 3.24

Luego , los vectores que siguen las direcciones de las bisectrices son

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}\langle \sqrt{2} - \sqrt{5} , \sqrt{5} + 2\sqrt{2}\rangle \ , \quad \mathbf{a}_4 = \mathbf{u} - \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}\langle -\sqrt{2} - \sqrt{5} , \sqrt{5} - 2\sqrt{2}\rangle$$

Por lo tanto , si $\mathscr{L}_3 : P = Q + t\,\mathbf{a}_3 \Rightarrow \mathscr{L}_3 : P = \langle -1 , 4\rangle + t\langle \sqrt{2} - \sqrt{5} , \sqrt{5} + 2\sqrt{2}\rangle , t \in \mathbb{R}$

$\mathscr{L}_4 : P = Q + s\,\mathbf{a}_4 \Rightarrow \mathscr{L}_4 : P = \langle -1 , 4\rangle + s\langle -\sqrt{2} - \sqrt{5} , \sqrt{5} - 2\sqrt{2}\rangle , s \in \mathbb{R}$

son las ecuaciones vectoriales de las dos bisectrices.

Para demostrar que son perpendiculares , bastará probar que $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4 = 0$

En efecto : $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4 = \langle \sqrt{2} - \sqrt{5} , \sqrt{5} + 2\sqrt{2}\rangle \cdot \langle -\sqrt{2} - \sqrt{5} , \sqrt{5} - 2\sqrt{2}\rangle$

$= -(2 - 5) + (5 - 8) = 3 - 3 = 0 \Rightarrow \mathscr{L}_3 \perp \mathscr{L}_4$ ■

Ejemplo 5 Hallar la ecuación de la recta de pendiente negativa que pasa por el punto Q(2 , 1) y forma con el eje Y un ángulo que sea el doble del ángulo formado por la recta $\mathscr{L}_1 : 3x - 4y - 12 = 0$ y el eje X.

Solución. Si $m_1 = \text{Tg}\,\alpha = 3/4 \Rightarrow \text{Cos}\,\alpha = 4/5$ y como $\text{Cos}\,2\alpha = 2\,\text{Cos}^2\alpha - 1$

$$\Rightarrow \text{Cos}\,2\alpha = 2\left(\frac{16}{25}\right) - 1 = \frac{7}{25}$$

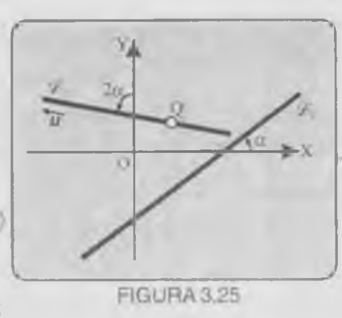


FIGURA 3.25

Sea $\mathbf{u} = \langle x , y\rangle$ un vector unitario en la dirección de la recta $\mathscr{L}$. Si $||\mathbf{u}|| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ (1)

Un vector unitario en la dirección del eje Y es $\langle 0 , 1\rangle$

$$\Rightarrow \text{Cos}\,2\alpha = \frac{\mathbf{u}\cdot\langle 0 , 1\rangle}{||\mathbf{u}||\,||\langle 0 , 1\rangle||} \Rightarrow \frac{7}{25} = \langle x , y\rangle\cdot\langle 0 , 1\rangle$$

de donde obtenemos $y = 7/25$

Sustituyendo en (1) : $x^2 + (7/25)^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 24/25$

Como la pendiente de la recta $\mathscr{L}$ es negativa , entonces $x = -24/25$

Si a es el vector direccional de $\mathscr{L}$, paralelo a $\mathbf{u} = \frac{1}{25}\langle -24 , 7\rangle$, la ecuación vectorial de la recta pedida es , $\mathscr{L} : P = \langle 2 , 1\rangle + t\langle -24 , 7\rangle , t \in \mathbb{R}$. ■

Ejemplo 6 Sea $\mathscr{L}_1 : P = Q + t\langle 7 , 1\rangle , t \in \mathbb{R}$, $Q(1 , -1) \in (\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L})$, $A(8 , 0) \in \mathscr{L}_1$, $d(A , \mathscr{L}) = \sqrt{10}$; $\mathscr{L}$ es bisectriz del ángulo formado por $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, siendo su pendiente menor que la de $\mathscr{L}_1$. Hallar las ecuaciones vectoriales de $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}_2$.

Solución. Si $\overline{QA} = \mathbf{A} - \mathbf{Q} \Rightarrow \overrightarrow{QA} = \langle 8 , 0\rangle - \langle 1 , -1\rangle = \langle 7 , 1\rangle$

Luego , $||\overline{QA}|| = \sqrt{50}$ y $||\overline{BA}|| = \sqrt{10}$

En el triángulo rectángulo QBA :

$||\overline{QA}||^2 = ||\overline{QB}||^2 + ||\overline{BA}||^2$

$\Rightarrow (\sqrt{50})^2 = ||\overline{QB}||^2 + (\sqrt{10})^2$

$\Rightarrow ||\overline{QB}|| = 2\sqrt{10}$

FIGURA 3.26

Sea $\mathbf{u} = \langle u_1 , u_2\rangle$ un vector unitario en la dirección de la bisectriz $\mathscr{L}$.

Si $\overline{QA} = \overline{QB} + \overline{BA} \Rightarrow \langle 7 , 1\rangle = ||\overline{QB}||\,\mathbf{u} + ||\overline{BA}||\,\mathbf{u}^{\perp}$

$\Rightarrow \langle 7 , 1\rangle = 2\sqrt{10}\langle u_1 , u_2\rangle + \sqrt{10}\langle -u_2 , u_1\rangle$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 7 = 2\sqrt{10}\,u_1 - \sqrt{10}\,u_2 \\ 1 = 2\sqrt{10}\,u_2 + \sqrt{10}\,u_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{u} = \frac{\langle 3 , -1\rangle}{\sqrt{10}}$$

Por lo que la pendiente de la bisectriz es $m = -1/3$

En el ΔQBC : $\text{Tg}\,\alpha = \frac{BC}{QB} \Leftrightarrow \frac{m - m_2}{1 + m\cdot m_2} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} \Leftrightarrow \frac{(-1/3) - m_2}{1 + (-1/3)\,m_2} = \frac{1}{2}$

de donde obtenemos : $m_2 = -1$

Dado que Q(1 , -1) es el punto de paso de $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}_2$, sus ecuaciones son

$\mathscr{L} : P = \langle 1 , -1\rangle + t\langle 3 , -1\rangle , t \in \mathbb{R}$; $\mathscr{L}_2 : P = \langle 1 , -1\rangle + s\langle 1 , -1\rangle$, $s \in \mathbb{R}$. ■

Ejemplo 7 El ángulo θ entre las rectas $\mathscr{L}_1$: **P = A + t a** , t ∈ R y $\mathscr{L}_2$: **P = C + s b** , s ∈ R , mide 45°. Si {B} = $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$, estando B en el segundo cuadrante , C(0 , 5) , $\overline{AB} + \overline{BC} = \langle 1 , 7\rangle$, y la pendiente de $\mathscr{L}_1$ es -3 ; hallar la ecuación vectorial de la bisectriz del ángulo θ.

Solución. Si A ∈ $\mathscr{L}_1$ ⇒ $\overline{AB} \parallel m_1$, esto es : $\overline{AB} = r\langle 1 , -3\rangle$

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \langle 1 , 7\rangle \Rightarrow \overline{AB} + (\mathbf{C} - \mathbf{B}) = \langle 1 , 7\rangle$$

$$\Rightarrow \overline{AB} - \mathbf{B} = \langle 1 , 7\rangle - \langle 0 , 5\rangle \Rightarrow \overline{AB} - \mathbf{B} = \langle 1 , 2\rangle \qquad (1)$$

Si B = ⟨x , y⟩ , al multiplicar escalarmente (1) por $\langle 1 , -3\rangle^{\perp}$ se tiene :

$$\overline{AB} \cdot \langle 3 , 1\rangle - \langle x , y\rangle \cdot \langle 3 , 1\rangle = \langle 1 , 2\rangle \cdot \langle 3 , 1\rangle$$

$$0 - (3x + y) = 3 + 2 \Rightarrow 3x + y = -5 \qquad (2)$$

$$\text{Tg } 45° = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \Leftrightarrow 1 = \frac{m_2 + 3}{1 + 3m_2} \Leftrightarrow m_2 = -1/2$$

$$m_2 = m_{\overline{BC}} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = \frac{y - 5}{x - 0} \Rightarrow x + 2y = 10 \qquad (3)$$

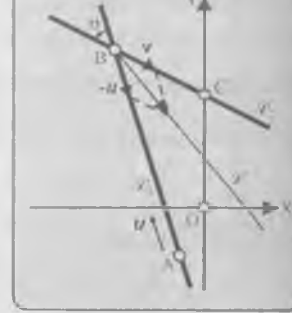


FIGURA 3.27

Resolviendo (2) y (3) obtenemos

$$x = -4 , y = 7 \Rightarrow B(-4 , 7)$$

Luego . $\overline{AB} = \langle 1 , 2\rangle + \langle -4 , 7\rangle = 3\langle -1 , 3\rangle$ y $\overline{BC} = \langle 4 , -2\rangle = 2\langle 2 , -1\rangle$

Entonces los vectores unitarios en las direcciones de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son respectivamente:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\langle -1 , 3\rangle}{\sqrt{10}} , \quad \boldsymbol{v} = \frac{\langle 2 , -1\rangle}{\sqrt{5}} \Rightarrow \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}\langle 1 + 2\sqrt{2} , -3 - \sqrt{2}\rangle$$

es el vector que sigue la dirección de la bisectriz $\mathscr{L}$, por tanto , su ecuación es

$$\mathscr{L} : \mathbf{P} = \langle -4 , 7\rangle + t\langle 1 + 2\sqrt{2} , -3 - \sqrt{2}\rangle , t \in \mathbf{R}.$$ ■

Ejemplo 8 Hallar la ecuación de la recta que pasa por Q(5 , 3) y forma un triángulo isósceles con las rectas $\mathscr{L}_1$: x - y - 1 = 0 y $\mathscr{L}_2$: x - 7y - 1 = 0

Solución. Sean m , $m_1 = 1$ y $m_2 = 1/7$ las pendientes de las rectas $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ respectivamente. El problema presenta tres casos de solución , dependiendo cada caso de la ubicación de los lados iguales.

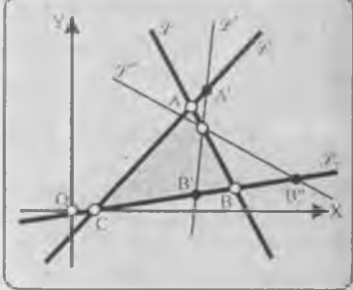


FIGURA 3.28

Caso 1. Los lados iguales se encuentran en $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}$

$$\Rightarrow \text{TgA} = \text{TgB} \Leftrightarrow \frac{m - m_1}{1 + m \cdot m_1} = \frac{m_2 - m}{1 + m \cdot m_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m - 1}{1 + m} = \frac{1/7 - m}{1 + (1/7)m}$$

de donde : $2m^2 + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ ó $m = 1/2$

Hay dos soluciones. $\mathscr{L}$: **P** = ⟨5 , 3⟩ + t⟨1 , -2⟩ , t ∈ **R**

o $\mathscr{L}$: **P** = ⟨5 , 3⟩ + s⟨2 , 1⟩ , s ∈ **R**

Caso 2. Los lados iguales se encuentran en $\mathscr{L}'$ y $\mathscr{L}_2$

$$\Rightarrow \text{TgA'} = \text{TgC} \Leftrightarrow \frac{m - m_1}{1 + m\,m_1} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m - 1}{1 + m} = \frac{1 - 1/7}{1 + 1/7} \Leftrightarrow m = 7$$

Existe una solución. $\mathscr{L}'$: **P** = ⟨5 , 3⟩ + r⟨1 , 7⟩ , r ∈ **R**

Caso 3. Los lados iguales se encuentran en las rectas $\mathscr{L}''$ y $\mathscr{L}_1$

$$\Rightarrow \text{TgB"} = \text{TgC} \Leftrightarrow \frac{m_2 - m}{1 + m\,m_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1/7 - m}{1 + (1/7)m} = \frac{1 - 1/7}{1 + 1/7} \Leftrightarrow m = -\frac{17}{31}$$

Hay una solución. $\mathscr{L}''$: **P** = ⟨5 , 3⟩ + p⟨31 , -17⟩ , p ∈ **R**. ■

Ejemplo 9 Desde el punto C(6 , -4) se trazan las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ con pendientes negativas. El ángulo de inclinación de $\mathscr{L}_1$ es mayor que el ángulo de inclinación de $\mathscr{L}_2$. La recta $\mathscr{L}_1$ determina sobre la parte positiva del eje Y un segmento de 2 unidades. La recta $\mathscr{L}_2$ determina sobre el eje X un segmento de 38/7 unidades. Hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}$, que no cruza el cuarto cuadrante , tal que forma con $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ un triángulo isósceles , con base en $\mathscr{L}$, de área 15 u².

Solución. El vector direccional de $\mathscr{L}_1$ es paralelo a :

$$\mathbf{a}_1 = \langle 6 , -4\rangle - \langle 0 , 2\rangle = 6\langle 1 , -1\rangle$$

y el de $\mathscr{L}_2$, a : $\mathbf{a}_2 = \langle 6 , -4\rangle - \langle 38/7 , 0\rangle = \frac{4}{7}\langle 1 , -7\rangle$

por lo que : $\mathscr{L}_1 = \{\langle 6 , -4\rangle + t\langle 1 , -1\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$ y

$\mathscr{L}_2 = \{\langle 6 , -4\rangle + s\langle 1 , -7\rangle \mid s \in \mathbf{R}\}$

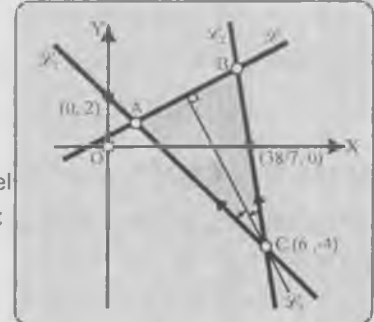


FIGURA 3.29

En el triángulo isósceles ABC, la bisectriz $\mathscr{L}_3$ del vértice C, tiene su vector direccional paralelo a :

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\langle 1 , -1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{\langle 1 , -7\rangle}{5\sqrt{2}} = \frac{6}{5\sqrt{2}}\langle 1 , -2\rangle$$

Luego , el vector de dirección de la recta $\mathscr{L}$ es

paralelo al vector $\langle 1 , -2\rangle^{\perp} = \langle 2 , 1\rangle$

Para hallar su ecuación bastará determinar el punto de paso $A(x_1 , y_1)$ o $B(x_2 , y_2)$.

Como $\overline{AC} \parallel \langle 1 , -1\rangle \Rightarrow \overline{AC} \cdot \langle 1 , 1\rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle 6 - x_1 , -4 - y_1\rangle \cdot \langle 1 , 1\rangle = 0 \Rightarrow y_1 = 2 - x_1 \qquad (1)$$

$\overline{BC} \parallel \langle 1 , -7\rangle \Rightarrow \overline{BC} \cdot \langle 7 , 1\rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle 6 - x_2 , -4 - y_2\rangle \cdot \langle 7 , 1\rangle = 0 \Rightarrow y_2 = 38 - 7x_2 \qquad (2)$$

$\overline{AB} \parallel \langle 2 , 1\rangle \Rightarrow \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1\rangle \cdot \langle -1 , 2\rangle = 0 \Rightarrow -x_2 + x_1 + 2y_2 - 2y_1 = 0 \qquad (3)$

Combinando las ecuaciones (1) y (2) con (3) se tiene :

$$-x_2 + x_1 + 2(38 - 7x_2) - 2(2 - x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = 5x_2 - 24 \qquad (4)$$

Sustituyendo en (1) obtenemos : $\quad y_1 = 26 - 5x_2 \qquad (5)$

$a(\Delta ABC) = 15\ u^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\,|\overline{CA} \cdot \overline{CB}^{\perp}| = 15$

$$|\langle x_1 - 6 , y_1 + 4\rangle \cdot \langle x_2 - 6 , y_2 + 4\rangle^{\perp}| = 30$$

$$|\langle x_1 - 6 , y_1 + 4\rangle \cdot \langle y_2 + 4 , 6 - x_2\rangle| = 30$$

$$|(5x_2 - 24 - 6)(38 - 7x_2 + 4) + (26 - 5x_2 + 4)(6 - x_2)| = 30$$

Efectuando resulta : $|30(x_2 - 6)^2| = 30$

$$\Rightarrow (x_2 - 6)^2 = 1 \Leftrightarrow x_2 - 6 = -1 \text{ ó } x_2 - 6 = 1$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 5 \text{ ó } x_2 = 7$$

Luego , en (2) : $y_2 = 38 - 7(5) = 3$ ó $y_2 = 38 - 7(7) = -11 \Rightarrow B(5 , 3)$ ó $B(7 , -11)$

Se descarta la segunda alternativa por las condiciones del problema

$$\therefore \mathscr{L} : \mathbf{P} = \langle 5 , 3\rangle + r\langle 2 , 1\rangle , r \in \mathbb{R}.$$ ■

Ejemplo 10 Las rectas $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$ son tales que : $\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2$, $m_1 < 1$, $C(-10 , -14) \in \mathscr{L}_1$, $D(2 , 7) \in \mathscr{L}_2$, $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_3 = \{A\}$, $\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3 = \{B\}$, $M(2 , 1)$ es el punto medio de $\overline{AB}$ y $Tg\theta = - 24/7$; donde θ es la medida del ángulo entre las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_3$, $\theta \in \langle 0 , \pi\rangle$. Hallar : a) Las ecuaciones vectoriales de $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$; b) $d(\mathscr{L}_1 , \mathscr{L}_2)$; c) Los puntos A y B.

Solución. Sea E el punto medio de $\overline{CD}$, entonces

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \frac{1}{2}(-8 , -7) \Rightarrow E(-4 , -7/2)$$

$$\overline{EM} = \mathbf{M} - \mathbf{E} = \langle 2 , 1\rangle - \langle -4 , -7/2\rangle = \frac{3}{2}\langle 4 , 3\rangle$$

Como $\overline{EM} \parallel \mathscr{L}_1$, el vector direccional de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ es $\mathbf{a} = \langle 4 , 3\rangle$; luego :

$$\mathscr{L}_1 : \mathbf{P} = \langle -10 , -14\rangle + r\langle 4 , 3\rangle , r \in \mathbb{R}$$

$$\mathscr{L}_2 : \mathbf{P} = \langle 2 , 7\rangle + s\langle 4 , 3\rangle , s \in \mathbb{R}$$

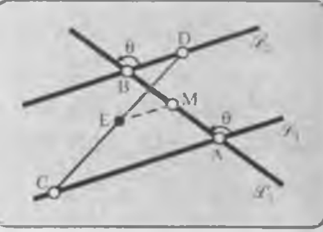


FIGURA 3.30

Si $Tg\theta = -\frac{24}{7} \Rightarrow \frac{m_3 - m_1}{1 + m_1 m_3} = -\frac{24}{7}$

$$\Rightarrow \frac{m_3 - 3/4}{1 + (3/4)m_3} = -\frac{24}{7} \text{ , de donde : } m_3 = -3/4$$

Por lo que , $\mathscr{L}_3$ tiene por ecuación vectorial , $\mathscr{L}_3 : \mathbf{P} = \langle 2 , 1\rangle + t\langle 4 , -3\rangle , t \in \mathbb{R}$

b) Sea $\mathbf{V} = \overline{CD} \Rightarrow \mathbf{V} = \langle 2 , 7\rangle - \langle -10 , -14\rangle = 3\langle 4 , 7\rangle$

Si $\mathbf{n}$ es la normal a $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2 \Rightarrow \mathbf{n} = \mathbf{a}^{\perp} = \langle -3 , 4\rangle$

$$\therefore d(\mathscr{L}_1 , \mathscr{L}_2) = \frac{|\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|3\langle 4 , 7\rangle \cdot \langle -3 , 4\rangle|}{\|\langle -3 , 4\rangle\|} = \frac{48}{5}$$

c) Si $\{A\} = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_3 \Rightarrow \exists\, r , t \in \mathbb{R}$, tales que

$$\mathbf{A} = \langle -10 , -14\rangle + r\langle 4 , 3\rangle = \langle 2 , 1\rangle + t\langle 4 , -3\rangle \qquad (1)$$

$$\Rightarrow r\langle 5 , 3\rangle - t\langle 4 , -3\rangle = \langle 12 , 15\rangle$$

$$\Rightarrow r\langle 4 , 3\rangle \cdot \langle 3 , 4\rangle - 0 = \langle 12 , 15\rangle \cdot \langle 3 , 4\rangle \Leftrightarrow r = 4$$

Sustituyendo en (1) obtenemos : $\mathbf{A} = \langle -10 , -14\rangle + 4\langle 4 , 3\rangle = \langle 6 , -2\rangle \Rightarrow A(6 , -2)$

Si $\{B\} = \mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3 \Rightarrow \exists\, s , t \in \mathbb{R}$, tales que

$$\mathbf{B} = \langle 2 , 7\rangle + s\langle 4 , 3\rangle = \langle 2 , 1\rangle + t\langle 4 , -3\rangle \qquad (2)$$

$$\Rightarrow s\langle 4 , 3\rangle - t\langle 4 , -3\rangle = \langle 0 , -6\rangle$$

$$\Rightarrow s\langle 4 , 3\rangle \cdot \langle 3 , 4\rangle - 0 = \langle 0 , -6\rangle \cdot \langle 3 , 4\rangle \Leftrightarrow s = -1$$

Luego , en (2) , se tiene : $\mathbf{B} = \langle 2 , 7\rangle - \langle 4 , 3\rangle = \langle -2 , 4\rangle \Rightarrow B(-2 , 4)$ ■

Ejemplo 11 Sean , la recta $\mathscr{L} : \mathbf{P} = \langle 7 , 12\rangle + t\,\mathbf{a} , t \in \mathbb{R}$ y $Q(4 , 3)$ un punto que dista $3\sqrt{5}$ unidades de $\mathscr{L}$. Por Q pasan dos rectas que intersectan a $\mathscr{L}$ en los puntos A y B(7 , 12) formando un triángulo isósceles BQA con base en $\mathscr{L}$. Si B divide al segmento $\overline{AD}$ de $\mathscr{L}$, en la razón 4/3 , hallar : a) Los puntos A y D. b) La ecuación vectorial de $\mathscr{L}$.

Solución. La Figura 3.31 muestra una interpretación geométrica del problema , donde se observa que hay dos soluciones : los triángulos isósceles BQA y BQA'.

En el ΔBQA : $\overline{QB} = \langle 7 , 12\rangle - \langle 4 , 3\rangle = 3\langle 1 , 3\rangle$

Luego , la pendiente de la recta $\mathscr{L}_1$ es $m_1 = 3$

Además , $\|\overline{QB}\| = 3\sqrt{10}$ y $\|\overline{QH}\| = 3\sqrt{5}$

$$\Rightarrow Sen\theta = \frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \theta = 45^{\circ}$$

Por lo que el ΔBQA es rectángulo isósceles

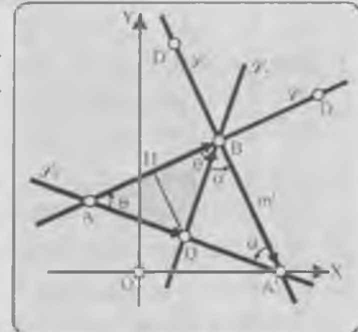


FIGURA 3.31

$$Tg\theta = \frac{m_2 - m}{1 + m_2 m} \Rightarrow 1 = \frac{3 - m}{1 + 3m}$$

de donde , la pendiente de $\mathscr{L}$ es m = 1/2 y su vector de dirección es **a** = ⟨2 , 1⟩
Un vector unitario en la dirección de $\mathscr{L}$ es

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||} = \frac{\langle 2 , 1\rangle}{\sqrt{5}}$$

En el ΔBQA : $||\overline{AB}|| = 2||\overline{QH}|| = 6\sqrt{5}$

$\Rightarrow \overline{AB} = ||\overline{AB}||\ \boldsymbol{u} = 6\sqrt{5}\left(\frac{\langle 2 , 1\rangle}{\sqrt{5}}\right) = \langle 12 , 6\rangle$

Si **B** - **A** = ⟨12 , 6⟩ ⇒ **A** = ⟨7 , 12⟩ - ⟨12 , 6⟩ = ⟨-5 , 6⟩

$\frac{AB}{BD} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3\overline{AB} = 4\overline{BD} \Rightarrow 3(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = 4(\mathbf{D} - \mathbf{B})$

$\Rightarrow \mathbf{D} = \frac{7}{4}\mathbf{B} - \frac{3}{4}\mathbf{A} = \frac{7}{4}\langle 7 , 12\rangle - \frac{3}{4}\langle -5 , 6\rangle = \langle 16 , 33/2\rangle$

En el ΔBQA' : $Tg\alpha = \frac{m' - m_1}{1 + m_1 m'} \Rightarrow 1 = \frac{m' - 3}{1 + 3m_1} \Leftrightarrow m' = -2$

Luego , el vector de dirección de $\mathscr{L}$' es **a**' = ⟨1 , -2⟩ ⇒ $\boldsymbol{u}' = \frac{\langle 1 , -2\rangle}{\sqrt{5}}$

Por lo que si $\overline{BA'} = ||\overline{BA'}||\ \boldsymbol{u}' \Rightarrow \overline{BA'} = 6\sqrt{5}\left(\frac{\langle 1 , -2\rangle}{\sqrt{5}}\right) = \langle 6 , -12\rangle$

$\Rightarrow$ **A**' - **B** = ⟨6 , -12⟩ ⇒ **A**' = ⟨7 , 12⟩ + ⟨6 , -12⟩ = ⟨13 , 0⟩

Análogamente , si $\frac{A'B}{BD'} = \frac{4}{3} \Rightarrow \mathbf{D}' = \frac{7}{4}\mathbf{B} - \frac{3}{4}\mathbf{A}' \Rightarrow \mathbf{D}' = \langle 5/2 , 21\rangle$

b) Ecuaciones vectoriales de $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}$'

$\mathscr{L} = \{\langle 7 , 12\rangle + t\langle 2 , 1\rangle \mid t \in \mathbb{R}\}$ y $\mathscr{L}' = \{\langle 7 , 12\rangle + s\langle 1 , -2\rangle \mid s \in \mathbb{R}\}$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 21*

1. Sean las rectas $\mathscr{L}_1$: 3x - 4y + 6 = 0 y $\mathscr{L}_2$: **P** = ⟨4 , 1⟩ + t⟨-2 , 4⟩ , t ∈ **R** ; hallar
   a) La distancia del punto A(4 , 1) a la recta $\mathscr{L}_1$
   b) La tangente del ángulo agudo formado por las rectas
2. Dadas las rectas ; $\mathscr{L}_1$: **P** = ⟨3 , 4⟩ + t⟨3 , 4⟩ y $\mathscr{L}_2$: **P** = ⟨0 , 14/3⟩ + r⟨4 , 3⟩ , hallar :
   a) El punto de intersección de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$
   b) La ecuación normal a la bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas.
3. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la bisectriz del ángulo que forman los vectores **a** = ⟨3 , 4⟩ y **b** = ⟨4 , -3⟩

4. Las rectas $\mathscr{L}_1$: **P** = **P**$_1$ + t **a** , t ∈ **R** , $\mathscr{L}_2$: **b** • (**P** - **P**$_2$) = 0 , se cortan en P_0. Hallar el ángulo entre $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ sabiendo que
   $$(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_0) \cdot (\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_0) \cdot (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2) = ||\mathbf{P}_0||^2 ,\ y\ P_0 \neq P_1 \neq P_2$$
5. Los puntos P(2 , 4) , Q(8 , 6) y R(4 , 8) son vértices de un triángulo. Hallar la recta que es perpendicular a la bisectriz del ángulo PQR y que pasa por R.
6. Los vértices de un triángulo son los puntos A , B y C , tales que $||\mathbf{A} - \mathbf{B}|| = a$, $||\mathbf{A} - \mathbf{C}|| = 2a$. Hallar la ecuación de la recta que contiene a la bisectriz interior del triángulo correspondiente al ángulo A.
7. Los puntos A(4 , 6) , B(8 , 4) y C(6 , 7) son los vértices de un triángulo ABC. Hallar en el lado $\overline{BC}$ el punto Q por donde pasa la bisectriz del ángulo A.
8. La base $\overline{AD}$ de un trapecio ABCD está contenida en la recta $\mathscr{L}$: 3x - y + 6 = 0 y una de sus diagonales $\overline{AC}$ está contenida en la recta $\mathscr{L}_1$: x - y - 4 = 0. Si el vértice B es el punto (3 , -5) , hallar : a) Los vértices A, C y D ; b) $Proy_{\overline{AB}}\overline{AC}$
9. El ángulo θ entre $\mathscr{L}_1$ = {**B** + t **a** | t ∈ **R**} y $\mathscr{L}_2$ = {**A** + s **b** | s ∈ **R**} es tal que Tgθ = 5/7. Si {C} = $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$, siendo C un punto en el IV cuadrante , B(0 , 4) , $\overline{AC} + \overline{BC}$ = ⟨5 , -25⟩ y la pendiente de $\mathscr{L}$ es -1. hallar la ecuación vectorial de la bisectriz del ángulo θ.
10. Sean las rectas $\mathscr{L}_1$: **P** = ⟨1 , -1⟩ + t⟨7 , 1⟩ , t ∈ **R** y $\mathscr{L}_2$: ⟨1 , -1⟩ • [**P** - ⟨2 , 1⟩] = 0. Hallar la recta $\mathscr{L}$ que tiene pendiente positiva , pasa por Q(0 , -2) y forma con $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ un triángulo isósceles cuyos lados congruentes están sobre $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$.
11. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta bisectriz , de menor , pendiente del ángulo que forman las rectas $\mathscr{L}_1$: **P** = ⟨1 , 1⟩ + t⟨3 , 4⟩ , t ∈ **R** y $\mathscr{L}_2$: **P** = ⟨2 , -1⟩ + s⟨4 , 3⟩ , s ∈ **R**
12. Los vértices de un triángulo ABC son A(-6 ,-2) , B(6 , 1) y C(2 , 4). Se traza la bisectriz del ángulo exterior correspondiente al ángulo interno ACB ; la bisectriz interior corta a la prolongación del lado $\overline{AB}$ en el punto Q. Hallar las coordenadas del punto Q.
13. Dadas las rectas $\mathscr{L}_1$: **P** = **P**$_1$ + t**a** , t ∈ **R** , y $\mathscr{L}_2$: **P** = **Q**$_1$ + s**b** , s ∈ **R** , no paralelas, demostrar que las rectas bisectrices de los ángulos que forman $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son ortogonales.
14. Un rayo parte del punto A(-5 , -2) en dirección del vector **a** = ⟨2 , 3⟩ y se refleja en un espejo plano sobre el eje X en B y luego sobre el eje Y en C. Cuál es la abscisa del punto S si **S** = **B** + **C** + **D** , donde D está sobre el último rayo reflejado y tiene ordenada -10.
15. Las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ se interceptan en el punto C formando un ángulo θ , tal que

Tgθ = 1/2. Si C es un punto en el cuarto cuadrante, B(0 , 4) , $\overline{AC} + \overline{BC} = \langle 2 , -10\rangle$ y la pendiente de $\mathscr{L}_1$ es -1 ; hallar la ecuación vectorial de la bisectriz del ángulo θ.

16. Dadas las rectas $\mathscr{L}_1 : 7x - y - 6 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : x - y + 2 = 0$, hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}$, de pendiente positiva , que pasa por el punto A(5 , -2) y forma con $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ un triángulo isósceles cuyos lados iguales se encuentran en $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, respectivamente.

17. En el plano $\mathbf{R}^2$, fijados el punto P_0 y los vectores **A** y **B** no nulos y no paralelos, se define el conjunto
$$C = \{ P \in \mathbf{R}^2 \mid P = P_0 + t\mathbf{A} + s\mathbf{B} , \text{ con } t \in [0 , 2] \wedge s \in [-1 , 0] \}$$
a) Representar gráficamente el conjunto **C** en el plano $\mathbf{R}^2$.
b) Para $P_0 = \langle 1 , 1\rangle$, $\mathbf{A} = \langle -2 , 3\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 3 , 1\rangle$, analizar si el punto P(-4 , 29/6) pertenece al conjunto **C** , y hallar la ecuación de la recta que contiene a la bisectriz del ángulo que forman **A** y **B** con vértice en P_0 , dados.

18. El ángulo θ entre las rectas $\mathscr{L}_1 : P = B + t\mathbf{a} , t \in \mathbf{R}$, y $\mathscr{L}_2 : P = A + s\mathbf{b} , s \in \mathbf{R}$, es tal que Tgθ = 5/7. Si $\{C\} = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$, siendo C un punto del cuarto cuadrante , B(0 , 4) , $\overline{AC} + \overline{BC} = \langle 5 , -25\rangle$ y la pendiente de $\mathscr{L}_2$ es -1 ; hallar la ecuación vectorial de la bisectriz del ángulo θ.

19. En el plano $\mathbf{R}^2$, sean los puntos A(-6 , -6) , B(-1 , 4) , C(c , -1) , D(2 , 1) y E , tales que D $\in \overline{BC}$, E $\in \overline{AB}$, los segmentos dirigidos $\overline{DE}$ y $\overline{AC}$ son paralelos y los segmentos orientados $\overline{EB}$ y $\overline{EC}$ forman un ángulo α . Usando vectores , hallar Cos α.

VECTORES EN EL ESPACIO

4.1 EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

En la Sección 1.1 definimos el producto cartesiano A x B de los conjuntos A y B de la siguiente manera
$$A \times B = \{(x , y) \mid x \in A , y \in B\}$$
Si aplicamos una definición similar al producto cartesiano A x B x C de los conjuntos A , B y C , entonces
$$A \times B \times C = \{(x , y , z) \mid x \in A , y \in B , z \in C\}$$
donde el símbolo (x , y , z) representa una terna ordenada. Como las ternas ordenadas de números reales son el elemento del producto cartesiano **R** x **R** x **R** , a este conjunto se le denota por $\mathbf{R}^3$, es decir
$$\mathbf{R}^3 = \{(x , y , z) \mid x \in \mathbf{R} , y \in \mathbf{R} , z \in \mathbf{R}\}$$
que determina lo que llamaremos *espacio tridimensional*.

Esto es , queda establecido un sistema cartesiano de tres dimensiones, cuyos ejes son las rectas orientadas : X (eje de abscisas) , Y (eje de ordenadas) y Z (cota) , que se cortan perpendicularmente en el punto O (origen de coordenadas). Todo punto en el espacio queda determinado por la terna (x , y , z) , donde

x : es la distancia dirigida del punto P al plano YOZ
y : es la distancia dirigida del punto P al plano XOZ
z : es la distancia dirigida del punto P al plano XOY

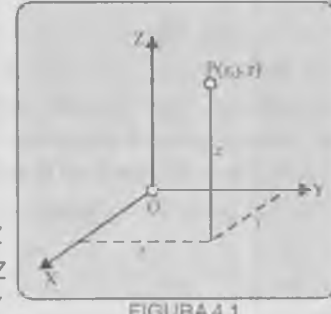


FIGURA 4.1

El conjunto $\mathbf{R}^3$ de ternas ordenadas de números reales , junto con las operaciones de suma y productos definidas en el Teorema 1.2 , recibe el nombre de *espacio vectorial tridimensional* sobre el conjunto de números reales **R** y se denota por V_3. A los elementos de V_3 , se les llama vectores , por lo que , la terna denotada por $\langle x , y , z \rangle$ es un vector.

4.2 VECTORES EN EL ESPACIO

En el espacio , denotamos los vectores mediante la terna ordenada

$$\mathbf{V} = \langle x , y , z \rangle$$

denotándose el ***vector cero*** por $\mathbf{O} = \langle 0 , 0 , 0 \rangle$.

Tal como en el caso de $\mathbf{R}^2$, un vector en $\mathbf{R}^3$ se puede expresar como la suma de componentes vectoriales paralelos a los ejes coordenados. En $\mathbf{R}^3$, **i** , **j** y **k** representan vectores unitarios en las direcciones de las partes positivas de los ejes X , Y , Z respectivamente. Entonces

$$\mathbf{i} = \langle 1 , 0 , 0 \rangle , \mathbf{j} = \langle 0 , 1 , 0 \rangle , \mathbf{k} = \langle 0 , 0 , 1 \rangle$$

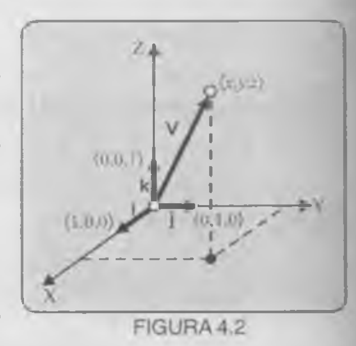


FIGURA 4.2

Usando estos vectores , la notación con ***vectores unitarios canónicos*** para un vector $\mathbf{V} = \langle x , y , z \rangle$ es

$$\mathbf{V} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

como se muestra en la Figura 4.2

Si se representa al vector **V** mediante el segmento orientado desde $A(x_1 , y_1 , z_1)$ a $B(x_2 , y_2 , z_2)$, como se indica en la Figura 4.3 , entonces las componentes de **V** se obtienen restando las coordenadas del punto inicial A de las del punto final B , esto es

$$\mathbf{V} = \overline{AB} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1 \rangle$$

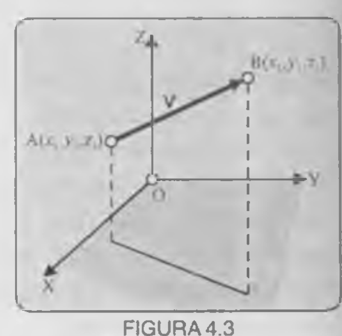


FIGURA 4.3

Las definiciones que se aplican a los vectores de dos dimensiones se puede extender directamente a los vectores de tres dimensiones. En el cuadro siguiente se resume las definiciones y operaciones básicas con vectores en el espacio.

VECTORES EN EL ESPACIO Sean $\mathbf{A} = \langle x_1 , y_1 , z_1 \rangle$, $\mathbf{B} = \langle x_2 , y_2 , z_2 \rangle$ y $\mathbf{V} = \langle x , y , z \rangle$ vectores en el espacio y sea $r \in \mathbf{R}$ un escalar , entonces

1. *Igualdad de vectores* : $\mathbf{A} = \mathbf{B} \Leftrightarrow x_1 = x_2 , \; y_1 = y_2 , \; z_1 = z_2$
2. *Componentes* : Si se representa a **V** por el segmento orientado AB , entonces
$$\mathbf{V} = \langle x , y , z \rangle = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1 \rangle$$
3. *Longitud o norma* : $\| \mathbf{V} \| = d(A , B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
4. *Vector unitario en la dirección de* **V** : $\boldsymbol{u} = \dfrac{\mathbf{V}}{\| \mathbf{V} \|}$
5. *Suma de vectores* : $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle x_1 + x_2 , y_1 + y_2 , z_1 + z_2 \rangle$
6. *Opuesto de un vector* : $\forall \mathbf{A} \in \mathbf{R}^3 , \exists (-\mathbf{A}) \in \mathbf{R}^3 \mid \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \langle 0 , 0 , 0 \rangle = \mathbf{O}$
7. *Producto por un escalar* : $r\,\mathbf{A} = \langle r x_1 , t y_1 , r z_1 \rangle$

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 *Usando vectores para hallar el extremo de un segmento*

Un vector que va de S a T(5 , -4 , 2) es dos veces el vector que va de R(2 , -1 , 5) a S. Calcular las coordenadas de S.

Solución. Sean $\mathbf{A} = \overline{ST}$, $\mathbf{B} = \overline{RS}$ y $S(x , y , z)$

Luego , $\mathbf{A} = \mathbf{T} - \mathbf{S} = \langle 5 , -4 , 2 \rangle - \langle x , y , z \rangle = \langle 5 - x , -4 - y , 2 - z \rangle$

$\mathbf{B} = \mathbf{S} - \mathbf{R} = \langle x , y , z \rangle - \langle 2 , -1 , 5 \rangle = \langle x - 2 , y + 1 , z - 5 \rangle$

$$\text{Si } \mathbf{A} = 2\mathbf{B} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 - x = 2(x - 2) \Rightarrow x = 3 \\ -4 - y = 2(y + 1) \Rightarrow y = -2 \\ 2 - z = 2(z - 5) \Rightarrow z = 4 \end{array} \right\} \therefore S(3 , -2 , 4)$$

■

Ejemplo 2 *Usando vectores para hallar un punto perteneciente a un segmento*

Sean A(2 , 3 , -2) y B(6 , -3 , 2). Hallar el punto P que está en el segmento de recta que une A con B y a 3/4 de distancia de A a B.

Solución. Si $P(x , y , z) \in \overline{AB} \Rightarrow AP = \frac{3}{4}\overline{AB} \Leftrightarrow 4\,\overline{AP} = 3\,\overline{AB}$

$$\Rightarrow 4\langle x - 2 , y - 3 , z + 2 \rangle = 3\langle 4 , -6 , 4 \rangle \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - 8 = 12 \Rightarrow x = 5 \\ 4y - 12 = -18 \Rightarrow y = -3/2 \\ 4z + 8 = 12 \Rightarrow z = 1 \end{array} \right\} \therefore P(5 , -3/2 , 1)$$

■

Ejemplo 3 *Usando vectores para determinar puntos alineados*

Demostrar que los puntos A(-2 , -7 , 7) , B(2 , -1 , 3) y C(4 , 2 , 1) son colineales.

Demostración. Bastará probar que $\|\vec{AC}\| = \|\vec{AB}\| + \|\vec{BC}\|$

En efecto

A B C

$\vec{AC} = \langle 4 , 2 , 1\rangle - \langle -2 , -7 , 7\rangle = 3\langle 2 , 3 , -2\rangle$

$\vec{AB} = \langle 2 , -1 , 3\rangle - \langle -2 , -7 , 7\rangle = 2\langle 2 , 3 , -2\rangle$

$\vec{BC} = \langle 4 , 2 , 1\rangle - \langle 2 , -1 , 3\rangle = \langle 2 , 3 , -2\rangle$

Luego : $\|\vec{AC}\| = 3\sqrt{4+9+4} = 3\sqrt{17}$, $\|\vec{AB}\| = 2\sqrt{17}$ y $\|\vec{BC}\| = \sqrt{17}$

Dado que : $3\sqrt{17} = 2\sqrt{17} + \sqrt{17} \Rightarrow \|\vec{AC}\| = \|\vec{AB}\| + \|\vec{BC}\|$

Por lo tanto , los puntos A , B y C son colineales ■

Ejemplo 4 *Usando vectores para determinar la naturaleza de un triángulo*

Demostrar que los puntos A(3 , 5 , 2) , B(2 , 3 , -1) y C(6 , 1 , -1) son vértices de un triángulo rectángulo.

Demostración. En efecto , hallemos las componentes de los vectores $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ y $\vec{AC}$

$\vec{AB} = \langle 2 , 3 , -1\rangle - \langle 3 , 5 , 2\rangle = \langle -1 , -2 , -3\rangle$

$\vec{BC} = \langle 6 , 1 , -1\rangle - \langle 2 , 3 , -1\rangle = \langle 4 , -2 , 0\rangle$

$\vec{AC} = \langle 6 , 1 , -1\rangle - \langle 3 , 5 , 2\rangle = \langle 3 , -4 , -3\rangle$

Luego : $\|\vec{AB}\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$\|\vec{BC}\| = \sqrt{16+4+0} = \sqrt{20}$

$\|\vec{AC}\| = \sqrt{9+16+9} = \sqrt{34}$

FIGURA 4.4

Como $(\sqrt{34})^2 = (\sqrt{14})^2 + (\sqrt{20})^2 \Rightarrow \|\vec{AC}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2$

Se cumple el Teorema de Pitágoras , por lo que , el ΔABC es recto en B. ■

Sean los vectores **A** = ⟨1 , 5 , 3⟩ , **B** = ⟨6 , -4 , -2⟩ , **C** = ⟨0 , -5 , 7⟩ y **D** = ⟨-20 , 27 , -35⟩. Se requiere elegir los números r , s y t de tal modo que los vectores r**A** , s**B** , t**C** y **D** formen una línea quebrada cerrada , si el origen de cada vector sucesivo se hace coincidir con el extremo del anterior.

Solución. Si los vectores r**A** , s**B** , t**C** y **D** constituyen una línea quebrada cerrada , su suma vectorial debe ser nula , esto es

$$r\mathbf{A} + s\mathbf{B} + t\mathbf{C} + \mathbf{D} = 0 \Leftrightarrow r\langle 1 , 5 , 3\rangle + s\langle 6 , -4 , -2\rangle + t\langle 0 , -5 , 7\rangle = -\langle -20 , 27 , -35\rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle r + 6s , 5r - 4s - 5t , 3r - 2s + 7t\rangle = \langle 20 , -27 , 35\rangle$$

de donde , por igualdad de vectores , obtenemos el sistema

$$r + 6s = 20$$
$$5r - 4s - 5t = -27$$
$$3r - 2s + 7t = 35$$

Resolviendo por simultáneas se tiene lo requerido : r = 2 , s = 3 , t = 5 ■

Ejemplo 6 Sea el triángulo de vértices A(-1 , 2 , 2) , B(4 , 2 , -3) y C(9 , -3 , 7). Por el punto D(2 , 2 , -1) del lado $\overline{AB}$ se traza una paralela al lado $\overline{AC}$ y que corta al lado $\overline{BC}$ en E. Hallar la longitud del segmento $\overline{DE}$.

Solución. Resolveremos el problema hallando la razón en que el punto D divide al lado $\overline{AB}$.

Esto es , si $r = \frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} \Rightarrow r\vec{DB} = \vec{AD}$

$\Rightarrow r(\mathbf{B} - \mathbf{D}) = \mathbf{D} - \mathbf{A}$

$\Rightarrow 2r\langle 1 , 0 , -1\rangle = 3\langle 1 , 0 , -1\rangle \Leftrightarrow r = 3/2$

Siendo $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$, por el Teorema de Thales :

$\frac{\vec{CE}}{\vec{EB}} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2(\mathbf{E} - \mathbf{C}) = 3(\mathbf{B} - \mathbf{E})$

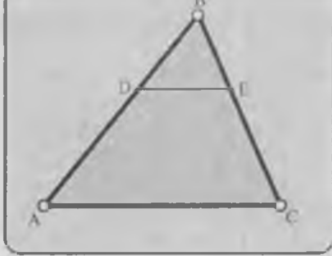


FIGURA 4.5

de donde : $5\mathbf{E} = 3\langle 4 , 2 , -3\rangle + 2\langle 9 , -3 , 7\rangle \Rightarrow \mathbf{E} = \langle 6 , 0 , 1\rangle$

Por lo que , $\vec{DE} = \langle 6 , 0 , 1\rangle - \langle 2 , 2 , -1\rangle = 2\langle 2 , -1 , 1\rangle \Rightarrow \|\vec{DE}\| = 2\sqrt{6}$ ■

Ejemplo 7 En el trapecio ABCD la razón entre la longitud de la base $\overline{AD}$ y de la base $\overline{BC}$ equivale a r. Suponiendo que $\vec{AC}$ = **a** y $\vec{BD}$ = **b** , exprésense los vectores $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ y $\vec{DA}$ por medio de **a** y **b**.

Solución. Si $\frac{\vec{AD}}{\vec{BC}} = r \Rightarrow \vec{AD} = r\vec{BC}$ (1)

$\Rightarrow \vec{AB} + \vec{BD} = r\vec{BC}$

En el ΔABC : $\vec{AB} = \vec{AC} - \vec{BC}$ (2)

$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{AC} - \frac{1}{r}(\vec{AB} + \vec{BD}) \Leftrightarrow \vec{AB} = \frac{r\mathbf{a} - \mathbf{b}}{1 + r}$

De (2) : $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = \mathbf{a} - \frac{r\mathbf{a} - \mathbf{b}}{1 + r} \Rightarrow \vec{BC} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{1 + r}$

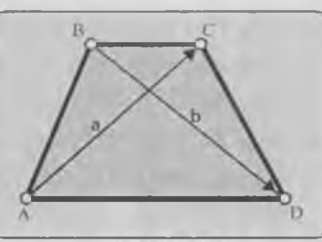


FIGURA 4.6

En el ΔACD : $\vec{CD} = \vec{AD} - \vec{AC} = r\vec{BC} - \mathbf{a}$

$\Rightarrow \vec{CD} = r\left(\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{1 + r}\right) - \mathbf{a} \Leftrightarrow \vec{CD} = \frac{r\mathbf{b} - \mathbf{a}}{1 + r}$

Finalmente , de (1) : $\vec{DA} = -r\vec{BC} \Rightarrow \vec{DA} = -\frac{r}{1 + r}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ ■

Ejemplo 8 M es el punto de intersección de las medianas del triángulo ABC , O es un punto arbitrario del espacio. Demostrar que

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$$

Demostración. La Figura 4.7 muestra al punto M y una mediana $\overline{BD}$. Entonces

$$D = \frac{1}{2}(A + C)$$

Por la propiedad de las medianas

$$\overline{DM} = \frac{1}{3}\overline{DB} \Rightarrow \mathbf{M} - \mathbf{D} = \frac{1}{3}(B - D)$$

Esto es : $\mathbf{M} - \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{C}) = \frac{1}{3}B - \frac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{C})$

de donde obtenemos : $\mathbf{M} = \frac{1}{3}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})$

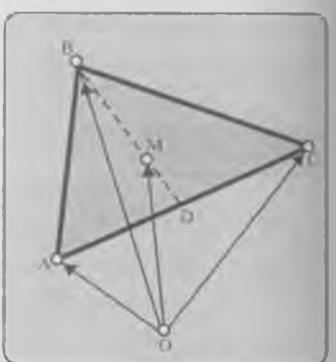


FIGURA 4.7

Restando el vector O a cada extremo se tiene :

$$\mathbf{M} - \mathbf{O} = \frac{1}{3}[(\mathbf{A} - \mathbf{O}) + (\mathbf{B} - \mathbf{O}) + (\mathbf{C} - \mathbf{O})]$$

$$\Leftrightarrow \overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 22*

1. **A** y **B** son los vectores de posición de los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$. Si 2 **A** = 3 **B** y P(3 , -1 , 2) , Q(x , y , z) , R(-2 , 3 , -3) y S(2 , 5 , -5) ; hállese el vector **A**.
2. El vector **V** = ⟨-2 , 2 , 6⟩ es el vector de posición del segmento $\overline{AB}$, cuyo punto medio de M(-4 , 3 , 1). Hallar las coordenadas de los extremos del segmento $\overline{AB}$.
3. Sea **V** = ⟨3 , -6 , 1⟩ el vector de posición del segmento $\overline{AB}$ y sea C(6 , -1 , 2) el punto de trisección , más cercano de A , de dicho segmento , hallar las coordenadas de A y B.
4. Sean A(2 , -1 , 3) , B(-4 , 5 , 0) , C(4 , -1 , 3) y D(4 , 4 , -7). El punto P está a 2/3 de distancia de A a B y el punto Q está a 3/5 de distancia de C a D . Calcular las componentes del vector **V** que va de P a Q.
5. Demostrar que los puntos A(6 , 3 , 4) , B(2 , 1, -2) y C(4 , -1 , 10) son vértices de un triángulo isósceles.
6. Demostrar que los puntos A(2 , 0 , -1) , B(3 , 2 , -2) y C(5 , 6 , -4) son colineales.

7. Si **A** = ⟨3 , 5 , -1⟩ , **B** = ⟨6 , -2 , 3⟩ y **C** = ⟨-3 , 2 , 0⟩ , hallar el vector **X** que satisfaga la ecuación 3 **X** + 6 **A** - 5 **C** = 8 **B**
8. Demostrar que los puntos A(2 , 0 , -1) , B(1 , 2 , 1) y C(6 , -1 , 2) son vértices de un triángulo rectángulo.
9. Sean **A** = ⟨2 , -1 , 5⟩ , **B** = ⟨-1 , -2 , 3⟩ y **C** = ⟨1 , -1 , 1⟩ tres vectores en $\mathbf{R}^3$, hallar un vector unitario en la dirección del vector **V** = **A** - **B** + **C**.
10. Sean dados los vértices del triángulo A(3 , -1 , 5) , B(4 , 2, -5) y C(-4 , 0 , 3). Hállese la longitud de la mediana trazada desde el vértice A.
11. Determínense las coordenadas de los extremos de un segmento que está dividido en partes iguales mediante los puntos C(2 , 0 , 2) y D(5 , -2 , 0).
12. En un espacio están dados los triángulos ABC y A'B'C'. M y M' son los puntos de intersección de las medianas. Expresar el vector $\overline{MM'}$ mediante los vectores $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$.
13. En un paralelogramo ABCD se designan : $\overline{AB}$ = **a** , $\overline{AD}$ = **b**. Expresar en términos de **a** y **b** los vectores $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ y $\overline{MD}$, donde M es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo.
14. Si A , B y C son puntos colineales , hallar el vector $\overline{AC}$ sabiendo que B se encuentra entre A y C ; donde A(3 , -1 , 0) , B(4 , 1 , 3) y $\|\overline{AC}\| = 3\sqrt{14}$
15. El segmento de una recta limitado por los puntos A(-1 , 8 , 3) y B(9 , -7 , -2) , está dividido en cinco partes iguales por los puntos C , D , E y F. Hallar las coordenadas de estos puntos.

4.3 DIRECCION DE UN VECTOR EN EL ESPACIO

A cada vector no nulo **V** = ⟨x , y , z⟩ ∈ $\mathbf{R}^3$, le corresponde una dirección dada por tres *ángulos de dirección* α , β, γ , cada uno de los cuales es el ángulo determinado por los ejes positivos del sistema tridimensional con el vector **V** en posición ordinaria (Figura 4.8). Los ángulos de dirección se elige de manera que sus medidas estén comprendidas en el intervalo [0 , π]

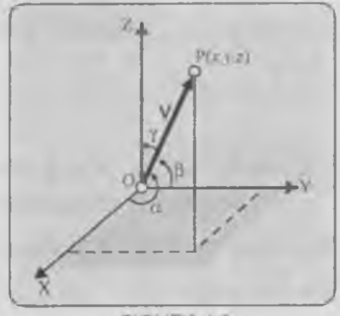


FIGURA 4.8

A los cosenos de los ángulos de dirección de un vector en $\mathbf{R}^3$ se les llama *cosenos directores* y vienen dados por

$$\text{Cos}\alpha = \frac{x}{||V||}\ ,\ \text{Cos}\beta = \frac{y}{||V||}\ ,\ \text{Cos}\gamma = \frac{z}{||V||} \qquad (1)$$

en donde : $||V|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones (1) , obtenemos

$$\text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta + \text{Cos}^2\gamma = 1 \qquad (2)$$

La ecuación (2) nos permite afirmar que los cosenos directores de un vector están intimamente relacionados , por lo que , si se conocen dos de ellos se puede calcular el valor absoluto del tercero. Si Cosα , Cosβ y Cosγ son los cosenos directores de un vector no nulo $V = \langle x , y , z\rangle$, por las ecuaciones (1) resulta que

$$\boldsymbol{u} = \langle \text{Cos}\alpha\ ,\ \text{Cos}\beta\ ,\ \text{Cos}\gamma\rangle = \left\langle \frac{x}{||V||}\ ,\ \frac{y}{||V||}\ ,\ \frac{z}{||V||}\right\rangle \qquad (3)$$

es el vector unitario que tiene la misma dirección que **V**

Ejemplo 1 Obtener los cosenos directores del vector **V** que va de A(2 , -2 , -1) a B(-4 , -5 , 1). Demostrar que la suma de los cuadrados de los cosenos directores del vector es igual a 1 y obtener también un vector unitario en la dirección de **V**.

Solución. Si $V = \vec{AB} \Rightarrow V = \langle -4 , -5 , 1\rangle - \langle 2 , -2 , -1\rangle = \langle -6 , -3 , 2\rangle$

Módulo del vector : $||V|| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + (2)^2} = 7$

Por las ecuaciones **(1)** , los cosenos directores del vector **V** son

$$\text{Cos}\alpha = -\frac{6}{7}\ ,\ \text{Cos}\beta = -\frac{3}{7}\ ,\ \text{Cos}\gamma = \frac{2}{7}$$

Luego : $\text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta + \text{Cos}^2\gamma = \frac{36}{49} + \frac{9}{49} + \frac{4}{49} = 1$

Finalmente , el vector unitario es la dirección de **V** , según (3) , es

$$\boldsymbol{u} = \langle -6/7 , -3/7 , 2/7\rangle$$ ■

Ejemplo 2 Averiguar si el vector $V \in \mathbb{R}^3$ puede tener como ángulos de dirección a $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$ y $\gamma = 150°$.

Solución. Veamos si la ecuación **(2)** se satisface para estos ángulos.

$$\text{Cos}^2 60° + \text{Cos}^2 45° + \text{Cos}^2\gamma = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \neq 1$$

Por tanto , no existe el vector **V** con tales ángulos de dirección. ■

Ejemplo 3 Obtener un vector **V** si su norma es 14 y tiene sentido contrario al vector cuya representación geométrica va de S(3 , -5 , 2) a T(5 , -8 , -4).

Solución. Sea $A = \vec{ST} \Rightarrow A = \langle 5 , -8 , -4\rangle - \langle 3 , -5 , 2\rangle = \langle 2 , -3 , -6\rangle$

Entonces : $||V|| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = 7$

Un vector unitario con sentido opuesto al de **A** es

$$\boldsymbol{u} = -\frac{A}{||A||} = -\frac{\langle 2 , -3 , -6\rangle}{7}$$

Dado que , $V = ||V||\ \boldsymbol{u} \Rightarrow V = 14\left(\frac{\langle -2 , 3 , 6\rangle}{7}\right) = \langle -4 , 6 , 12\rangle$ ■

Ejemplo 4 Hállese el vector **A** que forma con todos los tres versores básicos ángulos agudos iguales , si $||A|| = 2\sqrt{3}$

(**Nota.** A los vectores unitarios **i** , **j** y **k** se les denomina también versores básicos)

Solución. Como $\alpha = \beta = \gamma$, entonces por la fórmula **(2)** obtenemos :

$$3\,\text{Cos}^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \text{Cos}\alpha = \pm\sqrt{3}/3$$

y dado que α , β y γ son agudos , entonces $\text{Cos}\alpha = \sqrt{3}/3$

Si $x = ||A||\ \text{Cos}\alpha \Rightarrow x = 2\sqrt{3}\,(\sqrt{3}/3) = 2$

$$\therefore\ A = \langle 2 , 2 , 2\rangle$$ ■

EJERCICIOS : Grupo 23

1. En los ejercicios siguientes obtener un vector unitario en la dirección del vector cuya representación geométrica va de S a T.
   a) S(2 , -2 , -1) , T(-4 , -5 , 1) b) S(9 , 2 , -1) , T(-3 , 5 , -5)
2. Si para un vector $A \in \mathbb{R}^3$, Cosβ = 3/10 y Cosγ = 2/5; calcular el valor del ángulo α.
3. Si para un vector $A \in \mathbb{R}^3$, Cosα = 2/11 y Cosβ = - 5/11 ; calcular Cosγ.
4. Hallar un vector **V** cuya norma es 1/2 y tiene el mismo sentido que el vector $A = \langle 6 , 12 , 4\rangle$

5. Hallar el vector **V** cuya norma es $7\sqrt{2}$ y que tiene el sentido opuesto al vector $\mathbf{A} = \langle -2, 5, -4\rangle$
6. Hállese el vector **X** que forma con el versor **j** un ángulo de 60° y con el versor **k**, un ángulo de 120°, si $\|\mathbf{X}\| = 5\sqrt{2}$
7. Hállese el vector **X**, colineal al vector $\mathbf{A} = \langle 1, -2, -2\rangle$, que forma con el versor **j** un ángulo agudo y cuya magnitud es 15.
8. Hállese el vector **X**, colineal con el vector $\mathbf{A} = -3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, que forma con el versor **k** un ángulo obtuso, y cuya norma es 21.
9. Un vector **V** forma con los ejes X e Y los ángulos de 60° y 120° respectivamente. Hallar sus coordenadas sabiendo que su magnitud es 2 unidades.
10. Hallar las coordenadas del punto P, si su radio vector forma con los ejes coordenados ángulos iguales y su módulo es igual a 3.
11. Puede formar un vector con los ejes coordenados los ángulos siguientes
    a) $\alpha = 45°, \beta = 60°, \gamma = 120°$, b) $\alpha = 45°, \beta = 135°, \gamma = 60°$,
    c) $\alpha = 90°, \beta = 150°, \gamma = 60°$?
12. Puede formar un vector, con dos ejes coordenados los ángulos siguientes
    a) $\alpha = 30°, \beta = 45°$, b) $\beta = 60°, \gamma = 60°$, c) $\alpha = 150°, \gamma = 30°$?

4.4 PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES EN EL ESPACIO

Si los vectores **A** y **B** $\in \mathbb{R}^3$ se dan mediante sus coordenadas

$$\mathbf{A} = \langle x_1, y_1, z_1\rangle \text{ y } \mathbf{B} = \langle x_2, y_2, z_2\rangle$$

su producto escalar, denotado por **A** • **B**, se define como sigue :

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \qquad (4)$$

Por ejemplo, si $\mathbf{A} = \langle -2, 3, -5\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 1, -4, -2\rangle$, entonces

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \langle -2, 3, -5\rangle\cdot\langle 1, -4, -2\rangle$$
$$= (-2)(1) + 3(-4) + (-5)(-2)$$
$$= -2 - 12 + 10 = -4$$

El teorema siguiente ilustra las propiedades del producto escalar que se puede demostrar de forma inmediata a partir de la definición (4)

TEOREMA 4.1 *Propiedades algebraicas del producto escalar*

Si **A**, **B** y **C** son vectores en el espacio y r es un escalar, entonces se verifican las siguientes propiedades

PE_1 :	$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$	Conmutatividad
PE_2 :	$r(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (r\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot(r\mathbf{B})$	Asociatividad escalar
PE_3 :	$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{C}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{C}\cdot\mathbf{B}$; $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$	Distributividad
PE_4 :	$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\|^2 \geq 0$	Magnitud respecto al producto escalar
PE_5 :	$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{O}$	

Las demostraciones se dejan como ejercicio.

Nota. Como **A** • **B** es un número, la expresión (**A** • **B**) • **C** carece de significado, por lo que no se considera la asociatividad del producto escalar.

Ejemplo 1 Dados los vectores $\mathbf{A} = \langle 3, -1, -2\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 2, 1, 4\rangle$ y $\mathbf{C} = \langle 7, -2, -1\rangle$, hallar la suma de las componentes del vector **X** tal que : $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = 4$, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{X} = 2$ y $\mathbf{C}\cdot\mathbf{X} = 4$

Solución. Sea el vector $\mathbf{X} = \langle x, y, z\rangle$

$$\text{Si } \mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = 4 \Rightarrow \langle 3, -1, -2\rangle\cdot\langle x, y, z\rangle = 4 \Rightarrow 3x - y - 2z = 4$$
$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{X} = 2 \Rightarrow \langle 2, 1, 4\rangle\cdot\langle x, y, z\rangle = 2 \Rightarrow 2x + y + 4z = 2$$
$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{X} = 4 \Rightarrow \langle 7, -2, -1\rangle\cdot\langle x, y, z\rangle = 4 \Rightarrow 7x - 2y - z = 4$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos : $x = 2$, $y = 6$, $z = -2$

$$\therefore\ x + y + z = 6$$ ■

Ejemplo 2 Si $\mathbf{A} = \langle 2, 1, -1\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 1, -1, 2\rangle$, hallar un vector no nulo $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^3$ tal que : $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} = 0$

Solución. Sea el vector $\mathbf{C} = \langle x, y, z\rangle$

$$\text{Si } \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} = 0 \Rightarrow \langle 2, 1, -1\rangle\cdot\langle x, y, z\rangle = 0 \Rightarrow 2x + y - z = 0 \qquad (1)$$
$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} = 0 \Rightarrow \langle 1, -1, 2\rangle\cdot\langle x, y, z\rangle = 0 \Rightarrow x - y + 2z = 0 \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2) se tiene : $z = -3x$

Multiplicando (1) por 2 y sumándole (2) obtenemos : $y = -5x$

$$\Rightarrow \mathbf{C} = \langle x, y, z\rangle = \langle x, -5x, -3x\rangle = x\langle 1, -5, -3\rangle$$

Hay infinitas soluciones. Un ejemplo, para $x = 1$ se tiene

$$\mathbf{C} = \langle 1, -5, -3\rangle$$ ■

Ahora veremos el significado de *ángulo entre dos vectores*, el cual conduce a otra expresión para el producto escalar de vectores.

4.4.1 ANGULO ENTRE DOS VECTORES EN R^3

El ángulo entre dos vectores **A** y **B** no nulos es el ángulo $\theta \in [0, \pi]$, entre sus respectivos vectores de posición normales como se muestra en la Figura 4.9, esto es, θ es el ángulo de medida positiva entre $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ e interior al triángulo determinador por O, P y Q.

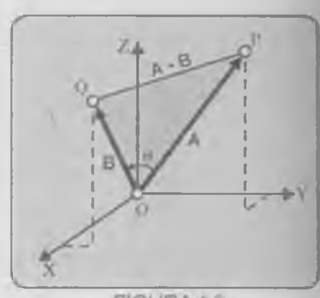


FIGURA 4.9

Como **A** y **B** no son paralelos entonces los tres vectores **A**, **B** y **A - B** tienen representaciones geométricas que forman un triángulo. Empleando la ley de los cosenos se puede demostrar que :

$$\text{Cos}\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{B}||} \qquad (5)$$

Ejemplo 3 Dados los vectores $\mathbf{A} = \langle 1, 2, 1 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 2, 1, -1 \rangle$, determinar el ángulo entre **A** y **B**.

Solución. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \langle 1, 2, 1 \rangle \cdot \langle 2, 1, -1 \rangle = 2 + 2 - 1 = 3$

$||\mathbf{A}|| = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$ y $||\mathbf{B}|| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$

Luego, en la fórmula (5) : $\text{Cos}\theta = \frac{3}{(\sqrt{6})(\sqrt{6})} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60°$

Nota. Si se conoce el ángulo entre dos vectores, entonces de la fórmula (5)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{B}||\ \text{Cos}\theta \qquad (6)$$

obtenemos una forma alternativa para calcular el producto escalar.

OBSERVACION 4.1 *Vectores paralelos*

La fórmula (5) es también válida si los vectores **A** y **B** son paralelos, puesto que con $\mathbf{A} = r\,\mathbf{B}$ se tiene

$$\text{Cos}\theta = \frac{r\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{||r\mathbf{B}||\ ||\mathbf{B}||} = \frac{r\,||\mathbf{B}||^2}{|r|\ ||\mathbf{B}||^2} = \frac{r}{|r|}$$

Si $r > 0 \Rightarrow \text{Cos}\theta = 1$ y si $r < 0 \Rightarrow \text{Cos}\theta = -1$. Entonces los vectores **A** y **B** son paralelos si y sólo si $\theta = 0°$ o $\theta = 180°$, es decir, si y sólo si $\text{Cos}\theta = \pm 1$. Luego, la fórmula (5) se puede aplicar para decidir si dos vectores no nulos son paralelos o no.

Ejemplo 4 Determinar si los vectores $\mathbf{A} = \langle 6, -3, -9 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle -2, 1, 3 \rangle$ son paralelos.

Solución. Resolveremos el problema aplicando dos métodos

Método 1. Haciendo uso de la fórmula (5)

$$\text{Cos}\theta = \frac{\langle 6, -3, -9 \rangle \cdot \langle -2, 1, 3 \rangle}{(\sqrt{36 + 9 + 81})(\sqrt{4 + 1 + 9})} = \frac{-12 - 3 - 27}{(3\sqrt{14})(\sqrt{14})} = -1$$

Como $\theta = 180° \Rightarrow \mathbf{A} \,||\, \mathbf{B}$

Método 2. Escribiendo el vector **A** en la forma : $\mathbf{A} = r\,\mathbf{B}$

En efecto, $\mathbf{A} = -3\langle -2, 1, 3 \rangle \Rightarrow \mathbf{A} = -3\,\mathbf{B}$

$\therefore\ \mathbf{A} = r\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \,||\, \mathbf{B}$ ■

Ejemplo 5 Para qué valores de a y b los vectores $\mathbf{A} = \langle -2, 3, a \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle b, -6, 2 \rangle$ son colineales?

Solución. Usaremos el método 2 del Ejemplo 4, esto es, si

$$\mathbf{A} \,||\, \mathbf{B} \Rightarrow \langle -2, 3, a \rangle = r\langle b, -6, 2 \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = rb \\ 3 = -6r \Rightarrow r = -1/2 \\ a = 2r \end{cases}$$

de donde obtenemos : $a = -1$ y $b = 4$ ■

OBSERVACION 4.2 *Vectores ortogonales*

Dos vectores **A** y **B** son *ortogonales*, si y sólo si la medida del ángulo comprendido entre ellos es 90°, esto es, si y sólo si $\text{Cos}\theta = 0$. De la fórmula (5) se obtiene inmediatamente que los vectores **A** y **B** en R^3 son perpendiculares si y sólo si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$

Ejemplo 6 Demostrar que el vector $\mathbf{V} = \langle 2, -1, 3 \rangle$ es ortogonal a los vectores $\mathbf{A} = \langle 3, 0, -2 \rangle$, $\mathbf{B} = \langle 1, 8, 2 \rangle$ y $\mathbf{C} = \langle 1, -4, -2 \rangle$.

Demostración. En efecto, hallemos el producto escalar de **V** con cada uno de los vectores dados

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \langle 3, 0, -2 \rangle \cdot \langle 2, -1, 3 \rangle = 6 + 0 - 6 = 0$

$\mathbf{B} \cdot \mathbf{V} = \langle 1, 8, 2 \rangle \cdot \langle 2, -1, 3 \rangle = 2 - 8 + 6 = 0$

$\mathbf{C} \cdot \mathbf{V} = \langle 1, -4, -2 \rangle \cdot \langle 2, -1, 3 \rangle = 2 + 4 - 6 = 0$

Por tanto, **V** es ortogonal a los tres vectores dados. ■

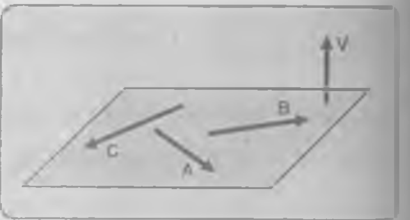


FIGURA 4.10

En este ejemplo se puede observar que ningún par de los tres vectores **A** , **B** y **C** son paralelos. En realidad , en $\mathbf{R}^3$, es posible obtener un número infinito de vectores no paralelos , cada uno de los cuales es perpendicular a **V**. (Figura 4.10).
Esto sugiere que el conjunto de representaciones geométricas de todos los vectores ortogonales a **V** cúbre el plano completamente.

[1] **Nota.** Los términos perpendicular , ortogonal y normal significan , esencialmente la misma cosa : encuentro en ángulos rectos. Sin embrago , se da preferencia a decir que dos vectores son *ortogonales* , dos rectas o planos son *perpendiculares* y un vector es *normal* a una recta o plano dado.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Hallar todos los vectores que son perpendiculares al plano formado por los vectores $\mathbf{A} = \langle 5 , -1 , -2\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 2 , 3 , 4\rangle$.

Solución. Designemos por $\mathbf{C} = \langle x , y , z\rangle$ uno de los vectores buscados.

Si $\mathbf{C} \perp \mathbf{A} \Rightarrow \langle x , y , z\rangle \cdot \langle 5 , -1 , -2\rangle = 0 \Rightarrow 5x - y - 2z = 0$ (1)

$\mathbf{C} \perp \mathbf{B} \Rightarrow \langle x , y , z\rangle \cdot \langle 2 , 3 , 4\rangle = 0 \Rightarrow 2x + 3y + 4z = 0$ (2)

Multiplicando (1) por 2 y sumándole (2) obtenemos : $y = -12x$

Multiplicando (1) por 3 y sumándole (2) resulta : $z = (17/2)x$

$$\Rightarrow \mathbf{C} = \langle x , -12x , \tfrac{17}{2}x\rangle = \tfrac{x}{2}\langle 2 , -24 , 17\rangle$$

Por lo tanto , $\mathbf{V} = n\langle 2 , -24 , 17\rangle , n \in \mathbf{R} - \{0\}$, representa al conjunto de vectores que son perpendiculares a **A** y **B**. ■

Ejemplo 2 Si $\mathbf{A} = \langle 2 , -1 , 2\rangle , \mathbf{B} = \langle 1 , 2 , -2\rangle$, hallar dos vectores **C** y **D** en $\mathbf{R}^3$, que satisfacen las condiciones siguientes :

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} + \mathbf{D} \ , \ \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} = 0 \ , \ \mathbf{C} \,||\, \mathbf{B}.$$

Solución. Sean : $\mathbf{C} = \langle x_1 , y_1 , z_1\rangle$ y $\mathbf{D} = \langle x_2 , y_2 , z_2\rangle$

Si $\mathbf{A} = \mathbf{C} + \mathbf{D} \Rightarrow \langle 2 , -1 , 2\rangle = \langle x_1 + x_2 , y_1 + y_2 , z_1 + z_2\rangle$

$\Leftrightarrow 2 = x_1 + x_2 \ , \ -1 = y_1 + y_2 \ , \ 2 = z_1 + z_2$ (1)

$\mathbf{B} \cdot \mathbf{D} = 0 \Rightarrow \langle 1 , 2 , -2\rangle \cdot \langle x_2 , y_2 , z_2\rangle = 0 \Leftrightarrow x_2 + 2y_2 - 2z_2 = 0$ (2)

$\mathbf{C} \,||\, \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C} = r\mathbf{B} \Rightarrow \langle x_1 , y_1 , z_1\rangle = r\langle 1 , 2 , -2\rangle \Leftrightarrow x_1 = r , y_1 = 2r , z_1 = -2r$ (3)

Sustituyendo (3) en (1) se tiene : $x_2 = 2 - r \ , \ y_2 = -1 - 2r \ , \ z_2 = 2 + 2r$

Finalmente , sustituyendo en (2) , obtenemos $r = -4/9$

$$\therefore \ \mathbf{C} = \tfrac{4}{9}\langle -1 , -2 , 2\rangle \ \text{y} \ \mathbf{D} = \tfrac{1}{9}\langle 22 , -1 , 10\rangle$$ ■

Ejemplo 3 Hallar un vector unitario perpendicular al plano formado por los vectores $\mathbf{A} = \langle 2 , -6 , -3\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 4 , 3 , -1\rangle$

Solución. Sea $\mathbf{C} = \langle x , y , z\rangle$ el vector normal al plano formado por **A** y **B**

Si $\mathbf{A} \perp \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = 0 \Rightarrow \langle 2 , -6 , -3\rangle \cdot \langle x , y , z\rangle = 0 \Leftrightarrow 2x - 6y - 3z = 0$

$\mathbf{B} \perp \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = 0 \Rightarrow \langle 4 , 3 , -1\rangle \cdot \langle x , y , z\rangle = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - z = 0$

Resolviendo el sistema para x e y , obtenemos : $x = \tfrac{1}{2}z \ , \ y = -\tfrac{1}{3}z$

$$\Rightarrow \mathbf{C} = \tfrac{z}{6}\langle 3 , -2 , 6\rangle = n\langle 3 , -2 , 6\rangle , n \in \mathbf{R} - \{0\}$$

Por consiguiente : $\boldsymbol{u} = \dfrac{\mathbf{C}}{||\mathbf{C}||} = \dfrac{n\langle 3 , -2 , 6\rangle}{|n|\sqrt{9 + 4 + 36}} = \pm \tfrac{1}{7}\langle 3 , -2 , 6\rangle$ ■

Ejemplo 4 El vector **V** es perpendicular a los vectores $\mathbf{A} = \langle 1 , 1 , 1\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 2 , 1 , -1\rangle$ y forma con el eje OZ un ángulo obtuso , hallar el vector **V** sabiendo que $||\mathbf{V}|| = \sqrt{56}$.

Solución. Sea el vector $\mathbf{V} = \langle x , y , z\rangle$

Si $\mathbf{A} \perp \mathbf{V} \Rightarrow \langle 1 , 1 , 1\rangle \cdot \langle x , y , z\rangle = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0$

$\mathbf{B} \perp \mathbf{V} \Rightarrow \langle 2 , 1 , -1\rangle \cdot \langle x , y , z\rangle = 0 \Leftrightarrow 2x + y - z = 0$

Del sistema de ecuaciones obtenemos : $y = (-3/2)x \ , \ z = (1/2)x$ (1)

$$\Rightarrow \mathbf{V} = \langle x , -\tfrac{3}{2}x , \tfrac{1}{2}x\rangle = \tfrac{x}{2}\langle 2 , -3 , 1\rangle$$

Si $||\mathbf{V}|| = \sqrt{56} \Rightarrow \left|\tfrac{x}{2}\right|\sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{56} \Rightarrow |x| = 4 \Leftrightarrow x = 4$ ó $x = -4$

Dado que el ángulo γ es obtuso , entonces $\text{Cos}\gamma < 0$, esto es $z < 0$

Luego , en (1) , para que $z < 0$, debemos elegir $x = -4$

$$\therefore \ \mathbf{V} = \langle -4 , 6 , -2\rangle$$ ■

Ejemplo 5 Dos vectores $A = \langle 2 , -3 , 6\rangle$ y $B = \langle -1 , 2 , -2\rangle$ están aplicados a un mismo punto. Hallar las coordenadas del vector C, que tiene la misma dirección de la bisectriz del ángulo formado por los vectores A y B, si $||C|| = 3\sqrt{42}$.

Solución. Sean: $a = \frac{\langle 2 , -3 , 6\rangle}{7}$ y $b = \frac{\langle -1 , 2 , -2\rangle}{3}$ dos vectores unitarios en las direcciones de A y B respectivamente. Entonces el vector C tiene la misma orientación del vector unitario $u = a + b$, esto es,

$C = r(a + b) = \frac{r}{21}\langle -1 , 5 , 4\rangle = t\langle -1 , 5 , 4\rangle , t > 0$

$\Rightarrow ||C|| = t\sqrt{1 + 25 + 16} \Leftrightarrow 3\sqrt{42} = t\sqrt{42} \Rightarrow t = 3$

$\therefore C = \langle -3 , 15 , 12\rangle$ ■

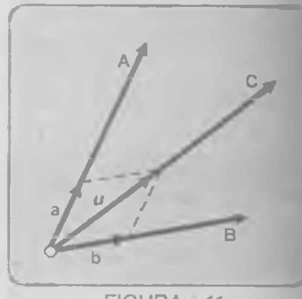


FIGURA 4.11

Ejemplo 6 Los vectores A y B forman un ángulo $\theta = 30°$, sabiendo que $||A|| = \sqrt{3}$ y $||B|| = 1$, hallar el ángulo α formado por los vectores $V = A + B$ y $W = A - B$.

Solución. Si $\cos\theta = \frac{A \cdot B}{||A||\,||B||} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{A \cdot B}{(\sqrt{3})(1)} \Leftrightarrow A \cdot B = 3/2$

$V = A + B \Rightarrow ||V||^2 = ||A||^2 + 2A \cdot B + ||B||^2 = 3 + 2(3/2) + 1 = 7 \Rightarrow ||V|| = \sqrt{7}$

Análogamente, para $W = A - B$, obtenemos: $||W|| = 1$

$V \cdot W = (A + B) \cdot (A - B) = ||A||^2 - ||B||^2 = 3 - 1 = 2$

Luego, si $\cos\alpha = \frac{V \cdot W}{||V||\,||W||} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \alpha = \text{arc Cos}(2/\sqrt{7})$ ■

Ejemplo 7 Dado el segmento $\overline{AB}$, donde $A(-1 , 2 , 4)$ y $B(8 , -4 , -2)$; hallar el ángulo COD, si O es el origen de coordenadas y C y D son los puntos de trisección del segmento $\overline{AB}$.

Solución. Sea θ la medida del ángulo COD.

Como C y D son puntos de trisección del sgemento $\overline{AB}$, entonces: $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{1}{2}$

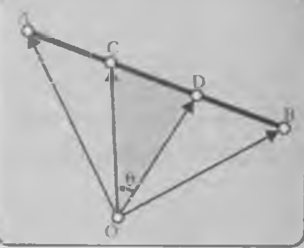


FIGURA 4.12

Esto es; $\overline{CB} = 2\overline{AC} \Leftrightarrow B - C = 2(C - A)$

de donde: $C = \frac{1}{3}(2A + B) \Rightarrow C = \frac{1}{3}(\langle -2 , 4 , 8\rangle + \langle 8 , -4 , -2\rangle) = \langle 2 , 0 , 2\rangle$

D es punto medio de $\overline{CB}$, luego

$$D = \frac{1}{2}(C + B) = \frac{1}{2}(\langle 2 , 0 , 2\rangle + \langle 8 , -4 , -2\rangle) = \langle 5 , -2 , 0\rangle$$

Si $\cos\theta = \frac{C \cdot D}{||C||\,||D||} = \frac{\langle 2 , 0 , 2\rangle \cdot \langle 5 , -2 , 0\rangle}{(2\sqrt{2})(\sqrt{29})} = \frac{5}{\sqrt{58}} \Rightarrow \theta = \text{arc Cos}(5/\sqrt{58})$ ■

Ejemplo 8 En la Figura 4.13 se tiene el paralelepípedo de dimensiones: $\overline{OA} = 4$, $\overline{OB} = 5$ y $\overline{OC} = 3$. Hallar el coseno del ángulo formado por el vector $V = 5a + b - c$ y el vector $W = \langle -1 , 2 , 0\rangle$, si $||a|| = \sqrt{2}$, $||b|| = 5$ y $||c|| = 10$.

Solución. Haciendo coincidir las aristas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ con los ejes X, Y, Z, respectivamente, de un sistema cartesiano tridimensional, se tiene:

$A(4 , 0 , 0)$, $B(0 , 5 , 0)$, $C(0 , 0 , 3)$, $D(4 , 5 , 0)$, $E(0 , 5 , 3)$

$\Rightarrow \overline{CA} = \langle 4 , 0 , 0\rangle - \langle 0 , 0 , 3\rangle = \langle 4 , 0 , -3\rangle$

$\overline{CD} = \langle 4 , 5 , 0\rangle - \langle 0 , 0 , 3\rangle = \langle 4 , 5 , -3\rangle$

$\overline{DE} = \langle 0 , 5 , 3\rangle - \langle 4 , 5 , 0\rangle = \langle -4 , 0 , 3\rangle$

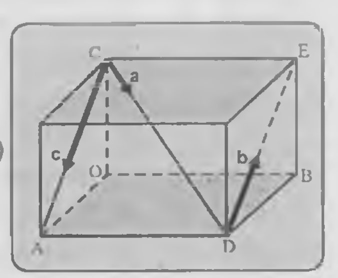


FIGURA 4.13

Un vector unitario en la dirección y sentido de $\overline{CD}$ es

$$u = \frac{\overline{CD}}{||\overline{CD}||} \Rightarrow a = ||a||\,u = \sqrt{2}\left(\frac{\langle 4 , 5 , -3\rangle}{\sqrt{50}}\right) \Rightarrow a = \frac{1}{5}\langle 4 , 5 , -3\rangle$$

Análogamente: $b = ||b||\left(\frac{\overline{DE}}{||\overline{DE}||}\right) = 5\left(\frac{\langle -4 , 0 , 3\rangle}{5}\right) \Rightarrow b = \langle -4 , 0 , 3\rangle$

$$c = ||c||\left(\frac{\overline{CA}}{||\overline{CA}||}\right) = 10\left(\frac{\langle 4 , 0 , -3\rangle}{5}\right) \Rightarrow c = \langle 8 , 0 , -6\rangle$$

Luego: $V = 5a + b - c = \langle 4 , 5 , -3\rangle + \langle -4 , 0 , 3\rangle - \langle 8 , 0 , -6\rangle = \langle -8 , 5 , 6\rangle$

$$\therefore \cos\theta = \frac{V \cdot W}{||V||\,||W||} = \frac{\langle -8 , 5 , 6\rangle \cdot \langle -1 , 2 , 0\rangle}{(\sqrt{64 + 25 + 36})(\sqrt{1 + 4})} = \frac{18}{25}$$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 24*

1. Dados los vectores $\mathbf{A} = \langle 5 , -2 , 1\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 6 , 1 , -4\rangle$ y $\mathbf{C} = \langle 1 , 2 , 1\rangle$, calcular el producto de las componentes de un vector $\mathbf{X}$, tal que : $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = 3$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{X} = 62$ y $\mathbf{C} \cdot \mathbf{X} = 15$.
2. Si $\mathbf{A} = \langle 3 , 3, -1\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle -1 , -2 , 4\rangle$, hallar un vector no nulo $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^3$, tal que : $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = 0$. (Hay infinitas soluciones)
3. Si $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{O}$, $\|\mathbf{A}\| = 3$, $\|\mathbf{B}\| = 4$, $\|\mathbf{C}\| = 6$, hallar $\mathbf{A} \cdot (2\mathbf{B} - \mathbf{A})$.
4. Sabiendo que : $\|\mathbf{A}\| = 3$, $\|\mathbf{B}\| = 1$, $\|\mathbf{C}\| = 4$ y $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{O}$, calcular la suma $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$.
5. Dado : $\|\mathbf{A}\| = 11$, $\|\mathbf{B}\| = 23$ y $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| = 30$, hallar $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|$
6. Dadas tres fuerza : $\mathbf{F}_1 = \langle 3 , -4 , 2\rangle$, $\mathbf{F}_2 = \langle 2 , 3 , -5\rangle$ y $\mathbf{F}_3 = \langle -3 , -2 , 4\rangle$, aplicadas a un punto , calcular el trabajo realizado por la resultante de estas fuerzas si el punto de aplicación se desplaza en su movimiento rectilíneo de la posición A(5 , 3 , -7) a la posición B(4 , -1 , -4). (Sugerencia : Trabajo , $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}$, $\mathbf{e} = \overline{AB}$).
7. Hallar todos los vectores que son ortogonales a cada uno de vectores $\mathbf{A} = \langle 1 , 3 , -2\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 2 , -4 , 1\rangle$.
8. Hallar los vectores unitarios que son normales al plano determinado por los puntos A(3 , -6 , 4) , B(2 , 1 , 1) y C(5 , 0 , -2).
9. Si $\mathbf{A} = \langle 3 , -1 , 2\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 1 , 1 , -4\rangle$, hallar dos vectores $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen las condiciones siguientes : $\mathbf{A} = \mathbf{C} + \mathbf{D}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{D} = 0$, $\mathbf{C} \parallel \mathbf{B}$.
10. El vector $\mathbf{A}$ es ortogonal a los vectores $\mathbf{B} = \langle 3 , 2 , -1\rangle$ y $\mathbf{C} = \langle -1 , 2 , 2\rangle$ y forma con el eje OY un ángulo obtuso. Halle el vector $\mathbf{A}$ sabiendo que su magnitud es $10\sqrt{5}$.
11. Para qué valores de m , los vectores $\mathbf{A} = \langle m , -2 , 1\rangle$ y $\mathbf{B} = 2m\mathbf{i} + m\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ son ortogonales.
12. El vector $\mathbf{X}$ es ortogonal a los vectores $\mathbf{A} = \langle 2 , 3 , -1\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 1 , -2 , 3\rangle$ y satisface la condición : $\mathbf{X} \cdot \langle 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}\rangle = -6$. Hállese sus coordenadas.
13. Hallar el ángulo que forman el vector $\mathbf{A}$ que va de P(4 , -9 , 3) a Q(3 , -5 , 2) con el vector $\mathbf{B}$ que va de R(2 , 4 , -7) a S(4 , -1 , -2).
14. Hallar el coseno del ángulo θ entre las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ de un paralelogramo si están dados tres de sus vértices : A(2 , 1 , 3) , B(5 , 2 , -1) y C(-3 , 3 , -3).
15. Hallar un vector unitario paralelo al plano XY y ortogonal al vector $\mathbf{A} = \langle 4 , -3 , 1\rangle$.
16. El vector $\mathbf{B}$ es ortogonal al vector $\mathbf{j} = \langle 0 , 1 , 0\rangle$ y al vector $\mathbf{A} = \langle -3 , 8 , 4\rangle$. Si además $\mathbf{B}$ forma un ángulo obtuso con el vector $\mathbf{k} = \langle 0 , 0 , 1\rangle$; hallar el vector $\mathbf{B}$ sabiendo que su norma es 10 unidades.

17. Los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ forman entre si un ángulo de 45° y $\|\mathbf{A}\| = 3$. Hallar $\|\mathbf{B}\|$ de manera que $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ forme con $\mathbf{A}$ un ángulo de 30°.
18. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son vectores no nulos y no paralelos , demostrar que $\dfrac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|} + \dfrac{\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|}$ forma ángulos iguales con $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.
19. Los vértices de un triángulo son A(-2 , 3 , -1) , B(1 , 1, 5) y C(-1 , 5 , -3). Hallar el vector en la dirección de la bisectriz del ángulo BAC , si la norma del vector es $2\sqrt{21}$.
20. El vector $\mathbf{X}$ es ortogonal a los vectores $\mathbf{A} = \langle 3 , 2 , 2\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 18 , -22 , -5\rangle$ y forma con el eje OY un ángulo obtuso. Hallar sus componentes sabiendo que $\|\mathbf{X}\| = 14$.
21. Dados los vectores $\mathbf{A} = \langle 3 , 5 , 2\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle -4 , 0 , 3\rangle$, tales que $\mathbf{A} = \mathbf{C} + \mathbf{D}$, siendo $\mathbf{C}$ paralelo a $\mathbf{B}$ y ortogonal a $\mathbf{D}$, hallar $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$.
22. Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$ tales que $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 1/4$, hallar $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|$.
23. Dados los vectores $\mathbf{a} = \langle 2 , -1 , 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1 , 2 , -1\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 1 , 1 , -2\rangle$ de $\mathbb{R}^3$; hallar los vectores $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ tales que : $\mathbf{d} = x\,\mathbf{b} + y\,\mathbf{c}$; $x , y \in \mathbb{R}$, $\mathbf{d}$ es unitario y además $\mathbf{d}$ es ortogonal al vector a.
24. El segmento de una recta , limitado por los puntos A(-1 , 8 , 3) y B(9 , -7 , -2) , está dividido en cinco partes iguales por los puntos C , D , E y F . Hallar el coseno del ángulo DOE , donde O es el origen de coordenadas.
25. En la Figura 4.14 se tiene un paralelepípedo de dimensiones : $\overline{OA} = 3$, $\overline{OB} = 4$ y $\overline{OC} = 5$. Hallar el ángulo que forman los vectores
$$\mathbf{V} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{e} \;\; \text{y} \;\; \mathbf{W} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$
26. En la Figura 4.15 , ABCDEF es un cubo. Hallar el coseno del ángulo formado por los vectores $\mathbf{S} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5$ y $\mathbf{V} = \langle -1 , 2 , 2\rangle$.

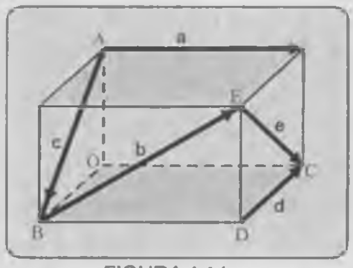


FIGURA 4.14

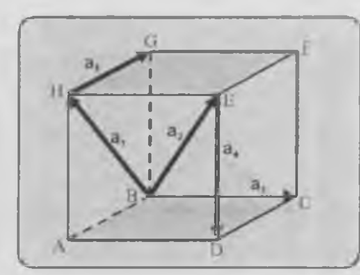


FIGURA 4.15

27. El vector **A** es ortogonal a los vectores **B** = ⟨2 , -1 , 3⟩ y **C** = ⟨1 , 0 , -2⟩ , y forma un ángulo agudo con el vector j = ⟨0 , 1 , 0⟩. Hallar el vector **A** sabiendo que su norma es $3\sqrt{6}$.

28. Sean los vectores **A** = ⟨1 , m , 5⟩ y **B** = ⟨-6m , m , 1⟩. Hallar m de modo que el ángulo que forman **A** y **B** sea, respectivamente , recto , agudo y obtuso , y las componentes de **A** y **B** cuando su producto escalar es mínimo.

29. Sean **A** y B vectores en $\mathbb{R}^3$ con V ≠ O y r una constante no nula. Demostrar que el vector $W = A - \frac{A \cdot B}{\|B\|^2} B$, es ortogonal a r B.

30. Los vectores **A** , **B** y **C** tienen longitudes iguales y forman dos a dos ángulos iguales. Hallar las coordenadas del vector **C** , si **A** = i + j , B = j + k

4.5 PROYECCION ORTOGONAL Y COMPONENTES

La definición de proyección ortogonal de un vector sobre otro vector , es análoga a aquella que se hace para dos vectores en $\mathbb{R}^2$. Esto es , si **A** y **B** $\in \mathbb{R}^3$, entonces:

$$\text{Proy}_B A = \left(\frac{A \cdot B}{\|B\|^2}\right) B \qquad (7)$$

En efecto , por la Figura 4.16 , hacemos **V** = Proy_B**A** y como **V** es múltiplo escalar de **B** podemos escribir

$$A = V + C = rB + C$$

Efectuando el producto escalar en ambos extremos con **B** , tenemos

$$A \cdot B = (rB + C) \cdot B = r\|B\|^2 + C \cdot B$$

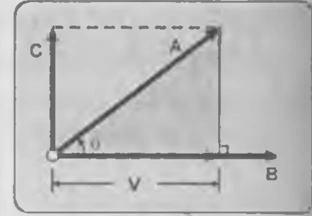


FIGURA 4.16

Dado que **C** y **B** son ortogonales , **C** • **B** = 0 , por lo que

$$A \cdot B = r\|B\|^2 \Rightarrow r = \frac{A \cdot B}{\|B\|^2} \text{ , y si } V = rB \Rightarrow V = \left(\frac{A \cdot B}{\|B\|^2}\right) B$$

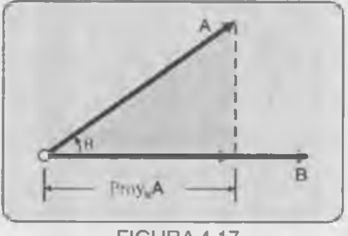


FIGURA 4.17

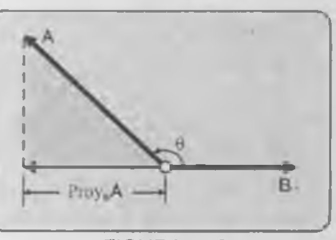


FIGURA 4.18

En particular consideremos las Figuras 4.17 y 4.18 , en las que aparecen las representaciones geométricas de los vectores no nulos **A** y **B** y la Proy_B**A**. Podemos observar lo siguiente.

1. El vector **B** y la Proy_B**A** son paralelos (colineales)
2. Cuando el ángulo θ es agudo , **B** y Proy_B**A** tienen el mismo sentido.
3. Cuando el ángulo θ es obtuso , **B** y Proy_B**A** tienen sentidos opuestos
4. Si **B** y Proy_B**A** son ortogonales , entonces Proy_B**A** = 0, o sea . **A** ⊥ **B**

PROPIEDADES.

1. $\text{Proy}_C(A + B) = \text{Proy}_C A + \text{Proy}_C B$
2. $\text{Proy}_B(rA) = r\,\text{Proy}_B A$
3. $\text{Proy}_{rB} A = \text{Proy}_B A$

La *componente o proyección escalar* de un vector **A** sobre otro vector **B** , denotado por Comp_B**A** , se expresa mediante su módulo y el ángulo θ que forma con el vector **B** , por la fórmula

$$\text{Comp}_B A = \|A\| \cos\theta$$

Si aplicamos la ecuación (5) a esta fórmula obtenemos el número real

$$\text{Comp}_B A = \frac{A \cdot B}{\|B\|} \qquad (8)$$

Ahora bien , la proyección de **A** sobre **B** puede escribirse como un múltiplo escalar de un vector unitario en la dirección de **B**. Esto es , de la fórmula (7)

$$\text{Proy}_B A = \left(\frac{A \cdot B}{\|B\|}\right) \frac{B}{\|B\|}$$

entonces la proyección ortogonal y la componente están relacionados por

$$\text{Proy}_B A = (\text{Comp}_B A) \frac{B}{\|B\|} \qquad (9)$$

En donde podemos observar lo siguiente

1. Si Comp_B**A** > 0 , entonces los vectores **B** y Proy_B**A** tienen el mismo sentido
2. Si Comp_B**A** < 0 , entonces **B** y Proy_B**A** tienen sentidos opuestos.
3. Si Comp_B**A** = 0 , entonces **B** ⊥ Proy_B**A** , o bien , **A** ⊥ **B**
4. Si en la ecuación (9) tomamos módulos a ambos extremos obtenemos

$$\|\text{Proy}_B A\| = |\text{Comp}_B A| \Leftrightarrow \text{Comp}_B A = \pm \|\text{Proy}_B A\|$$

De aquí que a la componente se le define también como la magnitud dirigida de la proyección.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Se dan los vectores **A** = ⟨-2 , 1 , 1⟩, **B** = ⟨1 , 5 , 0⟩ y **C** = 4i + 4j - 2k. Calcular $Comp_C(3A - 2B)$.

Solución. 3 **A** - 2 **B** = ⟨-6 , 3 , 3⟩ - ⟨2 , 10 , 0⟩ = ⟨-8 , -7 , 3⟩

Luego , haciendo uso de la fórmula (8) obtenemos

$$Comp_C(3A - 2B) = \frac{\langle -8, -7, 3\rangle \cdot \langle 4, 4, -2\rangle}{\sqrt{16+16+4}} = \frac{-32-28-6}{6} = -11$$ ■

Ejemplo 2 Sean los vectores **A** = ⟨5 , 4 , 1⟩ y **B** = ⟨-2 , 6 , 3⟩. Hallar un vector **C** que es ortogonal al vector **V** = ⟨2 , 1 , 0⟩ que satisface las condiciones : **A** • **C** = 1 y $Comp_B C = -2/7$

Solución. Sea **C** = ⟨x , y , z⟩ el vector buscado

Si $C \perp V \Rightarrow \langle x, y, z\rangle \cdot \langle 2, 1, 0\rangle = 0 \Leftrightarrow 2x + y = 0$ (1)

$A \cdot C = 1 \Rightarrow \langle 5, 4, 1\rangle \cdot \langle x, y, z\rangle = 1 \Leftrightarrow 5x + 4y + z = 1$ (2)

$$Comp_B C = -\frac{2}{7} \Rightarrow \frac{\langle x, y, z\rangle \cdot \langle -2, 6, 3\rangle}{\sqrt{4+36+9}} = -\frac{2}{7} \Leftrightarrow -2x + 6y + 3z = -2 \quad (3)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1) , (2) y (3) , obtenemos : x = 1 , y = -2 , z = 4

∴ **C** = ⟨1 , -2 , 4⟩ ■

Ejemplo 3 Calcular la distancia del punto P(3 , 2 , 1) a la recta que pasa por los puntos A(-3 , -6 , -3) y B(1 , 2 , 9)

Solución. La Figura 4.19 muestra al punto P y la recta $\mathscr{L}$ que pasa por A y B. El punto H es el pie de la perpendicular a la recta $\mathscr{L}$ bajada desde P. Si d es la distancia $\|\overline{PH}\|$, entonces por el teorema de Pitágoras

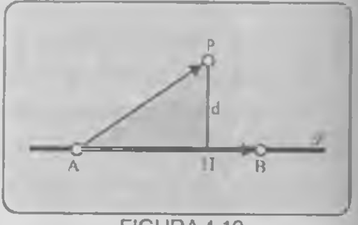


FIGURA 4.19

$$d = \sqrt{\|\overline{AP}\|^2 - |\overline{AH}|^2} \quad (1)$$

$\overline{AP}$ = **P** - **A** = ⟨3 , 2 , 1⟩ - ⟨-3 , -6 , -3⟩ = ⟨6 , 8 , 4⟩

$\Rightarrow \|\overline{AP}\| = 2\sqrt{9+16+4} = 2\sqrt{29}$ (2)

$\overline{AB}$ = **B** - **A** = ⟨1 , 2 , 9⟩ - ⟨-3 , -6 , -3⟩ = 4⟨1 , 2 , 3⟩

$$|\overline{AH}| = Comp_{\overline{AB}}\overline{AP} = \frac{\overline{AP}\cdot\overline{AB}}{\|\overline{AB}\|} \Rightarrow |\overline{AH}| = \frac{2\langle 3,4,2\rangle \cdot 4\langle 1,2,3\rangle}{4\sqrt{1+4+9}} = \frac{34}{\sqrt{14}} \quad (3)$$

Si se sustituye los valores de (2) y (3) en (1) resulta

$$d = \sqrt{(2\sqrt{29})^2 - \left(\frac{34}{\sqrt{14}}\right)^2} = \frac{3}{7}\sqrt{182}$$ ■

Ejemplo 4 Se dan los vértices de un triángulo : A(-1 , -2 , 4) , B(-4 , -1 , 2) y C(-5 , 6 , -4). $\overline{BD}$ es la altura del triángulo trazado por el vértice B. Hállese las coordenadas del punto D.

Solución. En el ΔADB : $\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD}$

$\Rightarrow \overline{DB} = \overline{AB} - Proy_{\overline{AC}}\overline{AB}$ (1)

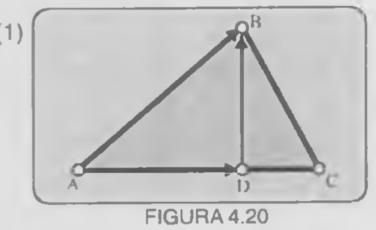


FIGURA 4.20

$\overline{AB}$ = **B** - **A** = ⟨-4 , -1 , 2⟩ - ⟨-1 , -2 , 4⟩ = ⟨-3 , 1 , -2⟩

$\overline{AC}$ = **C** - **A** = ⟨-5 , 6 , -4⟩ - ⟨-1 , -2 , 4⟩ = 4⟨-1 , 2 , -2⟩

$$Proy_{\overline{BC}}\overline{AB} = \frac{\langle -3,1,-2\rangle \cdot \langle -1,2,-2\rangle}{(\sqrt{1+4+4})^2}\langle -1,2,-2\rangle$$

de donde obtenemos : $Proy_{\overline{AC}}AB = \langle -1, 2, -2\rangle$

Luego , en (1) : $\overline{DB}$ = ⟨-3 , 1 , -2⟩ - ⟨-1 , 2 , -2⟩ = ⟨-2 , -1 , 0⟩

∴ **D** = **B** - $\overline{DB}$ = ⟨-4 , -1 , 2⟩ - ⟨-2 , -1 , 0⟩ = ⟨-2 , 0 , 2⟩ ■

Ejemplo 5 Los vértices de un triángulo son A(2 , -1 , -3) , B(1 , 2 , -4) y C(3 , -1 , -2). Hallar el vector **V** que es colineal a la altura bajada del vértice A al lado opuesto si se sabe que $\|V\| = 2\sqrt{17}$

Solución. En el ΔBHA : $\overline{AH} = \overline{BH} - \overline{BA}$

$\Rightarrow \overline{AH} = Proy_{\overline{BC}}\overline{BA} - \overline{BA}$ (1)

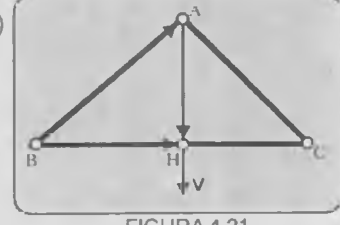


FIGURA 4.21

$\overline{BA}$ = **A** - **B** = ⟨2 , -1 , -3⟩ - ⟨1 , 2 , -4⟩ = ⟨1 , -3 , 1⟩

$\overline{BC}$ = **C** - **B** = ⟨3 , -1 , -2⟩ - ⟨1 , 2 , -4⟩ = ⟨2 , -3 , 2⟩

$$Proy_{\overline{BC}}\overline{BA} = \frac{\langle 1,-3,1\rangle \cdot \langle 2,-3,2\rangle}{(\sqrt{4+9+4})^2}\langle 2,-3,2\rangle = \frac{13}{17}\langle 2,-3,2\rangle$$

Entonces , en (1) se tiene : $\overline{AH} = \frac{13}{17}\langle 2,-3,2\rangle - \langle 1,-3,1\rangle = \frac{3}{17}\langle 3,4,3\rangle$

Un vector unitario en la dirección de $\overline{AH}$ es : $\boldsymbol{u} = \frac{\langle 3,4,3\rangle}{\sqrt{34}}$

Como **V** es colineal con $\overline{AH}$, entonces : $\mathbf{V} = ||\mathbf{V}||\, \mathbf{u}$

$$\therefore \ \mathbf{V} = (2\sqrt{17})\frac{\langle 3, 4, 3\rangle}{\sqrt{34}} = \sqrt{2}\langle 3, 4, 3\rangle$$ ■

Ejemplo 6 Dado el triángulo A(6 , 8 , 0) , B(-5 , 7, -10) y C(7 , -5 , 14) ; hallar:
a) El pie de la altura que cae sobre el lado $\overline{BC}$.
b) Las coordenadas de un punto D, de manera que ABCD sea un trapecio isósceles.
c) El área del trapecio.

Solución. En el ΔBHA : $\overline{HA} = \overline{BA} - \overline{BH}$

$$\Rightarrow \overline{HA} = \overline{BA} - \text{Proy}_{\overline{BC}}\overline{BA} \quad (1)$$

$\overline{BA} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \langle 6, 8, 0\rangle - \langle -5, 7, -10\rangle = \langle 11, 1, 10\rangle$

$\overline{BC} = \mathbf{C} - \mathbf{B} = \langle 7, -5, 14\rangle - \langle -5, 7, -10\rangle = 12\langle 1, -1, 2\rangle$

$$\text{Proy}_{\overline{BC}}\overline{BA} = \frac{\langle 11, 1, 10\rangle \cdot \langle 1, -1, 2\rangle}{(\sqrt{1+1+4})^2}\langle 1, -1, 2\rangle$$

$$= 5\langle 1, -1, 2\rangle$$

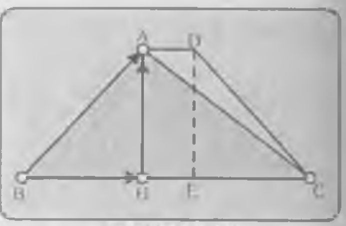


FIGURA 4.22

a) En (1) se tiene : $\overline{HA} = \langle 11, 1, 10\rangle - \langle 5, -5, 10\rangle = \langle 6, 6, 0\rangle$

$$\therefore \ \mathbf{H} = \mathbf{A} - \langle 6, 6, 0\rangle = \langle 6, 8, 0\rangle - \langle 6, 6, 0\rangle = \langle 0, 2, 0\rangle$$

b) $||\overline{BC}|| = 12\sqrt{1+1+4} = 12\sqrt{6}$; $||\overline{BH}|| = ||\text{Proy}_{\overline{BC}}\overline{BA}|| = 5\sqrt{6}$

Como el cuadrilátero ABCD es un trapecio isósceles , $||\overline{BH}|| = ||\overline{EC}||$, entonces

$$||\overline{AD}|| = ||\overline{BC}|| - 2||\overline{BH}|| = 12\sqrt{6} - 10\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

Un vector unitario en la dirección de $\overline{BC}$ es : $\mathbf{u} = \dfrac{\langle 1, -1, 2\rangle}{\sqrt{6}}$

Si $\overline{AD} \,||\, \overline{BC} \Rightarrow \overline{AD} = ||\overline{AD}||\,\mathbf{u} = 2\sqrt{6}\left(\dfrac{\langle 1, -1, 2\rangle}{\sqrt{6}}\right) = \langle 2, -2, 4\rangle$

$$\therefore \ \mathbf{D} = \mathbf{A} + \langle 2, -2, 4\rangle = \langle 6, 8, 0\rangle + \langle 2, -2, 4\rangle = \langle 8, 6, 4\rangle$$

c) Area del trapecio : $S = \frac{1}{2}(||\overline{BC}|| + ||\overline{AD}||)\,||\overline{HA}||$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}(12\sqrt{6} + 2\sqrt{6})\, 6\sqrt{2} = 84\sqrt{3}\ u^2$$ ■

EJERCICIOS : Grupo 25

1. Sean los puntos A(2 , 3 , 1) , B(5 , -9 , 4) y C(6 , -7 , 2). Si P divide al segmento $\overline{AB}$ en la razón $\overline{AP} : \overline{PB} = 1 : 2$, hallar la norma de la proyección $\overline{AP}$ sobre el vector $\overline{BC}$.
2. Si $\mathbf{A} = \langle 4, -2, 1\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 2, -1, 4\rangle$, hallar la componente del vector $\mathbf{V} = 3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$ sobre el vector $\mathbf{W} = 2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$.
3. Si $\mathbf{A} = \langle 2, 3, 1\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 2, 1, -3\rangle$, calcular la proyección del vector $\mathbf{V} = 3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$ sobre el vector $\mathbf{W} = \mathbf{B} - 3\mathbf{A}$.
4. Hallar la componente del vector $\mathbf{V} = \langle 4, -3, 2\rangle$ sobre el eje que forma con los ejes coordenados dos ángulos agudos iguales.
5. Hallar la componente del vector $\mathbf{V} = \langle\sqrt{2}, -3, -5\rangle$ sobre el eje que forma con los ejes coordenados OX y OZ los ángulos $\alpha = 45°$, $\gamma = 60°$ y con el OY un ángulo agudo β.
6. Se dan los puntos A(3 , -4 . -2) , B(2 , 5, -2). Hallar la componente del vector $\overline{AB}$ sobre el eje que forma con los ejes coordenados OX y OY los ángulos $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$ y con el eje OZ un ángulo obtuso γ.
7. Calcular la distancia del punto P(2 , -1 , -4) a la recta que pasa por los puntos A(3 , -2 , 2) y B(-9 , -6 , 6).
8. Dado los vectores $\mathbf{A} = \langle 1, 2, 3\rangle$. $\mathbf{B} = \langle 2, 1, -3\rangle$ y $\mathbf{C} = \langle 3, -4, 2\rangle$; hallar todos los vectores de norma $\sqrt{139}$ paralelos al vector $\text{Proy}_{\mathbf{A}}\mathbf{C} + \text{Proy}_{\mathbf{B}}\mathbf{C}$.
9. Hallar $\text{Comp}_{2\mathbf{B}}\mathbf{A}$, si $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{O}$ y $||\mathbf{A}|| = 3$, $||\mathbf{B}|| = 6$, $||\mathbf{C}|| = 7$
10. Los vértices de un triángulo son los puntos A(2 , 3, -1) , B(5 , 1 , 1) y C(6 , 4 , -2). Hallar un vector **V** que es colineal a la altura bajada del vértice B al lado opuesto si se sabe , además que $||\mathbf{V}|| = 6$.
11. Se dan los vértices del triángulo : A(-1 , 3 , 4) , B(-5 , 6 . -4) y C(1 , 2 , 6) ; $\overline{BD}$ es la altura del triángulo trazada por el vértice B. Hallar las coordenadas del punto D.
12. Los puntos A(2 , 7 , 0) , B(0 . 4 , 4) y C(1 , 1 , 2) son los vértices de un trapecio isósceles ABCD tal que $\overline{AB}$ es una de sus bases. Hallar :
    a) El pie de la altura $\overline{CH}$ que cae sobre $\overline{AB}$. b) El vértice D. c) El área del trapecio.

4.6 COMBINACION LINEAL DE VECTORES EN R^3

Sean los vectores no paralelos y no nulos, **A**, **B** y **C** dados en un sistema tridimensional. Si gráficamente un vector **V** del espacio podemos expresarlo como una suma de componentes vectoriales r**A**, s**B** y t**C**, que son múltiplos escalares de **A**, **B** y **C**, entonces se dice que el vector **V** se ha expresado como una combinación lineal de los vectores **A**, **B** y **C** (Figura 4.23). Es decir

$$V = rA + sB + tC$$

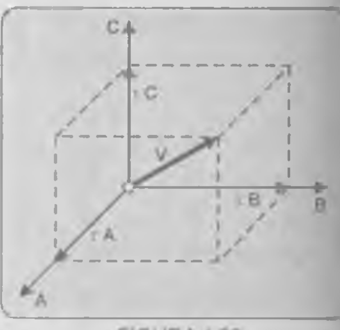


FIGURA 4.23

Ahora bien, todo vector $V \in R^3$ se puede expresar como una suma de múltiplos escalares de versores básicos : $i = \langle 1, 0, 0\rangle$, $j = \langle 0, 1, 0\rangle$ y $k = \langle 0, 0, 1\rangle$.

En efecto sean $\langle x, y, z\rangle$ las componentes del vector **V**, entonces podemos escribir :

$$V = \langle x, y, z\rangle = \langle x, 0, 0\rangle + \langle 0, y, 0\rangle + \langle 0, 0, z\rangle$$
$$= x\langle 1, 0, 0\rangle + y\langle 0, 1, 0\rangle + z\langle 0, 0, 1\rangle$$
$$\Rightarrow V = xi + yj + zk$$

DEFINICION 4.1 *Dependencia e independencia lineal de vectores en* R^3

Un sistema de vectores {**A**, **B**, **C**} se llama *linealmente dependiente*, cuando, y sólo cuando, los vectores **A**, **B** y **C** son *coplanares*, es decir, son paralelos o coincidentes a cierto plano (Figura 4.24). Se dice que tres vectores **A**, **B** y $C \in R^3$, son *linealmente independientes*, si y sólo si, **A**, **B** y **C** no son coplanares (Figura 4.25)

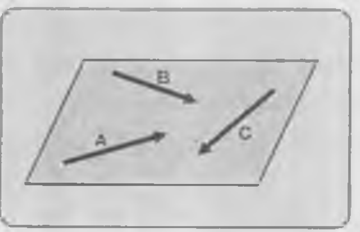


FIGURA 4.24

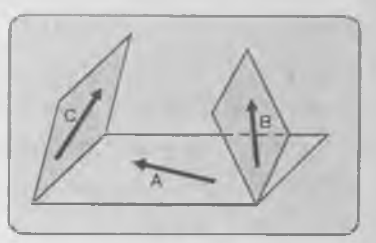


FIGURA 4.25

Criterio de Independencia Lineal

Tres vectores **A**, **B** y $C \in R^3$, son linealmente independientes si se verifican las condiciones siguientes

$$rA + sB + tC = 0 \Leftrightarrow r = 0, s = 0, t = 0 \quad (8)$$

DEFINICION 4.2 *Base y coordenadas de un vector en* R^3

Una terna ordenada de vectores no coplanares **A**, **B** y **C** lleva el nombre de *base* en el conjunto de todos los vectores geométricos. Sabemos que todo vector geométrico **V** puede ser representado univocamente en la forma

$$V = rA + sB + tC \quad (9)$$

los números r, s y t se denominan *coordenadas* del vector **V** en la base $\beta = \{A, B, C\}$. Motivo por el cual a la notación **(9)** se le denomina también descomposición del vector **V** según la base β.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Sea dado la terna de vectores no coplanares $A_1 = \langle 1, -2, 0\rangle$, $A_2 = \langle 1, 2, -2\rangle$ y $A_3 = \langle 3, 7, -5\rangle$. Calcúlese las coordenadas del vector $A = 2i - 3j + k$ en la base $\beta = \{A_1, A_2, A_3\}$ y escribir la descomposición correspondiente según la base.

Solución. Si A_1, A_2 y A_3 son vectores no coplanares, entonces existen r, s, y t ∈ **R**, tales que : $A = rA_1 + sA_2 + tA_3$

$$\Rightarrow \langle 2, -3, 1\rangle = r\langle 1, -2, 0\rangle + s\langle 1, 2, -2\rangle + t\langle 3, 7, -5\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = r + s + 3t \\ -3 = -2r + 2s + 7t \\ 1 = -2s - 5t \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos : r = 2, s = -3 y t = 1

Luego, el vector **A** en la nueva base se escribe como $\langle 2, -3, 1\rangle$ o equivalentemente:

$$A = 2A_1 - 3A_2 + A_3$$ ■

Ejemplo 2 En el tetraedro OABC la mediana $\overline{AM}$ de la arista ABC se

divide por el punto P en la razón $\overline{AP} : \overline{PM} = 3 : 7$. Hallar las coordenadas del vector $\overline{OP}$ en la base de las aristas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$.

Solución. Si $\frac{AP}{PM} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{3}{10}$

En el triángulo OAP , se tiene :

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP} \Rightarrow \overline{OP} = \overline{OA} + \frac{3}{10}\overline{AM} \qquad (1)$$

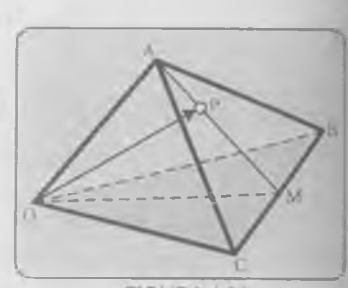


FIGURA 4.26

Pero , $\overline{AM} = \overline{OM} - \overline{OA}$

y como M es punto medio de $\overline{BC}$, entonces

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OC}) - \overline{OA}$$

Al sustituir en (1) obtenemos

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{2}\overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{OC} - \overline{OA}\right)$$

$$= \frac{7}{10}\,\overline{OA} + \frac{3}{20}\overline{OB} + \frac{3}{20}\overline{OC}$$

Por consiguiente , las coordenadas de $\overline{OP}$ en la base $\beta = \{\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}\}$ son $\langle 7/10 , 3/20 , 3/20\rangle$ ■

Ejemplo 3 Sean dados los vértices de un triángulo, A(1 , -1 , -3), B(2 , 1, -2) y C(-5 , 2 , -6). Calcular la longitud de la bisectriz de su ángulo interior en el vértice A.

Solución. Sean ***u*** y ***v*** los vectores unitarios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente

Como $\overline{AE} \parallel (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$, entonces $\exists\, t > 0$, tal que

$$\overline{AE} = t(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = t\left(\frac{\overline{AB}}{\|\overline{AB}\|} + \frac{\overline{AC}}{\|\overline{AC}\|}\right) \qquad (1)$$

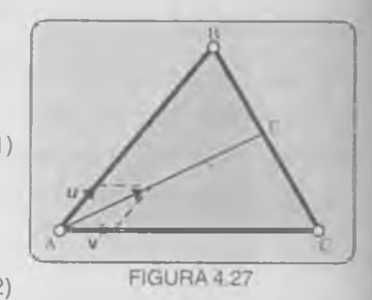


FIGURA 4.27

Por otro lado : $\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{AC} + r\overline{CB}$

$= \overline{AC} + r(\overline{AB} - \overline{AC})$

$= r\overline{AB} + (1 - r)\overline{AC} , r > 0 \qquad (2)$

Las ecuaciones (1) y (2) representan en si dos descomposiciones del vector $\overline{AE}$ según la base formada por los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Siendo única la descomposición de un vector según la base, tenemos

$$r = \frac{t}{\|\overline{AB}\|} \quad , \quad 1 - r = \frac{t}{\|\overline{AC}\|}$$

Resolviendo el sistema obtenemos : $t = \frac{\|\overline{AB}\|\ \|\overline{AC}\|}{\|\overline{AB}\| + \|\overline{AC}\|}$

$$\text{Luego , en (1) : } \overline{AE} = \left(\frac{\|\overline{AC}\|}{\|\overline{AB}\| + \|\overline{AC}\|}\right)\overline{AB} + \left(\frac{\|\overline{AB}\|}{\|\overline{AB}\| + \|\overline{AC}\|}\right)\overline{AC} \qquad (3)$$

Si $\overline{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A} \Rightarrow \overline{AB} = \langle 2 , 1 , -2\rangle - \langle 1 , -1 , -3\rangle = \langle 1 , 2 , 1\rangle \Rightarrow \|\overline{AB}\| = \sqrt{6}$

$\overline{AC} = \mathbf{C} - \mathbf{A} \Rightarrow \overline{AC} = \langle -5 , 2 , -6\rangle - \langle 1 , -1 , -3\rangle = \langle -6 , 3 , -3\rangle \Rightarrow \|\overline{AC}\| = 3\sqrt{6}$

Sustituyendo en (3) se obtiene

$$\overline{AE} = \frac{3}{4}\langle 1 , 2 , 1\rangle + \frac{1}{4}\langle -6 , 3 , -3\rangle = \frac{3}{4}\langle -1 , 3 , 0\rangle \Rightarrow \|\overline{AE}\| = \frac{3}{4}\sqrt{10}$$ ■

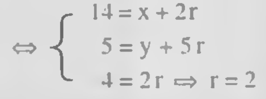
Ejemplo 4 Sean dados los puntos A(2 , 5 , 2) y B(14 , 5 , 4) ; C es el punto de intersección del plano coordenado OXY con una recta trazada por el punto B paralelamente a la recta $\overline{OA}$. Hallar las coordenadas de C.

Solución. Sea el punto C(x , y , 0)

En el triángulo OCB se tiene :

$\overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}) + r\overline{OA}$

$\Rightarrow \langle 14 , 5 , 4\rangle = x\langle 1 , 0 , 0\rangle + y\langle 0 , 1 , 0\rangle + r\langle 2 , 5 , 2\rangle$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14 = x + 2r \\ 5 = y + 5r \\ 4 = 2r \Rightarrow r = 2 \end{cases}$$

de donde obtenemos : x = 10 , y = -5 $\Rightarrow$ C(10 , -5 , 0) ■

FIGURA 4.28

Ejemplo 5 Se dan los vectores $\mathbf{A} = \langle -2 , 0 , 1\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 1 , -2 , 0\rangle$ y $\mathbf{C} = \langle 1 , 1 , 1\rangle$. Hallar la proyección ortogonal del vector **A** en el plano de los vectores **B** y **C**.

Solución. Trasladamos los vectores **A** , **B** y **C** a un origen común , tal como se indica en la Figura 4.29.

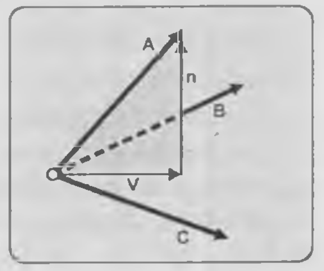


FIGURA 4.29

Sea $\mathbf{V} = \text{Proy}_{\mathbf{B}\,\mathbf{C}}\mathbf{A}$ (Proy. de A en el plano de **B** y **C**)

Como los vectores **B** y **C** son linealmente independientes , constituyen una base del vector **V** , esto es $\exists\, r , t$ tales que

$$\mathbf{V} = r\,\mathbf{B} + t\,\mathbf{C} = r\langle 1 , -2 , 0\rangle + t\langle 1 , 1 , 1\rangle \qquad (1)$$

Además , si **V** está en el plano de **B** y **C** , entonces $\mathbf{n} = \mathbf{A} - \mathbf{V}$ será ortogonal a **B** y **C** , es decir : $(\mathbf{A} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{B} = 0$ y $(\mathbf{A} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{C} = 0$

$$\mathbf{A} - \mathbf{V} = \langle -2, 1, 0\rangle - r\langle 1, -2, 0\rangle - t\langle 1, 1, 1\rangle = \langle -2-r-t, 2r-t, 1-t\rangle$$

$$\Rightarrow \langle -2-r-t, 2r-t, 1-t\rangle \cdot \langle 1, -2, 0\rangle = 0 \Leftrightarrow t - 5r - 2 = 0 \qquad (2)$$

$$\langle -2-r-t, 2r-t, 1-t\rangle \cdot \langle 1, 1, 1\rangle = 0 \Leftrightarrow 3t - r + 1 = 0 \qquad (3)$$

Resolviendo el sistema (2) y (3) obtenemos : $r = t = -1/2$

Por lo tanto , en (1) : $\mathbf{V} = \langle -1, 1/2, -1/2\rangle$ ∎

EJERCICIOS : *Grupo 26*

1.- Demuéstrese que para cualesquiera vectores dados **A** , **B** y **C** , los vectores **A** + **C** , **B** + **C** y **C** - **A** son coplanares.

2. Sean dados tres vectores no coplanares **A** , **B** y **C**. Demuéstrese que los vectores **A** + 2**B** - **C** , 3**A** - **B** + **C** , -**A** + 5**B** - 3**C** son coplanares.

3. Sean dados tres vectores no coplanares **A** , **B** y **C**. Hallar los valores de λ , para los cuales los vectores λ**A** + **B** + **C** , **A** + λ**B** + **C** , **A** + **B** + λ**C** , son coplanares.

4. Se dan tres vectores : **A** = ⟨3 , -2 , 1⟩ , **B** = ⟨-1 , 1 , -2⟩ y **C** = ⟨2 , 1, -3⟩. Hallar la descomposición del vector **D** = ⟨11 , -6 , 5⟩ en la base β = {**A** , **B** , **C**}.

5. Sean cuatro vectores: **A** = ⟨2 , 1, 0⟩ , **B** = ⟨1 , -1 , 2⟩ , **C** = ⟨2 , 2, -1⟩ y **D** = ⟨3 , 7, -7⟩. Hallar la descomposición de cada uno de estos vectores tomando por base los otros tres.

6. Fuera del plano del paralelogramo ABCD se ha elegido un punto O. En la base de los vectores $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ hállese las coordenadas
   a) del vector $\overline{OM}$, donde M es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo.
   b) del vector $\overline{OK}$, donde K es el punto medio del lado $\overline{AD}$.

7. Si B(6 , -3 , -2) y C(-2 , 3 , 6) son puntos de $\mathbf{R}^3$, hallar un vector **V** que biseca el ángulo formado por los vectores $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$, donde O es el origen de coordenadas. (Guía: Ejemplo 3).

8. Sean dados los puntos A(1 , 2, 3) , B(2 , -2 , 1) , C(3 , 0 , 3) y D(16 , 10 , 18). E es un punto de intersección del plano OAB (O es el origen de coordenadas) con una recta trazada por el punto D paralelamente a la recta $\overline{OC}$. Hallar las coordenadas del punto E. (Sugerencia : Desarróllese el vector $\overline{OD}$ según una base formada de los vectores $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$).

9. Sea dada la terna de vectores no coplanares $\mathbf{A}_1$ = ⟨1 , 0 , 0⟩ , $\mathbf{A}_2$ = ⟨1 , 1 , 0⟩ y $\mathbf{A}_3$ = ⟨1 , 1 , 1⟩. Calcular las coordenadas del vector **A** = -2 **i** - **k** en la base β = {$\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$} y escribir la descomposición correspondiente según la base.

10. Se dan los vectores **A** = ⟨1 , -3 , 0⟩ , **B** = ⟨1 , -1 , 2⟩ y **C** = ⟨0 , 1 , -2⟩. Hallar la proyección ortogonal del vector **A** en el plano de los vectores **B** y **C**.

11. Si **A** = ⟨1 , 3 , 1⟩ y **B** = ⟨2 , 0 , -1⟩ , determinar un vector **C** tal que {**A** + **B** , **A** - **B** , **C**} sea una base de $\mathbf{R}^3$.

12. Se dan los vectores **A** = ⟨1 , -2 , 0⟩ , **B** = ⟨0 , 1 , 2⟩ y **C** = ⟨1 , 0 , 1⟩. Hállese la proyección ortogonal del vector **A** en el plano de los vectores **B** y **C**

4.7 EL PRODUCTO VECTORIAL

En las aplicaciones de los vectores en el espacio es frecuentemente necesario construir un vector no nulo que sea ortogonal a dos vectores dados **A** y **B**. En esta sección se estudia un producto que nos conduce a dicho vector. Se le llama ***producto vectorial*** o ***producto cruz*** , se le denota por **A** x **B** y su definición que se da a continuación es puramente algebraica.

DEFINICION 4.2 *El producto vectorial*

Sean **A** y **B** vectores en $\mathbf{R}^3$ tales que

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

entonces el *producto vectorial* de A y B es el *vector* que se define por

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} \qquad (10)$$

Por ejemplo , si **A** = ⟨2 , -1 , 3⟩ ⇒ $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_3 = 3$

y **B** = ⟨3 , 1 , -1⟩ ⇒ $b_1 = 3$, $b_2 = 1$, $b_3 = -1$

Luego , por la fórmula (10) se tiene

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = [(-1)(-1) - (3)(1)]\,\mathbf{i} - [(2)(-1) - (3)(3)]\,\mathbf{j} + [(2)(1) - (-1)(3)]\,\mathbf{k}$$
$$= (1 - 3)\,\mathbf{i} - (-2 - 9)\,\mathbf{j} + (2 + 3)\,\mathbf{k}$$
$$= -2\,\mathbf{i} + 11\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$$

OBSERVACION 4.3 Como resulta complicado memorizar la fórmula (10) , se recomienda el uso de determinantes de segundo orden y matrices de 2 x 3 ; temas que serán estudiadas en capítulos posteriores. Pero dada la utilidad de su empleo para el cálculo del producto vectorial , es conveniente introducir las siguientes ideas

1. $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - a_3b_2$

$-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = -(a_1b_3 - a_3b_1)$

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

2. Formar la matriz de 2 x 3 : $M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$

donde los elementos de la primera fila son las componentes del vector **A** y los elementos de la segunda fila son las componentes del vector **B**. Entonces , el producto vectorial **A x B** queda definido por

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \left\langle \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\rangle \quad (11)$$

en la que cada componente es el valor de un determinante de segundo orden, que resulta de eliminar en la matriz M la primera , segunda y tercera columna respectivamente.

Ejemplo 1. Dados **A** = ⟨2 , -1 , 3⟩ y **B** = ⟨3 , 1 , -1⟩ , hallar
a) **A x B** , b) **B x A** , c) **A x A**

Solución. a) Formamos la matriz : $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Luego , por la fórmula (11) se tiene :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \left\langle \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right\rangle$$

$= \langle 1 - 3 , -(-2 - 9) , 2 - (-3) \rangle$
$= \langle -2 , 11 , 5 \rangle$

b) Formamos la matriz : $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{B} \times \mathbf{A} = \left\langle \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right\rangle$$

$= \langle (3 - 1) , -(9 + 2) , (-3 - 2) \rangle$
$= \langle 2 , -11 , -5 \rangle$

Nótese que se obtuvo el mismo resultado de la parte a) pero con signo cambiado , esto es , **A x B = -(B x A)**

c) Formamos la matriz : $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{A} \times \mathbf{A} = \left\langle \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right\rangle$$

$= \langle 0 , 0 , 0 \rangle = \mathbf{O}$

Los resultados de este ejemplo sugieren algunas propiedades algebraicas del producto vectorial , que entre otras , se anuncian en el teorema siguiente.

TEOREMA 4.2 *Propiedades algebraicas del producto vectorial*

Si **A** , **B** y **C** son tres vectores del espacio y $r \in \mathbb{R}$ es un escalar, entonces se verifican las propiedades siguientes.

PV .1 :	**A x (B + C) = (A x B) + (A x C)**	Distributividad por la izquierda
PV .2 :	**(A + B) x C = (A x C) + (B x C)**	Distributividad por la derecha
PV .3 :	r(**A x B**) = (r**A**) x **B** = **A** x (r**B**)	Asociatividad escalar
PV .4 :	**A x B = - (B x A)**	No conmutatividad
PV .5 :	**A x O = O x A = O**	
PV .6 :	**A x A = O**	
PV .7 :	**A x (B x C) ≠ (A x B) x C**	No asociatividad vectorial
PV .8 :	**A x (B x C) = (A • C) B - (A • B) C**	
PV .9 :	$\|\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|\|^2 = \|\|\mathbf{A}\|\|^2 \|\|\mathbf{B}\|\|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$	(Identidad de Lagrange)

Demostración. Se demostrará la novena propiedad. Se dejan como ejercicio el resto de las demostraciones.

En efecto , elevando al cuadrado la norma del vector de la Definición 4.2 se tiene :

$$||\mathbf{A} \times \mathbf{B}||^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \quad (1)$$

y del producto interno $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ se sigue que

$$||\mathbf{A}||^2 \, ||\mathbf{B}||^2 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \quad (2)$$

Efectuando las operaciones que aparecen en los segundos miembros de (1) y (2) comprobaremos que son idénticas , por tanto

$$||\mathbf{A} \times \mathbf{B}||^2 = ||\mathbf{A}||^2 \, ||\mathbf{B}||^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$$

TEOREMA 4.3 *Propiedades geométricas del producto vectorial*

Si **A** y **B** son vectores no nulos de R^3 y θ es el ángulo entre **A** y **B**, entonces se verifican las propiedades siguientes

1. **A** x **B** es ortogonal simultáneamente a los vectores **A** y **B**
2. $\|A \times B\| = \|A\| \, \|B\| \operatorname{Sen}\theta$
3. $A \times B = 0 \Leftrightarrow A \parallel B$
4. $\|A \times B\|$ = Area del paralelogramo que tiene a **A** y a **B** como lados adyacentes.

Demostración. Demostraremos la primera, segunda y cuarta propiedades y se deja la tercera como ejercicio.

1. Si $A = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $B = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, entonces

$$A \cdot (A \times B) = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

El segundo miembro es el desarrollo de un determinante de tercer orden

$$\Rightarrow A \cdot (A \times B) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Como el determinante tiene dos filas iguales se sigue que :

$$A \cdot (A \times B) = 0 \Rightarrow (A \times B) \perp A$$

Análogamente se demuestra que $B \cdot (A \times B) = 0 \Rightarrow (A \times B) \perp B$

2. Por la identidad de Lagrange (PV.9) sabemos que

$$\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2 \qquad (1)$$

Si θ es el ángulo entre **A** y **B**, entonces

$$A \cdot B = \|A\| \, \|B\| \operatorname{Cos}\theta$$

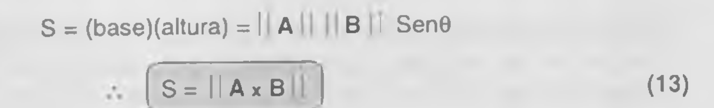
Luego, en (1) se tiene :

$$\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - \|A\|^2 \|B\|^2 \operatorname{Cos}^2\theta$$
$$= \|A\|^2 \|B\|^2 (1 - \operatorname{Cos}^2\theta)$$
$$= \|A\|^2 \|B\|^2 \operatorname{Sen}^2\theta$$

$$\therefore \boxed{\|A \times B\| = \|A\| \, \|B\| \operatorname{Sen}\theta} \qquad (12)$$

FIGURA 4.30

4. Para demostrar esta propiedad, empleamos la Figura 4.30 que nos muestra un paralelogramo que tiene como lados adyacentes a los vectores **A** y **B**. Como $h = \|B\| \operatorname{Sen}\theta$ y el área del paralelogramo es



$$S = (\text{base})(\text{altura}) = \|A\| \, \|B\| \operatorname{Sen}\theta$$

$$\therefore \boxed{S = \|A \times B\|} \qquad (13)$$

OBSERVACIONES 4.4

1. La orientación del vector **A** x **B** en relación a las direcciones de los vectores **A** y **B** se basa en su comparación con los vectores unitarios **i**, **j** y **k** = **i** x **j** de un sistema cartesiano tridimensional como se muestra en la Figura 4.31. (Se debe destacar que **A** y **B** no son necesariamente perpendiculares). Los tres vectores **A**, **B** y **A** x **B** forman un *sistema positivo o derecho* (dextrógiro), mientras que los tres vectores **A**, **B** y **B** x **A** forman un *sistema negativo o izquierdo* (levógiro)

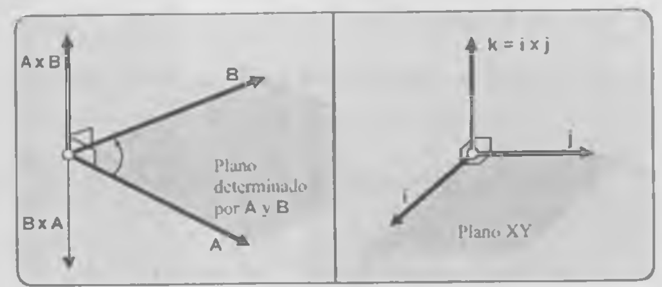


FIGURA 4.31

2. Sabemos que todo vector $V \in R^3$ se puede expresar como una suma de múltiplos escalares de vectores unitarios ortogonales, esto es

$$V = \langle x, y, z\rangle = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

Entonces para dos vectores $A = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $B = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, el vector **A** x **B** definido en la fórmula (11) se puede escribir de la forma

$$\boxed{A \times B = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}} \qquad (14)$$

3. Usando el sistema positivo (o el de la matriz del producto vectorial), podemos comprobar cada uno de los resultados siguientes

i x **j** = **k**	**j** x **i** = -**k**	**i** x **i** = 0
j x **k** = **i**	**k** x **j** = -**i**	**j** x **j** = 0
k x **i** = **j**	**i** x **k** = -**j**	**k** x **k** = 0

4. Como una ayuda para recordar los productos vectoriales anteriores hacemos uso de la permutación cíclica, que consiste en colocar los vectores unitarios **i**,

j y **k** en una circunferencia en sentido antihorario. En este sentido, el producto vectorial de dos vectores consecutivos, es el siguiente vector, y el producto vectorial de dos vectores consecutivos, en el sentido horario es el negativo del siguiente vector. Los productos vectoriales de cualquiera de los vectores unitarios **i**, **j** o **k** consigo mismo tiene como resultado el vector cero.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 El vector **C** es ortogonal a los vectores **A** = ⟨2, -3, 1⟩ y **B** = ⟨3, 1, -1⟩. Hallar sus componentes si su norma es $10\sqrt{6}$ unidades.

Solución. Un vector normal al plano formado por **A** y **B** es : **n** = **A** x **B**

$$\Rightarrow \mathbf{n} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (3-1)\mathbf{i} - (-2-3)\mathbf{j} + (2+9)\mathbf{k} = \langle 2, 5, 11\rangle$$

Luego, si $\mathbf{C} = r\,\mathbf{n} \Rightarrow ||\mathbf{C}|| = |r|\,||\mathbf{n}||$

$$\Rightarrow 10\sqrt{6} = |r|\sqrt{4+25+121}\text{ , de donde } |r| = 2$$

$$\therefore\ \mathbf{C} = \pm 2\langle 2, 5, 11\rangle$$ ■

Ejemplo 2 Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos P(2, 0, -3), Q(1, 4, 5) y R(7, 2, 9)

Solución. Sean $\mathbf{A} = \overline{PQ} = \langle 1, 4, 5\rangle - \langle 2, 0, -3\rangle = \langle -1, 4, 8\rangle$

$\mathbf{B} = \overline{PR} = \langle 7, 2, 9\rangle - \langle 2, 0, -3\rangle = \langle 5, 2, 12\rangle$

Entonces, haciendo uso de la fórmula (14) se tiene

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 5 & 12 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (48-16)\mathbf{i} - (-12-40)\mathbf{j} + (-2-20)\mathbf{k}$$

$$= 2\langle 16, 26, -11\rangle$$

$$\Rightarrow ||\mathbf{A}\times\mathbf{B}|| = 2\sqrt{256+676+121} = 18\sqrt{13}$$

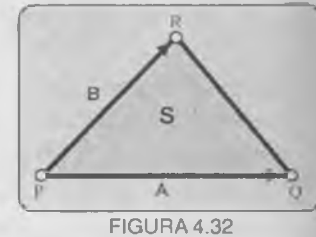


FIGURA 4.32

Dado que el área del triángulo = $\frac{1}{2}$ (área del paralelogramo)

$$\therefore\ S = 9\sqrt{13}\ u^2$$ ■

Ejemplo 3 Hallar el área del paralelogramo que tiene como diagonales los vectores $\boldsymbol{u} = \langle 5, -7, 4\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -3, 3, 0\rangle$

Solución. Sean $\mathbf{A} = \overline{PQ}$ y $\mathbf{B} = \overline{PT}$, dos lados adyacentes del paralelogramo

En el ΔPTQ : $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{v}$ (1)

y en el ΔPQR : $\boldsymbol{u} = \mathbf{A} + \overline{QR} \Rightarrow \boldsymbol{u} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ (2)

Del sistema (1) y (2) obtenemos

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u} + \mathbf{v}) \text{ y } \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u} - \mathbf{v})$$

FIGURA 4.33

Luego, $\mathbf{A} = \langle 1, -2, 2\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 4, -5, 2\rangle$

$$\Rightarrow \mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (-4+10)\mathbf{i} - (2-8)\mathbf{j} + (-5+8)\mathbf{k} = 3\langle 2, 2, 1\rangle$$

Area del paralelogramo : $S = ||\mathbf{A}\times\mathbf{B}|| \Rightarrow S = 3\sqrt{4+4+1} = 9\ u^2$ ■

Ejemplo 4 Los vectores **A** y **B** forman un ángulo cuyo coseno es $2/\sqrt{5}$, si $||\mathbf{A}|| = 2\sqrt{5}$ y $||\mathbf{B}|| = 4$, hallar la norma del vector (2**A** - **B**) x (**A** + 2**B**).

Solución. $(2\mathbf{A} - \mathbf{B})\times(\mathbf{A} + 2\mathbf{B}) = 2\mathbf{A}\times(\mathbf{A} + 2\mathbf{B}) - \mathbf{B}\times(\mathbf{A} + 2\mathbf{B})$ (PV.1)

$= 2\mathbf{A}\times\mathbf{A} + 4\mathbf{A}\times\mathbf{B} - \mathbf{B}\times\mathbf{A} - 2\mathbf{B}\times\mathbf{B}$ (PV.1)

$= 2(0) + 4\,\mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{B} - 2(0)$ (PV.4 y PV.6)

$= 5\mathbf{A}\times\mathbf{B}$

$$\Rightarrow ||(2\mathbf{A} - \mathbf{B})\times(\mathbf{A} + 2\mathbf{B})|| = 5||\mathbf{A}\times\mathbf{B}|| = 5||\mathbf{A}||\,||\mathbf{B}||\,\text{Sen}\alpha$$

$$= 5(2\sqrt{5})(4)(1/\sqrt{5})$$

$$= 40$$ ■

Ejemplo 5 Simplificar la expresión

$$\mathbf{x} = \mathbf{i}\times(\mathbf{j} + \mathbf{k}) - \mathbf{j}\times(\mathbf{i} + \mathbf{k}) + \mathbf{k}\times(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

Solución. Aplicando la propiedad PV.1 a cada término se tiene

$$\mathbf{x} = (\mathbf{i}\times\mathbf{j}) + (\mathbf{i}\times\mathbf{k}) - (\mathbf{j}\times\mathbf{i}) - (\mathbf{j}\times\mathbf{k}) + (\mathbf{k}\times\mathbf{i}) + (\mathbf{k}\times\mathbf{j}) + (\mathbf{k}\times\mathbf{k})$$

$$= (\mathbf{k}) + (-\mathbf{j}) - (-\mathbf{k}) - (\mathbf{i}) + (\mathbf{j}) + (-\mathbf{i}) + (0)$$

$$= 2(\mathbf{k} - \mathbf{i})$$ ■

Ejemplo 6 El vector **A** es ortogonal al eje Y y al vector $\mathbf{B} = \langle -3, 8, 4\rangle$, y forma un ángulo obtuso con el eje Z. Hallar las componentes de **A** sabiendo que su norma es 15 unidades.

Solución. Si $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$ es el vector unitario en la dirección del eje Y, entonces un vector ortogonal a **j** y al vector **B** es

$$\mathbf{n} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \langle 4, 0, 3\rangle$$

Luego, si $\mathbf{A} = r\mathbf{n} \Rightarrow \|\mathbf{A}\| = |r|\,\|\mathbf{n}\|$

$\Rightarrow 15 = |r|\sqrt{16+9}$, de donde : $|r| = 3 \Leftrightarrow r = \pm 3$

Como el ángulo γ es obtuso, entonces $\cos\gamma = \dfrac{z}{\|\mathbf{A}\|} < 0$, implica que $z < 0$

Por lo que se elige, $r = -3$

$$\therefore \mathbf{A} = -3\langle 4, 0, 3\rangle = \langle -12, 0, -9\rangle$$ ■

Ejemplo 7 Demostrar que dos vectores no nulos **A** y **B** en R^3 son paralelos o colineales, si y sólo si, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{O}$

Demostración.

($\Rightarrow$) Probaremos que : $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{O}$

En efecto, si $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} = r\mathbf{B}$

$\Rightarrow \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (r\mathbf{B}) \times \mathbf{B} = r(\mathbf{B} \times \mathbf{B})$ (PV.3)

$\Rightarrow \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{O}$ (PV.6)

($\Leftarrow$) Probaremos ahora que si $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$

En efecto, si $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{O} \Rightarrow \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| = 0$

$\Rightarrow \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\| \operatorname{Sen}\theta = 0$ (Fórmula 12)

Como $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ y $\mathbf{B} \neq \mathbf{O} \Rightarrow \operatorname{Sen}\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$ o $\theta = \pi$

Se sabe que si $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B} \Rightarrow m(\measuredangle \mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0$ o π

$$\therefore \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$$ ■

Ejemplo 8 Demostrar que :

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \Leftrightarrow \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{O}$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Probaremos que si : $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \Rightarrow \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{O}$

En efecto, haciendo uso de la propiedad PV.8, se tiene :

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

Al igualar los segundos miembros obtenemos

$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{O} \Rightarrow (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})\mathbf{C} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{O}$

$\Rightarrow \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{O}$ (PV.8)

($\Leftarrow$) Probaremos ahora que si : $\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{O} \Rightarrow (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

En efecto, si $\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{O} \Rightarrow (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{O}$ (PV.8)

$\Rightarrow -(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A} = -(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$

$\Rightarrow (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$

$\Rightarrow (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ (PV.8)

$$\therefore (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \Leftrightarrow \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{O}$$ ■

Ejemplo 9 Los vectores **A**, **B** y **C** satisfacen la condición : $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{O}$. Demostrar que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{C} \times \mathbf{A}$, e interpretar geométricamente el resultado.

Demostración. En efecto, multiplicando vectorialmente la condición dada por **A** y luego por **B**, se tiene

$\mathbf{A} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{O}$

$\Rightarrow \mathbf{O} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} - \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} \times \mathbf{A}$ (1)

$(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{B} + \mathbf{C} \times \mathbf{B} = \mathbf{O} \times \mathbf{B}$

$\Rightarrow \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{O} - \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ (2)

Luego, de (1) y (2) se deduce que

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{k}$$

Las últimas igualdades indican que el vector **k** es ortogonal a los vectores **A**, **B** y **C**, por lo tanto, éstos son coplanares. ■

Ejemplo 10 Qué podemos establecer para los vectores $\mathbf{V}_i$, si :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{V}_1 = \mathbf{A} \times \mathbf{V}_2 = \mathbf{A} \times \mathbf{V}_3 = \ldots\ldots = \mathbf{A} \times \mathbf{V}_n$$

Solución. Sea : $\mathbf{A} \times \mathbf{V}_1 = \mathbf{A} \times \mathbf{V}_2 = \mathbf{A} \times \mathbf{V}_3 = \ldots = \mathbf{k}$

donde **k** es un vector constante que, por definición de producto vectorial, es ortogonal a los vectores $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \ldots, \mathbf{V}_i$. Esto es, los vectores $\mathbf{V}_i$ son coplanares.

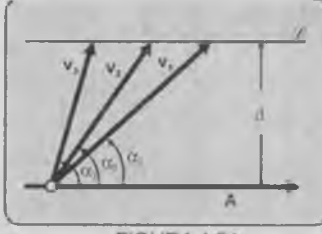


FIGURA 4.34

Por otro lado, se debe verificar la igualdad de los módulos, es decir

$$\|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{V}_i\| \operatorname{Sen}\alpha_i = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{V}_2\| \operatorname{Sen}\alpha_2 = \ldots\ldots = \|\mathbf{k}\|$$

de donde obtenemos : $||V_1|| \text{Sen}\alpha_1 = ||V_2|| \text{Sen}\alpha_2 = \ldots\ldots = d$

Por tanto , concluimos diciendo que los extremos finales de los vectores **Vi** están sobre una recta $\mathscr{L}$ paralela al vector **A**. ■

Ejemplo 11 Los vectores **A** , **B** , **C** y **D** están sujetos a las relaciones

$$A \times B = C \times D \;,\; A \times C = B \times D$$

Demostrar que los vectores **A - D** y **B - C** son coplanares.

Demostración. Debemos probar que : $(A - D) \times (B - C) = O$

En efecto

$$(A - D) \times (B - C) = A \times (B - C) - D \times (B - C) \quad (PV.1)$$
$$= A \times B - A \times C - D \times B + D \times C \quad (PV.1)$$
$$= (A \times B + D \times C) - (A \times C + D \times B)$$
$$= (A \times B - C \times D) - (A \times C - B \times D) \quad (PV.4)$$

Por las dos relaciones dadas , el resultado de ambos paréntesis es el vector nulo, esto es :

$$(A - D) \times (B - C) = O - O = O$$

En consecuencia , los vectores **A - D** y **B - C** son coplanares. ■

Ejemplo 12 Sean los vectores **A** . **B** y **C** , tales que $(A \times B) \times (A \times C) = A$; hallar $(A \times B) \times (B \times C)$.

Solución. Haciendo $A \times B = D$ y por la propiedad PV.8 , se tiene

$$D \times (A \times C) = A \Rightarrow (D \cdot C)A - (D \cdot A)C = A$$

Por el Teorema 4.3 , $(A \times B) \perp A \Rightarrow D \cdot A = 0$, luego , $(D \cdot C) A = A \Rightarrow D \cdot C = 1$

Análogamente : $(A \times B) \times (B \times C) = D \times (B \times C) = (D \cdot C)B - (D \cdot B)C$

$$= (1)B - (0)C$$
$$\therefore (A \times B) \times (B \times C) = B$$ ■

Ejemplo 13 La Figura 4.35 es un cubo.

Si A(3 , -1 , 2) , C(4 , -1 , -5) , F(-3 , 2 , 1) y H(4 , 2 , 2) ; hallar las coordenadas de los demás vértices.

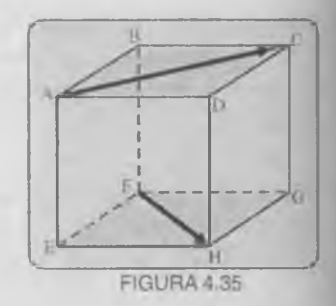


FIGURA 4.35

Solución. $\overline{AC} = \langle 4 , -1 , -5\rangle - \langle 3 , -1 , 2\rangle = \langle 1 , 0 , -7\rangle$

$\overline{FH} = \langle 4 , 2 , 2\rangle - \langle -3 , 2 , 1\rangle = \langle 7 , 0 , 1\rangle$

$\Rightarrow ||\overline{AC}|| = ||\overline{FH}|| = \sqrt{1 + 49} = 5\sqrt{2}$

Luego , cada arista del cubo mide : $\ell = 5\sqrt{2}/\sqrt{2} = 5$

La dirección de las aristas laterales está dada por el vector

$$V = \overline{FH} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} k = 50\langle 0 , 1 , 0\rangle$$

Un vector unitario , normal a las bases del cubo es , $u = \langle 0 , 1 , 0\rangle$

Por lo que : $\overline{FB} = 5u \Rightarrow B = F + 5u = \langle -3 , 2 , 1\rangle + 5\langle 0 , 1 , 0\rangle = \langle -3 , 7 , 1\rangle$

$\overline{HD} = 5u \Rightarrow D = H + 5u = \langle 4 , 2 , 2\rangle + 5\langle 0 , 1 , 0\rangle = \langle 4 , 7 , 2\rangle$

$\overline{EA} = 5u \Rightarrow E = A - 5u = \langle 3 , -1 , 2\rangle - 5\langle 0 , 1 , 0\rangle = \langle 3 , -6 , 2\rangle$

$\overline{GC} = 5u \Rightarrow G = C - 5u = \langle 4 , -1 , -5\rangle - 5\langle 0 , 1 , 0\rangle = \langle 4 , -6 , -5\rangle$ ■

Ejemplo 14 *Una aplicación del producto vectorial*

Hallar la distancia del punto P(4 , 6 , -4) a la recta que pasa por los puntos Q(2 , 2 , 1) y R(4 , 3 , -1)

Solución. La Figura 4.36 muestra la recta $\mathscr{L}$ que tiene a $A = \overrightarrow{QR}$ como vector direccional, a $\overrightarrow{QP}$ como representación del vector **B** y la distancia d del punto P a dicha recta.

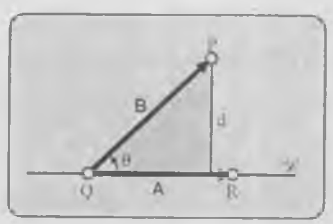


FIGURA 4.36

Ahora , por el Teorema 4.3 (propiedad 2) :

$$||A \times B|| = ||A|| \, ||B|| \text{Sen}\theta$$

Pero , en la figura se observa que : $d = ||B|| \text{Sen}\theta$

Entonces : $||A \times B|| = ||A|| (d) \Leftrightarrow \boxed{d = \dfrac{||A \times B||}{||A||}}$ (15)

Luego , si $A = \overrightarrow{QR} = \langle 4 , 3 , -1\rangle - \langle 2 , 2 , 1\rangle = \langle 2 , 1 , -2\rangle$

$B = \overrightarrow{QP} = \langle 4 , 6 , -4\rangle - \langle 2 , 2 , 1\rangle = \langle 2 , 4 , -5\rangle$

$$A \times B = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} k = \langle 3 , 6 , 6\rangle = 3\langle 1 , 2 , 2\rangle$$

$$\Rightarrow ||A \times B|| = 3\sqrt{1 + 4 + 4} = 9 \;\; y \;\; ||A|| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$

Si reemplazamos estos valores en (15) , obtenemos $d = 3$ ■

Nota. La Figura 4.37 muestra a un vector fuerza **F** , que tiene la representación $\overrightarrow{QP}$. Si el punto de aplicación de la fuerza es P . Entonces **F** ocasiona que un objeto situado a lo largo de $\overrightarrow{OP}$ rote alrededor de una recta perpendicular al plano determinado por $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{QP}$. El vector *torque* , cuya representación de posición es $\overrightarrow{OT}$, es el

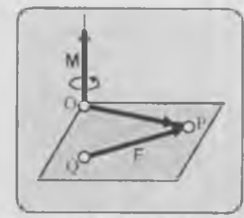


FIGURA 4.37

momento **M** de la fuerza **F** alrededor del punto O y está definido por

$$\mathbf{M} = \overrightarrow{OP} \times \mathbf{F}$$

La magnitud o módulo del momento **M** mide la tendencia del vector $\overrightarrow{OP}$ a girar en sentido antihorario alrededor de un eje dirigido a lo largo del vector torque **M**. ∎

Ejemplo 15 *Una aplicación del producto vectorial*

En la Figura 4.38 , un tornillo en el punto Q se gira al aplicar en el punto P una fuerza **F** de 25 lb. en un ángulo de 70° con respecto a la llave , la cual mide 8 pulg. de longitud. Calcular la intensidad (módulo) del vector torque generado por la fuerza en el tornillo.

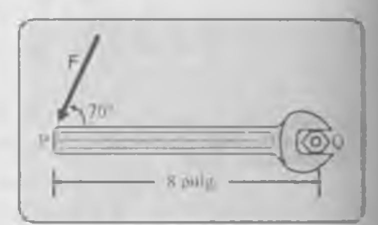


FIGURA 4.38

Solución. El vector torque está dado por

$$\mathbf{M} = \overrightarrow{QP} \times \mathbf{F}$$

y la intensidad o módulo por : $||\mathbf{M}|| = ||\overrightarrow{QP} \times \mathbf{F}||$

Ahora , por la propiedad 2 del Teorema 4.3 : $||\mathbf{M}|| = ||\overrightarrow{QP}||\,||\mathbf{F}||\ \text{Sen}\,70° = (8)(25)(0.939) = 187.8$

Por lo tanto , la intensidad del vector torque es de 187.8 pulg.-lb. ∎

Ejemplo 16 *Una aplicación del producto vectorial*

Se da el siguiente sistema de fuerzas : $\mathbf{F}_1$ de 30 kg. que actúa de A(5 , -1 , -6) a B(4 , 1 , -4) y $\mathbf{F}_2$ de 56 kg. que actúa de C(6 , 3 , 2) a D(8 , 0 , -4). Hallar

a) La resultante **R** del sistema de fuerzas

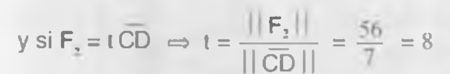
b) El *momento* resultante respecto al punto E(6 , -1 , -4).

Solución. La dirección de la fuerza $\mathbf{F}_1$ es :

$$\overline{AB} = \langle 4 , 1 , -4\rangle - \langle 5 , -1 , -6\rangle = \langle -1 , 2 , 2\rangle$$

y la de $\mathbf{F}_2$ es : $\overline{CD} = \langle 8 , 0 , -4\rangle - \langle 6 , 3 , 2\rangle = \langle 2 , -3 , -6\rangle$

Luego , si $\mathbf{F}_1 = r\overline{AB} \Rightarrow r = \dfrac{||\mathbf{F}_1||}{||\overline{AB}||} = \dfrac{30}{3} = 10$



y si $\mathbf{F}_2 = t\overline{CD} \Rightarrow t = \dfrac{||\mathbf{F}_2||}{||\overline{CD}||} = \dfrac{56}{7} = 8$

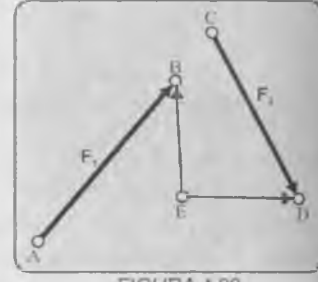


FIGURA 4.39

Entonces : $\mathbf{F}_1 = 10\langle -1 , 2 , 2\rangle$ y $\mathbf{F}_2 = 8\langle 2 , -3 , -6\rangle$

a) $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 2\langle 3 , -2 , -14\rangle$

b) Desde que $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ no son concurrentes , **M** será la suma de los dos momentos, esto es , $\mathbf{M} = \overline{EB} \times \mathbf{F}_1 + \overline{ED} \times \mathbf{F}_2$

$$\Rightarrow \overline{EB} \times \mathbf{F}_1 = \langle -2 , 2 , 0\rangle \times 10\langle -1 , 2 , 2\rangle = 10\langle 4 , 4 , -2\rangle$$

$$\overline{ED} \times \mathbf{F}_2 = \langle 2 , 1 , 0\rangle \times 8\langle 2 , -3 , -6\rangle = 8\langle -6 , 12 , -8\rangle$$

$$\therefore\ \mathbf{M} = 4\langle -2 , 34 , -21\rangle$$ ∎

Ejemplo 17 Si **A** , **B** y **C** son vectores de posición de los vértices de un triángulo ABC , demostrar que

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{A} = 2S\,\mathbf{u}$$

donde S es el área del triángulo y $\mathbf{u}$ un vector unitario normal al plano del triángulo ABC.

Demostración. En efecto , un vector unitario normal al plano del triángulo ABC es

$$\mathbf{u} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{||\overline{AB} \times \overline{AC}||} \Rightarrow \overline{AB} \times \overline{AC} = ||\overline{AB} \times \overline{AC}||\,\mathbf{u} \quad (1)$$

FIGURA 4.40

Por la Propiedad 4 del Teorema 4.3 sabemos que el área del triángulo es :

$$S = \frac{1}{2}||\overline{AB} \times \overline{AC}|| \Rightarrow ||\overline{AB} \times \overline{AC}|| = 2S$$

Luego , en (1) se tiene : $\overline{AB} \times \overline{AC} = 2S\,\mathbf{u}$

Como **A** , **B** y **C** son los vectores de posición de los vértices del triángulo , entonces:

$$(\mathbf{B} - \mathbf{A}) \times (\mathbf{C} - \mathbf{A}) = 2S\,\mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{B} \times (\mathbf{C} - \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\mathbf{C} - \mathbf{A}) = 2S\,\mathbf{u} \quad \text{(PV.1)}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B} \times \mathbf{C} - \mathbf{B} \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{A} \times \mathbf{A} = 2S\,\mathbf{u} \quad \text{(PV.1)}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{C} \times \mathbf{A} + \mathbf{O} = 2S\,\mathbf{u} \quad \text{(PV.6)}$$

$$\therefore\ \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{A} = 2S\,\mathbf{u}$$ ∎

Ejemplo 18 El módulo de la suma de dos vectores es $\sqrt{34}$, su producto escalar es 4 y su producto vectorial tiene módulo 3. Hallar :

a) El ángulo que forman dichos vectores

b) El módulo de cada uno de los vectores.

Solución. Sean **A** y **B** los vectores de los cuales se conocen

$$||\mathbf{A} + \mathbf{B}|| = \sqrt{34}\ ,\quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 4\ ,\quad ||\mathbf{A} \times \mathbf{B}|| = 3$$

a) Dado que $||\mathbf{A} \times \mathbf{B}|| = ||\mathbf{A}||\,||\mathbf{B}||\,\text{Sen}\,\theta$ y $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = ||\mathbf{A}||\,||\mathbf{B}||\,\text{Cos}\,\theta$ dividiendo miembro a miembro cada una de estas igualdades obtenemos

$$Tg\theta = \frac{||\mathbf{A} \times \mathbf{B}||}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}} \Rightarrow Tg\theta = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \theta = \text{arc } Tg(3/4)$$

b) Si $||\mathbf{A} + \mathbf{B}|| = \sqrt{34} \Rightarrow ||\mathbf{A}||^2 + 2\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + ||\mathbf{B}||^2 = 34$

$\Rightarrow ||\mathbf{A}||^2 + 2(4) + ||\mathbf{B}||^2 = 34 \Leftrightarrow ||\mathbf{A}||^2 + ||\mathbf{B}||^2 = 26$ (1)

Por la identidad de Lagrange (PV.9) : $||\mathbf{A} \times \mathbf{B}||^2 = ||\mathbf{A}||^2\,||\mathbf{B}||^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

$\Rightarrow (3)^2 = ||\mathbf{A}||^2||\mathbf{B}||^2 - (4)^2$, de donde : $||\mathbf{A}||\,||\mathbf{B}|| = 5$ (2)

Sumando (1) + 2(2) se tiene : $(||\mathbf{A}|| + ||\mathbf{B}||)^2 = 36 \Rightarrow ||\mathbf{A}|| + ||\mathbf{B}|| = 6$ (3)

Conociendo la suma (3) y el producto (2) , formamos la ecuación

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ó } x = 5$$

En consecuencia : $||\mathbf{A}|| = 1$ y $||\mathbf{B}|| = 5$ ó $||\mathbf{A}|| = 5$ y $||\mathbf{B}|| = 1$ ■

EJERCICIOS : Grupo 27

1. Simplificar las expresiones
   a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) \times \mathbf{C} + (\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) \times \mathbf{B} + (\mathbf{B} - \mathbf{C}) \times \mathbf{A}$
   b) $(2\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} - \mathbf{A}) + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \times (\mathbf{A} + \mathbf{B})$
   c) $2\,\mathbf{i} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + 3\,\mathbf{j} \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + 4\,\mathbf{k} \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{j})$
2. Hallar el área del triángulo que tiene por vértices
   a) A(1 , 2 , 3) , B(2 , -1 , 1) y C(-2 , 1 , -1)
   b) A(2 , -1 , 1) , B(3 , 2 , -1) y C(-1 , 3 , 2)
3. Hallar el área del paralelogramo cuyas diagonales están contenidas en los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ dados.
   a) $\boldsymbol{u} = \langle 2 , -1 , 3\rangle$, $\boldsymbol{v} = \langle 4 , -3 , -1\rangle$ b) $\boldsymbol{u} = \langle 3 , 4 , 2\rangle$, $\boldsymbol{v} = \langle 1 , -2 , -6\rangle$
4. Hallar un vector **V** que sea ortogonal al vector **A** y paralelo al plano determinado por los vectores **B** y **C**
   a) $\mathbf{A} = \langle -3 , 2 , 5\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 4 , 2 , -1\rangle$, $\mathbf{C} = \langle 5 , -1 , 1\rangle$
   b) $\mathbf{A} = \langle 1 , -2 , 5\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 3 , 0 , -2\rangle$, $\mathbf{C} = \langle 0 , 2 , 1\rangle$
5. Hallar el área del paralelogramo cuyas diagonales son los vectores $2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ y $4\boldsymbol{u} - 5\boldsymbol{v}$, donde $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son vectores unitarios y la m $(\measuredangle\, \boldsymbol{u} , \boldsymbol{v}) = \pi/4$.
6. Si $||\mathbf{A}|| = ||\mathbf{B}|| = 5$ y la m $(\measuredangle\, \mathbf{A} , \mathbf{B}) = \pi/4$; calcular el área de un triángulo construido sobre los vectores $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$ y $3\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$.
7. En un triángulo con los vértices en A(1 , -1 , 2) , B(5 , -6 , 2) y C(1 , 3 , -1) ; hállese la altura $h = ||\overline{BD}||$.
8. Hállense las coordenadas del vector **X** , si es ortogonal a los vectores $\mathbf{A} = \langle 4 , -2 , -3\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 0 , 1 , 3\rangle$, forma con el versor **j** un ángulo obtuso y que $||\mathbf{X}|| = 26$.

9. Hallar las coordenadas del vector **X** , si éste es ortogonal a los vectores $\mathbf{A} = \langle 2 , -3 , 1\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 1 , -2 , 3\rangle$ y satisface , además , la condición $\mathbf{X} \cdot (\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - 7\,\mathbf{k}) = 10$
10. Hallar un vector unitario paralelo al plano XY y ortogonal al vector $\mathbf{V} = \langle 4 , -3 , 1\rangle$
11. Si $\mathbf{A} = \langle 2 , 1 , -3\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 1 , -2 , 1\rangle$, hallar un vector de módulo 5 ortogonal a los vectores **A** y **B**.
12. Si $\mathbf{A} = \langle 3 , m , -3\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 5 , -4 , 1\rangle$, hallar el valor de m de modo que **B** sea ortogonal al vector $\mathbf{V} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + 2\,\mathbf{A}$
13. Obtener los valores de m y n tales que : $\langle 1 , 2 , m\rangle \times \langle 1 , n , 2\rangle = \langle 3 , -3 , -1\rangle$
14. Determinar el valor de m de modo que los puntos A(2 , 1, 1) , B(4 , 2 , 3) y C(-2 , m/2 , 3m/2) sean colineales.
15. Sea $\mathbf{A} = \langle 2 , -1 , 2\rangle$ y $\mathbf{C} = \langle 3 , 4 , -1\rangle$. Hallar un vector **B** tal que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$ y $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 1$
16. Los vectores **A** y **B** son ortogonales , si $||\mathbf{A}|| = \sqrt{3}$ y $||\mathbf{B}|| = \sqrt{12}$, hállese el valor de $(2\,\mathbf{A} - 3\,\mathbf{B}) \times (3\,\mathbf{A} + \mathbf{B})$
17. Sean **A** y **B** vectores tales que $||\mathbf{A}|| = 3$, $||\mathbf{B}|| = 26$ y $||\mathbf{A} \times \mathbf{B}|| = 72$. Hallar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. (Sugerencia: Usar la identidad de Lagrange).
18. Sean los vectores **A** y **B** tales que $||\mathbf{A}|| = \sqrt{3}/4$, $||\mathbf{B}|| = 2$ y m $(\measuredangle\, \mathbf{A} . \mathbf{B}) = 2\pi/3$. Hallar $||(2\,\mathbf{A} + 3\,\mathbf{B}) \times (2\,\mathbf{A} - 5\,\mathbf{B})||$
19. El vector **V** es ortogonal a los vectores $\mathbf{A} = \langle 1 , -2 , -3\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle -2 , 2 , 5\rangle$ y forma con el eje Y un ángulo obtuso. Si $||\mathbf{V}|| = 84$, hallar las componentes del vector **V**.
20. Dados los vectores $\mathbf{A} = \langle 2 , -3 , 4\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 1 , 1 , -1\rangle$ y $\mathbf{C} = \langle 2 , 3 , -2\rangle$; hallar el vector **V** sabiendo que es ortogonal a los vectores **A** y **B** y que $\mathbf{V} \cdot \mathbf{C} = 12$
21. El vector **V** es perpendicular el eje X y al vector $\mathbf{A} = \langle 5 , -2 , 3\rangle$ y forma un ángulo agudo con el eje Z. Hallar las componentes del vector **V** sabiendo que $||\mathbf{V}|| = \sqrt{117}$.
22. Dado tres puntos A , B y C , hallar el vector normal al plano determinado por dichos puntos.
23. Demostrar que el área del triángulo cuyos vértices son los extremos de los vectores posición **A** , **B** y **C** es
$$S = \frac{1}{2}||(\mathbf{B} - \mathbf{A}) \times (\mathbf{C} - \mathbf{A})||$$
24. Demostrar que si **A** , **B** y **C** son vectores en $\mathbb{R}^3$ que tienen el mismo punto inicial, entonces : $(\mathbf{B} - \mathbf{A}) \times (\mathbf{C} - \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$

25. Si **A** , **B** y **C** son vectores en $\mathbb{R}^3$, demuestre la ***identidad de Jacobi***

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})+\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A})+\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{O}$$

(*Sugerencia* : aplique la propiedad PV.8 a cada término).

26. Si A , B y C son vectores en $\mathbb{R}^3$, demostrar que

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \Leftrightarrow \mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{O}$$

(*Sugerencia* : aplique la identidad de Jacobi del ejercicio 25)

27. Dados los vectores **A** , **B** , **C** y **D** demuestre que

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) \quad \text{(Identidad de Lagrange)}$$

28. Demuestre las identidades

a) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D})+(\mathbf{A}\times\mathbf{C})\times(\mathbf{D}\times\mathbf{B})+(\mathbf{A}\times\mathbf{D})\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{O}$

b) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2\times(\mathbf{A}\times\mathbf{C})^2-[(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{A}\times\mathbf{C})]^2=\mathbf{A}^2(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})^2$

29. Hallar la distancia del punto P a la recta que pasa por los puntos A y B dados

a) P(4 , 6 , -4) , A(2 , 1, 2) , B(3 , -1 , 4)

b) P(3 , -1 , 5) , A(3 , -2 , 4) , B(0 , 4 , 6)

30. Los puntos A(1 , 1, 1) , B(4 , 1 , 1) , C(4 , $1+3\sqrt{3}$, 1) , D(1 , $1+3\sqrt{3}$, 1) y E(5/2 , $1+3\sqrt{3}/2$, 5) forman una pirámide de base rectangular A B C D y vértice E. Determinar la distancia del centro de la base a una arista lateral.

31. Sean P , Q y R tres puntos no colineales de $\mathbb{R}^3$ y sean $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ las representaciones de posición de los vectores **A** , **B** y **C** , respectivamente. Demostrar que la distancia del origen al plano determinado por los tres puntos está dado por

$$d=\frac{|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}|}{||(\mathbf{B}-\mathbf{A})\times(\mathbf{C}-\mathbf{A})||}$$

32. Sean dadas tres fuerzas : $\mathbf{F}_1=\langle 2,-1,-3\rangle$, $\mathbf{F}_2=\langle 3,2,-1\rangle$ y $\mathbf{F}_3=\langle -4,1,3\rangle$ aplicadas al punto A(-1 , 4 , 2). Determinar la magnitud y los cosenos directores del momento de la resultante de tales fuerzas respecto al punto B(2 , 3 , -1).

33. Los vectores A , B , C y D verifican las relaciones

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{C}\times\mathbf{D} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}\times\mathbf{C}=\mathbf{B}\times\mathbf{D}$$

Demostrar que : $(\mathbf{A}-\mathbf{D})\times(\mathbf{B}-\mathbf{C})=\mathbf{O}$

4.8 EL PRODUCTO MIXTO DE VECTORES

Se denomina *producto mixto* de una terna ordenada de vectores **A** , **B** y **C** al número real $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$.

En vista de que se verifica la identidad $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$; para el producto mixto $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ se emplea la notación abreviada (**ABC**). De este modo

$$(\mathbf{ABC})=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$$

Si los vectores **A** , **B** y **C** se dan mediante sus coordenadas

$$\mathbf{A}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle \ , \ \mathbf{B}=\langle b_1,b_2,b_3\rangle \ , \ \mathbf{C}=\langle c_1,c_2,c_3\rangle$$

el producto mixto (**ABC**) se determina por la fórmula

$$(\mathbf{ABC})=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (15)$$

4.8.1 PROPIEDADES DEL PRODUCTO MIXTO DE VECTORES

PM.1 La permutación cíclica (sentido horario) de los vectores **A** , **B** y **C** no cambia la magnitud del producto mixto , es decir

$$(\mathbf{ABC})=(\mathbf{BCA})=(\mathbf{CAB})$$

Demostración. En efecto , por las propiedades de los determinantes sabemos que el valor del determinante cambia de signo si se intercambian dos filas. Tras dos de tales intercambios , el valor del determinante no se altera , esto es

$$(\mathbf{ABC})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=(-1)^2\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=(\mathbf{CAB})$$

$$(\mathbf{CAB})=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=(-1)^2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=(\mathbf{BCA})$$

$$\therefore \ (\mathbf{ABC})=(\mathbf{CAB})=(\mathbf{BCA})$$

PM.2 $(\mathbf{ABC})=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}$

PM.3 Si V es el volumen de un paralelepípedo construido sobre los vectores **A** , **B** y **C** , entonces

$$(\mathbf{ABC})=\begin{cases} V \text{ , si la terna } (\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}) \text{ es derecha} \\ -V \text{ , si la terna } (\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}) \text{ es izquierda} \end{cases}$$

PM.4 *Criterio para los vectores coplanares.* Si los vectores **A** , **B** y *C* tienen el mismo punto inicial , entonces pertenecen al mismo plano si y sólo si

$$(ABC) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

4.8.2 INTERPRETACION GEOMETRICA DEL PRODUCTO MIXTO

Una interpretación geométrica del producto mixto se obtiene al considerar un paralelepípedo cuyas aristas lo construyen los vectores **A** , **B** y **C**. Véase Figura 4.41. El área de la base del paralelepípedo es $\|\mathbf{B}\times\mathbf{C}\|$ unidades cuadradas , $\|\mathbf{h}\|$ es la longitud de su altura y si V unidades cúbicas es el volumen de este paralelepípedo , entonces

FIGURA 4.41

Volumen = (área de la base) (altura)

$\Rightarrow V = (\|\mathbf{B}\times\mathbf{C}\|)(\|\mathbf{h}\|)$ (1)

Pero , $\mathbf{h} = Proy_{\mathbf{N}}\mathbf{A} \Rightarrow \|\mathbf{h}\| = |Comp_{\mathbf{N}}\mathbf{A}| \Leftrightarrow \|\mathbf{h}\| = \dfrac{|\mathbf{A}\cdot\mathbf{N}|}{\|\mathbf{N}\|}$

Luego , en (1) se tiene : $V = (\|\mathbf{B}\times\mathbf{C}\|)\dfrac{|\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})|}{\|\mathbf{B}\times\mathbf{C}\|}$

$$\therefore \boxed{V = |\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}| = |(ABC)|} \quad (16)$$

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Se dan los vectores $\mathbf{A} = \langle 1 , -1 , 3\rangle$, $\mathbf{B} = \langle -2 , 2 , 1\rangle$ y $\mathbf{C} = \langle 3 , -2 , 5\rangle$. Calcular (**A B C**) y determinar la orientación de las ternas {**A** , **B** , **C**} , {**B** , **A** , **C**} y {**A** , **C** , **B**}.

Solución. Por la fórmula (15) tenemos

$$(ABC) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$= (10 + 2) + (-10 - 3) + 3(4 - 6)$

$= -7$

Como (**A B C**) < 0 , la orientación de la terna {**A** , **B** , **C**} es izquierda (sentido antihorario)

De la figura adjunta deducimos que las orientaciones de las ternas {**B** , **A** , **C**} y {**A** , **C** , **B**} son derechas.

Se deja como ejercicio comprobar , mediante la fórmula (15) , que :

$$(BAC) = (ACB) = 7$$

■

Ejemplo 2 Establecer si los vectores **A** , **B** y **C** forman una base en el conjunto de todos los vectores , si :

a) $\mathbf{A} = \langle 2 , 3 , -1\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 1 , -1 , 3\rangle$, $\mathbf{C} = \langle 1 , 9 , -11\rangle$

b) $\mathbf{A} = \langle 3 , -2 , 1\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 2 , 1 , 2\rangle$, $\mathbf{C} = \langle 3 , -1 , -2\rangle$

Solución. Bastará seguir el criterio para los vectores coplanares, esto es

a) $(ABC) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 2(11 - 27) - 3(-11 - 3) + (-1)(9 + 1)$

$= -32 + 42 - 10 = 0$

Como (**A B C**) = 0 , los vectores **A** , **B** y **C** son coplanares , por lo tanto no pueden formar una base.

b) $(ABC) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2 + 2) - (-2)(-4 - 6) + 1(-2 - 3)$

$= 3(0) + 2(-10) - 5 = -25$

Como (**A B C** ≠ 0 , los vectores **A** , **B** y **C** son linealmente independientes y , por lo tanto , susceptibles de formar una base. ■

Ejemplo 3 Dados los vectores no nulos , **A** , **B** y **C** y $\mathbf{N} \in R^3$; si $\mathbf{A}\cdot\mathbf{N} = 0$, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{N} = 0$ y $\mathbf{C}\cdot\mathbf{N} = 0$, demostrar que **A** , **B** y **C** son linealmente dependientes.

Demostración. Bastará probar que (**A B C**) = 0

En efecto , $(ABC) = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ (1)

Como $\mathbf{B}\perp\mathbf{N}$ y $\mathbf{C}\perp\mathbf{N} \Rightarrow (\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \parallel \mathbf{N}$, esto es : $\mathbf{B}\times\mathbf{C} = r\mathbf{N}$

Luego , en (1) se tiene : $(ABC) = \mathbf{A}\cdot(r\mathbf{N}) = r(\mathbf{A}\cdot\mathbf{N})$

$= r(0)$ (Hipótesis)

$\Rightarrow (\mathbf{A\,B\,C}) = 0$

En consecuencia , los vectores **A** , **B** y **C** son linealmente dependientes. ■

Ejemplo 4 Si en los vectores **A** , **B** y **C** se verifica la ley asociativa para el producto vectorial , demostrar que los vectores **A** x **B** , **A** y **B** x **C** son linealmente dependientes.

Demostración. Dado que en los vectores **A** , **B** y **C** se verifica la ley asociativa

$$\Rightarrow \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \qquad (1)$$

Ahora , el producto mixto : $[(\mathbf{A} \times \mathbf{B})\ \mathbf{A}\ (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot [\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]$

En el segundo miembro , por (1) se tiene :

$$[(\mathbf{A} \times \mathbf{B})\ \mathbf{A}\ (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}]$$

Como el vector $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ es ortogonal a $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ y a **C** , entonces

$$[(\mathbf{A} \times \mathbf{B})\ \mathbf{A}\ (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] = 0$$

En consecuencia los vectores **A** x **B** , **A** y **B** x **C** son linealmente dependientes. ■

Ejemplo 5 Simplificar la expresión

$$x = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \times (\mathbf{C} + \mathbf{A})$$

Solución. Haciendo uso de la propiedades 1 y 2 del Teorema 4.2 , se tiene :

$$\begin{aligned} x &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot [(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \times \mathbf{C} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \times \mathbf{A}] \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot [(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A})] \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot [(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{O} + (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A})] \qquad \text{(PV.6)} \\ &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \end{aligned}$$

Por el Teorema 4.3 : $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = 0$

$\Rightarrow x = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$, pero $(\mathbf{A\,B\,C}) = (\mathbf{B\,C\,A})$

En consecuencia : $x = 2(\mathbf{A\,B\,C})$ ■

Ejemplo 6 Demostrar que

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{A\,B\,C})^2$$

Demostración. En efecto , supóngase que

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{M} \ ,\ \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{N} \ ,\ \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{R}$$

Entonces :
$$\begin{aligned} \mathbf{M} \cdot (\mathbf{N} \times \mathbf{R}) &= \mathbf{M} \cdot [\mathbf{N} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A})] \\ &= \mathbf{M} \cdot [(\mathbf{N} \cdot \mathbf{A})\mathbf{C} - (\mathbf{N} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}] \qquad \text{(PV.8)} \\ &= \mathbf{M} \cdot \{[(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A}]\mathbf{C} - [(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{C}]\mathbf{A}\} \\ &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \{[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]\mathbf{C} - [0]\mathbf{A}\} \qquad \text{(Teor. 4.3)} \\ &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot [(\mathbf{A\,B\,C})]\mathbf{C} \end{aligned}$$

$$= (\mathbf{A\,B\,C})\,[(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}] = (\mathbf{A\,B\,C})(\mathbf{A\,B\,C})$$

$$\therefore\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{A\,B\,C})^2$$ ■

Ejemplo 7 Demuéstrece que : $|(\mathbf{A\,B\,C})| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\,\|\mathbf{C}\|$
En qué caso se verificará el signo de igualdad?

Demostración. En efecto , por definición : $(\mathbf{A\,B\,C}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

Por la desigualdad de Schwarz : $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|$

se sigue que : $|(\mathbf{A\,B\,C})| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B} \times \mathbf{C}\|$ (1)

Por la Propiedad 2 del Teorema 4.3 : $\|\mathbf{B} \times \mathbf{C}\| = \|\mathbf{B}\|\,\|\mathbf{C}\|\,|\text{Sen}(\measuredangle \mathbf{B}, \mathbf{C})|$ y dado que $|\text{Sen}(\measuredangle \mathbf{B}, \mathbf{C})| \le 1 \Rightarrow \|\mathbf{B} \times \mathbf{C}\| \le \|\mathbf{B}\|\,\|\mathbf{C}\|$

Por lo tanto , en (1) se tiene : $|(\mathbf{A\,B\,C})| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\,\|\mathbf{C}\|$

La igualdad ocurre cuando $\text{Sen}(\measuredangle \mathbf{B}, \mathbf{C}) = 1$, es decir , cuando la medida del ángulo entre **B** y **C** es de 90° , esto es , cuando $\mathbf{B} \perp \mathbf{C}$ ■

Ejemplo 8 Demostrar que : $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times [\mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]) = -\|\mathbf{A}\|^2 (\mathbf{A\,B\,C})$

Demostración. En efecto , $\mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}$ (PV.8)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{A} \times [\mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] &= \mathbf{A} \times [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}] \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{A} \times \mathbf{A}) - \|\mathbf{A}\|^2 (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \qquad \text{(PV.1)} \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(0) - \|\mathbf{A}\|^2 (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \qquad \text{(PV.6)} \end{aligned}$$

Por lo tanto :
$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times [\mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]) &= -\|\mathbf{A}\|^2\, \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ &= -\|\mathbf{A}\|^2\, \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \qquad \text{(PM.1)} \\ &= -\|\mathbf{A}\|^2 (\mathbf{A\,B\,C}) \end{aligned}$$ ■

Ejemplo 9 El vector **C** es perpendicular a los vectores **A** y **B** , el ángulo formado por **A** y **B** es igual a 30°. Sabiendo que $\|\mathbf{A}\| = 6$, $\|\mathbf{B}\| = \|\mathbf{C}\| = 3$, calcular $(\mathbf{A\,B\,C})$.

Solución. Por la propiedad PM.1 : $(\mathbf{A\,B\,C}) = (\mathbf{C\,A\,B})$

$\Rightarrow (\mathbf{A\,B\,C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ (PM.2)

y por la desigualdad de Schwarz : $|(\mathbf{A\,B\,C})| \le \|\mathbf{C}\|\,\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$

Dado que $\mathbf{C} \perp \mathbf{B}$ y $\mathbf{C} \perp \mathbf{A}$, entonces se tiene la igualdad

$$\begin{aligned} |(\mathbf{A\,B\,C})| &= \|\mathbf{C}\|\,\|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\ \text{Sen}\,30° \\ &= (3)(6)(3)(1/2) = 27 \end{aligned}$$

$$\therefore\ (\mathbf{A\,B\,C}) = \pm 27$$ ■

Ejemplo 10 Dados los vectores **A**, **B**, **C** y **D** $\in R^3$, demostrar que

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C)$$

Demostración. Supóngase que $A \times B = N$

$\Rightarrow (A \times B) \cdot (C \times D) = N \cdot (C \times D)$

Según la permutación cíclica : $N \cdot (C \times D) = D \cdot (N \times C)$

$\Rightarrow (A \times B) \cdot (C \times D) = D \cdot (N \times C) = - D \cdot (C \times N)$

$= - D \cdot [\, C \times (A \times B)\,]$

$= - D \cdot [\, (C \cdot B) A - (C \cdot A) B\,]$ (PV.8)

$= - (C \cdot B)(D \cdot A) + (C \cdot A)(D \cdot B)$

y por la propiedad conmutativa del producto escalar

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C)$$ ■

Ejemplo 11 Los vectores de posición, con respecto al origen, de los puntos P, Q y R son $A = \langle 3, -2, -1\rangle$, $B = \langle 1, 3, 4\rangle$ y $C = \langle 2, 1, -2\rangle$, respectivamente. Hallar la distancia del punto P al plano OQR.

Solución. Refiriéndonos a la Figura 4.42, vemos que

$d = \| Proy_N A \| = | Comp_N A |$

$$\Rightarrow d = \frac{|A \cdot N|}{\|N\|} = \frac{|A \cdot (B \times C)|}{\|B \times C\|} \quad (1)$$

$$B \times C = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} k = 5\langle -2, 2, -1\rangle$$

$A \cdot (B \times C) = 5\langle 3, -2, -1\rangle \cdot \langle -2, 2, -1\rangle = -45$

Por lo que, en (1) tenemos :

$$d = \frac{|-45|}{5\sqrt{4+4+1}} = 3$$ ■

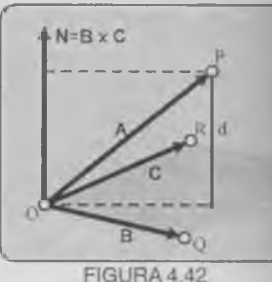


FIGURA 4.42

Ejemplo 12 Hallar el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas los vectores $A = \langle 3, -1, 1\rangle$, $B = \langle 2, 3, -2\rangle$ y $C = \langle 1, 4, 3\rangle$.

Solución. La medida del volumen del paralelepípedo está dada por

$$V = |A \cdot B \times C| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow V = 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(9+8) + (6+2) + (8-3) = 51 + 8 + 5 \Rightarrow V = 64\,u^3$$ ■

Ejemplo 13 Hallar el volumen del tetraedro cuyas aristas son los vectores $A = \langle 2, 1, 3\rangle$, $B = \langle -3, 0, 6\rangle$ y $C = \langle 4, 5, -1\rangle$

Solución. Vol. del tetraedro $= \frac{1}{3}$ (base)(altura)

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\|B \times C\|\right)(\|h\|)$$

Dado que $\|h\| = \|Proy_N A\| = |Comp_N A|$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6}(\|B \times C\|)\frac{|A \cdot B \times C|}{\|B \times C\|} = \frac{1}{6}|A \cdot B \times C|$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|-84| = 14\,u^3$$ ■

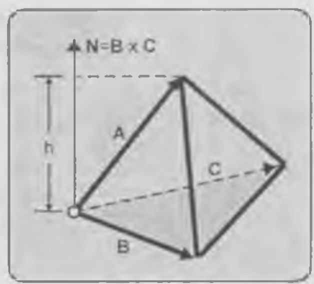


FIGURA 4.43

Ejemplo 14 El volumen de un tetraedro es 5 u^3; tres de sus vértices están en los puntos A(2 , 1 , -1) , B(3 , 0 , 1) y C(2 , -1 , 3). Hallar las coordenadas del cuarto vértice D si se sabe que está en el eje OY.

Solución. Si el vértice D está sobre el eje Y, entonces : D (0 , y , 0)

Tomando el vértice A como origen, la representación de posición de las aristas están dadas por los vectores

$a = \overrightarrow{AB} = \langle 3, 0, 1\rangle - \langle 2, 1, -1\rangle = \langle 1, -1, 2\rangle$

$b = \overrightarrow{AC} = \langle 2, -1, 3\rangle - \langle 2, 1, -1\rangle = \langle 0, -2, 4\rangle$

$c = \overrightarrow{AD} = \langle 0, y, 0\rangle - \langle 2, 1, -1\rangle = \langle -2, y-1, 1\rangle$

Ahora, si $V = \frac{1}{6}|(a\,b\,c)| \Rightarrow 5 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & y-1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow 30 = |1(-2-4y+4) - (-1)(0+8) + 2(0-4)|$$

de donde obtenemos : $|1-2y| = 15 \Leftrightarrow 1-2y = 15$ ó $1-2y = -15$

$\Leftrightarrow y = -7$ ó $y = 8$

En consecuencia, hay dos soluciones : D(0 , -7 , 0) y D(0 , 8 , 0) ■

Ejemplo 15 Con los vectores **a** , **b** y **c** de R^3 es posible formar un paralele-

pípedo de volumen V. Hallar el volumen del paralelepípedo que se puede formar con los vectores $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} + 3\mathbf{c}$

Solución. Si $V = |(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})| = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})| = |\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|$

$\Rightarrow V' = |(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot [(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 3\mathbf{c})]|$

$= |(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot [(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{a} + 3(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c})]|$ (PV.1)

$= |(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot [2\mathbf{a} \times \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} + 6\mathbf{a} \times \mathbf{c} + 3\mathbf{b} \times \mathbf{c})]|$ (PV.2)

$= |(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot [2(0) + \mathbf{b} \times \mathbf{a} + 6\mathbf{a} \times \mathbf{c} + 3\mathbf{b} \times \mathbf{c}]$ (PV.6)

$= |2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a} + 6\mathbf{a} \times \mathbf{c} + 3\mathbf{b} \times \mathbf{c}) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a} + 6\mathbf{a} \times \mathbf{c} + 3\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$

Por definición : $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = 0$ y $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$

$\Rightarrow V' = |[2(0) + 6(0) + 6\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] - [(0 + 6\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + 3(0)]|$

$= |6\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + 6\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})|$ (PV.4)

$= 12|(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})| = 12V$ ■

Ejemplo 16 Los puntos A y H, B y E; C y F, D y G, son respectivamente, vértices opuestos de las caras ABCD y HEFG (opuestos) de un paralelepípedo. Hallar su volumen, sabiendo que : A(4 , 0 , -1), F(x , y , 0), $\overline{CP} = \langle -1, 3, 7\rangle$, $\overline{BD} = \langle 13, -1, -21\rangle$, $\overline{PF} = \text{Proy}_{\overline{AF}}\overline{CF} = \langle 3, -6, 3\rangle$.

Solución. La Figura 4.44 muestra el paralelepípedo de acuerdo a los datos dados.

FIGURA 4.44

Si $\overline{PF} = \text{Proy}_{\overline{AF}}\overline{CF} = \langle 3, -6, 3\rangle \Rightarrow \overline{AF} \parallel 3\langle 1, -2, 1\rangle$

$$\Rightarrow \mathbf{F} - \mathbf{A} = t\langle 1, -2, 1\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = t \\ y - 0 = -2t \\ 1 = t \end{cases}$$

Luego, $x - 4 = 1 \rightarrow x = 5$, $y = -2 \Rightarrow F(5, -2, 0)$

$\overline{PF} = \langle 3, -6, 3\rangle \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{F} - \langle 3, -6, 3\rangle$

$\Rightarrow \mathbf{P} = \langle 5, -2, 0\rangle - \langle 3, -6, 3\rangle = \langle 2, 4, -3\rangle$

$\overline{CP} = \langle -1, 3, 7\rangle \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{P} - \langle -1, 3, 7\rangle = \langle 2, 4, -3\rangle \cdot \langle -1, 3, 7\rangle \Rightarrow \mathbf{C} = \langle 3, 1, -10\rangle$

Si las intersección de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ es M , entonces

$M = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{C}) = \frac{1}{2}\langle 7, 1, -11\rangle \Rightarrow \overline{MD} = \frac{1}{2}\overline{BD} \Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{M} + \frac{1}{2}\overline{BD}$

$$\Rightarrow \mathbf{D} = \frac{1}{2}\langle 7, 1, -11\rangle + \frac{1}{2}\langle 13, -1, -21\rangle = \langle 10, 0, -16\rangle$$

Además, si $\overline{BD} = \langle 13, -1, -21\rangle \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{D} - \langle 13, -1, -21\rangle$

$= \langle 10, 0, -16\rangle - \langle 13, -1, -21\rangle = \langle -3, 1, 5\rangle$

Conocidos los vértices B , C , D y F , podemos hallar la representación de posición de las aristas mediante los vectores

$\mathbf{a} = \overline{CD} = \mathbf{D} - \mathbf{C} = \langle 7, -1, -6\rangle$, $\mathbf{b} = \overline{CD} = \mathbf{B} - \mathbf{C} = \langle -6, 0, 15\rangle$; $\mathbf{c} = \overline{CF} = \langle 2, -3, 10\rangle$

$$\therefore V = (\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = -\begin{vmatrix} 7 & -1 & -6 \\ -6 & 0 & 15 \\ 2 & -3 & 10 \end{vmatrix} = 117\,u^3$$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 28*

1. Establecer si los vectores **A** , **B** y **C** forman una base en el conjunto de todos los vectores , si :
   a) $\mathbf{A} = \langle 2, 3, -1\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 1, -1, 3\rangle$, $\mathbf{C} = \langle 1, 9, -11\rangle$
   b) $\mathbf{A} = \langle 3, -2, 1\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 2, 1, 2\rangle$, $\mathbf{C} = \langle 3, -1, -2\rangle$
2. Demostrar que para cualesquiera **A** , **B** y **C** en $\mathbb{R}^3$, los vectores **A** - **B** , **B** - **C** y **C** - **A** son coplanares. Cuál es el sentido geométrico de este hecho?
3. Determinar el valor de k de modo que los cuatro puntos dados , A(1 , 2 , -1) , B(0 , 1 , 5) , C(-1 , 2 , 1) y D(k , 1 , 3) estén situados en un plano.
4. Demostrar las identidades
   a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + 2\mathbf{C}) \times (4\mathbf{A} + \mathbf{B} + 5\mathbf{C}) = 0$
   b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = -(\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{C})$
   c) $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{C}) \times (\mathbf{A} + 2\mathbf{B} - \mathbf{C}) = 3(\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{C})$
   d) $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times (\mathbf{C} + \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{C})$
5. Demostrar que los vectores $\mathbf{A} = \langle 1, r, r^2\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 1, s, s^2\rangle$, y $\mathbf{C} = \langle 1, t, t^2\rangle$, donde r , s y t son números reales distintos , son linealmente independientes.
6. Sean los vectores $\mathbf{A} = \langle r - 1, 1, r\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 1, r - 1, r - 2\rangle$ y $\mathbf{C} = \langle 1, r, r\rangle$. Hallar los valores de r para que **A** , **B** y **C** sean linealmente independientes.
7. Dados los vectores $\mathbf{A} = \langle 2 - k, -2, 3\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 1, 1 - k, 1\rangle$ y $\mathbf{C} = \langle 1, 3, -1 - k\rangle$; qué valores debe tener k para vectores **A** , **B** y **C** sean linealmente independientes, y que valores debe tener k para que sean linealmente dependientes?
8. Los vectores de posición , con respecto al origen , de los puntos P , Q y R son los vectores **A** , **B** y **C** , respectivamente. Hallar la distancia del punto P al plano OQR.
   a) $\mathbf{A} = \langle 3, 4, -4\rangle$, $\mathbf{B} = \langle -5, 4, -2\rangle$, $\mathbf{C} = \langle -6, -7, 2\rangle$
   b) $\mathbf{A} = \langle 3, -1, -3\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 1, 0, 3\rangle$, $\mathbf{C} = \langle 2, -2, 3\rangle$
9. Si los vectores **A** , **B** y **C** son las aristas de un paralelepípedo , hallar su volumen , si $\mathbf{A} = 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \langle 4, -2, 1\rangle$ y $\mathbf{C} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

10. Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A(1 , 0 , 1) , B(3 , 1 , 0) , C(-1 , 0 , -5) y D(-1 , -1 , -10)

11. En un tetraedro de vértices en A(1 , 1 , 1) , B(2 , 0 , 2) , C(2 , 2 , 2) y D(3 , 4 , -3), hallar la altura $h = \| \overline{DE} \|$

12. Dados los vértices de un tetraedro : A(2 , 3 , 1) , B(4 , 1 , -2) , C(6 , 3 , 7) y D(-5 , -4 , 8) , hallar la longitud de su altura bajada desde el vértice D.

13. Dados los vértices de un tetraedro : A(2 , -1 , 1) , B(5 , 5 , 4) , C(m , 2 , -1) y D(4 , 1 , m) ; hallar el valor de m sabiendo que su volumen es de 3 u^3.

14. Si **A** = ⟨1 , 3 , -1⟩ , **B** = ⟨-2 , 4 , 3⟩ y **C** = ⟨m + 2 , m , m - 2⟩ son tres vectores en R^3, determinar los valores de m para que el volumen del paralelepípedo que se forma con **A** , **B** y **C** sea 40 u^3.

15. Las aristas de un paralelepípedo son paralelos a los vectores ⟨1 , 0 , 0⟩ , ⟨2 , 3 , 0⟩ y ⟨-4 , -5 , -6⟩ . Si una de las diagonales es el vector ⟨0 , -4 , -12⟩ , hallar el volumen del paralelepípedo.

16. Dados los puntos P(2 , 1 , 3) , Q(1 , 2 , 1) , R(-1 , -2 , -2) y S(1 , -4 , 0) ; hallar la mínima distancia entre los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$.

17. Dado m ≠ 0 y los vectores no coplanares **A** , **B** y **C** , determinar el vector **V** , tal que **V** x **A** = **V** x **B** y (**V A C**) = m.

RECTAS EN EL ESPACIO

5.1 ECUACION VECTORIAL DE UNA RECTA EN EL ESPACIO

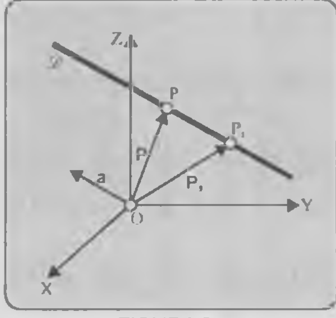


FIGURA 5.1

Sea $\mathscr{L}$ una recta en R^3 tal que contienen a un punto dado $P_1(x_1 , y_1 , z_1)$ y que es paralela a las representaciones de un vector dado

$$\mathbf{a} = \langle a , b , c \rangle$$

Entonces la recta $\mathscr{L}$ es el conjunto de puntos P(x , y , z) tales que $\overline{P_1P}$ es paralelo al vector **a**. Esto es

$$P \in \mathscr{L} \Leftrightarrow \overline{P_1P} = t\,\mathbf{a}$$
$$\Leftrightarrow P - P_1 = t\,\mathbf{a}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{P = P_1 + t\,\mathbf{a} , t \in R} \qquad (1)$$

es una *ecuación paramétrica vectorial* de $\mathscr{L}$.
Entonces $\mathscr{L}$ se puede escribir como

$$\mathscr{L} = \{P \in R^3 \mid P = P_1 + t\,\mathbf{a} , t \in R\}$$

Ejemplo 1 Hallar la ecuación paramétrica vectorial de la recta $\mathscr{L}$ que pasa por los puntos S(2 , 3 , -1) y T(5 , -3 , 1).

Solución. Un vector coincidente con $\overline{ST}$ es

$$\mathbf{a} = \overline{ST} = \langle 5 , -3 , 1 \rangle - \langle 2 , 3 , -1 \rangle = \langle 3 , -6 , 2 \rangle$$

Como S está sobre la recta $\mathscr{L}$, entonces según (1) , su ecuación paramétrica vectorial es $\mathscr{L} : P = \langle 2 , 3 , -1 \rangle + t \langle 3 , -6 , 2 \rangle$ ∎

OBSERVACION 5.1 *Segmento de recta*

Tal como en el caso de los vectores en R^2 , si se restrige el dominio de t , en la ecuación (1) , a un intervalo cerrado , entonces la gráfica de la ecuación es un *segmento de recta*.

En particular , si $0 \leq t \leq 1$, entonces la gráfica es el segmento $\overline{ST}$.

Se puede identificar a los puntos que están a una distancia dada de S sobre T eligiendo aproximadamente el parámetro t.

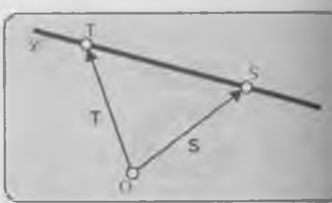


FIGURA 5.2

Ejemplo 2 Obtener las coordenadas de los puntos que trisecan al segmento de extremos S(-6 , 1 , 5) y T(3 , 13 , -1).

Solución. El vector direccional de la recta que pasa por S y T es

$$a = T - S = \langle 3 , 13 , -1 \rangle - \langle -6 , 1 , 5 \rangle = \langle 9 , 12 , -6 \rangle$$

Luego , la ecuación paramétrica vectorial del segmento $\overline{ST}$ es

$$\overrightarrow{ST} : P = \langle -6 , 1 , 3 \rangle + t \langle 9 , 12 , -6 \rangle , t \in [0 , 1]$$

Para obtener los puntos de trisección B y C , hacemos : $t = 1/3$ y $t = 2/3$

Para $t = 1/3 \Rightarrow B = \langle -6 , 1 , 3 \rangle + \frac{1}{3}\langle 9 , 12 , -6 \rangle = \langle -3 , 5 , 3 \rangle$

Para $t = 2/3 \Rightarrow C = \langle -6 , 1 , 3 \rangle + \frac{2}{3}\langle 9 , 12 , -6 \rangle = \langle 0 , 9 , 1 \rangle$

Conclusión. B(-3 , 5 , 3) y C(0 , 9 ,1) son los puntos de trisección del segmento $\overline{ST}$

OBSERVACION 5.2 *Ecuaciones paramétricas cartesianas de una recta*

Si en la ecuación (1) escribimos los vectores P . P_1 y a en función de sus componentes , entonces

$$\langle x , y , z \rangle = \langle x_1 , y_1 , z_1 \rangle + t \langle a , b , c \rangle$$

o bien

$$\langle x , y , z \rangle = \langle x_1 + ta , y_1 + tb , z_1 + tc \rangle$$

que equivale a las tres ecuaciones cartesianas

$$x = x_1 + ta \ , \ y = y_1 + tb \ , \ z = z_1 + tc \qquad (2)$$

Estas tres ecuaciones reciben el nombre de *ecuaciones paramétricas cartesianas* de la recta $\mathscr{L}$.

OBSERVACION 5.3 *Ecuaciones simétricas de una recta*

Si despejamos t de cada una de las ecuaciones (2) obtenemos

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \qquad (3)$$

Las ecuaciones (3) reciben el nombre de *ecuaciones simétricas* de la recta $\mathscr{L}$. Los términos a , b , y c son los números directores de $\mathscr{L}$, ya que son las componentes de un vector de dirección de dicha recta.

Si una recta es paralela a un plano , entonces uno de sus números directores es 0. Por lo tanto , no tiene ecuaciones simétricas de la forma (3) , puesto que uno de los denominadores sería cero. Por ejemplo , si una recta $\mathscr{L}$ es paralela al plano XY , pero no a los ejes X e Y (Figura 5.3) , entonces tiene un vector direccional de la forma $\langle a , b , 0 \rangle$, donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Aunque $\mathscr{L}$ no tiene ecuaciones de la forma (3) , si contienen al punto $P_1(x_1 , y_1 , z_1)$ se puede determinar mediante las ecuaciones

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} \ , \ z = z_1$$

Si una recta es paralela a uno de los ejes coordenados , entonces dos de sus números directores son 0 , y en lugar de las ecuaciones simétricas se tiene simplemente las ecuaciones que expresan las dos coordenadas constantes de cada punto sobre la recta. Así si la recta $\mathscr{L}$, que es paralela al eje Z , pasa por $P_1(x_1 , y_1 , z_1)$ queda especificada por las ecuaciones

$$x = x_1 \ , \ y = y_1$$

La recta $\mathscr{L}$ interseca al plano XY en el punto $S(x_1 , y_1 , 0)$ como se indica en la Figura 5.4

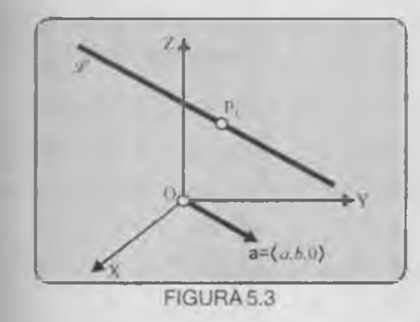


FIGURA 5.3

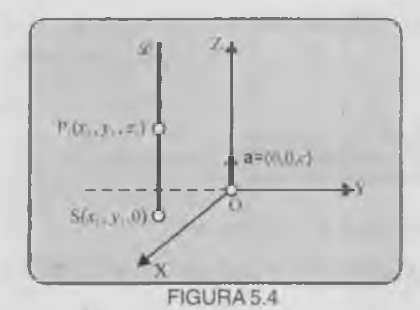


FIGURA 5.4

Ejemplo 3 Hallar la ecuación simétrica de la recta $\mathscr{L}$ que pasa por los puntos S(2 , 1 , -4) y T(5 , 3 , -1).

Solución. El vector direccional de la recta $\mathscr{L}$ es

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{ST} = \langle 5 , 3 , -1\rangle - \langle 2 , 1 , -4\rangle = \langle 3 , 2 , 3\rangle$$

Como S ∈ $\mathscr{L}$, entonces la ecuación simétrica de la recta es

$$\mathscr{L} : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+4}{3}$$ ■

Ejemplo 4 Hallar la ecuación simétrica de la recta $\mathscr{L}$ que pasa por S(1 , -3 , 4) y es paralela a la recta $\mathscr{L}_1 = \{\langle -3 , 7 , 5\rangle + t\langle 2 , -1 , 0\rangle \mid t \in R\}$

Solución. Los números directores de $\mathscr{L}_1$ son , $a = 2$, $b = -1$ y $c = 0$

Entonces , por **(3)** , la ecuación de la recta buscada es

$$\mathscr{L} : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} \ , \ z = 4$$ ■

5.2 POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS EN EL ESPACIO

DEFINICION 5.1 *Paralelismo de rectas*

Dos rectas $\mathscr{L}_1 = \{P = P_1 + t\mathbf{a} \mid t \in R\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{P = Q_1 + r\mathbf{b} \mid r \in R\}$, se dice que son paralelas si los vectores de dirección a y b son paralelos. Esto es

$$\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2 \iff \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$$

OBSERVACION 5.4 Si dos rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ en el espacio son paralelas , entonces, o son coincidentes ($\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$) o no se interceptan ($\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \varnothing$)

Ejemplo 5 Dadas las rectas $\mathscr{L}_1 = \{\langle 2 , -1 , 2\rangle + t\langle 2 , 1 , -3\rangle\}$, $\mathscr{L}_2 = \{\langle 0 , 2 , 3\rangle + s\langle -4 , -2 , 6\rangle\}$ y $\mathscr{L}_3 = \{\langle 6 , 1 , -4\rangle + r\langle 6 , 3 , -9\rangle\}$. Establecer si son paralelas o coincidentes.

Solución. Los vectores de dirección de las rectas dadas son

$$\mathbf{a}_1 = \langle 2 , 1 , -3\rangle \ , \ \mathbf{a}_2 = -2\langle 2 , 1 , -3\rangle \ , \ \mathbf{a}_3 = 3\langle 2 , 1 , -3\rangle$$

Por simple inspección : $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2 \parallel \mathbf{a}_3 \Rightarrow \mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2 \parallel \mathscr{L}_3$

Veamos si $P_2(0 , 2 , 3) \in \mathscr{L}_2$, pertenece también a $\mathscr{L}_1$. Para ello trazamos el vector

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = \langle 0 , 2 , 3\rangle - \langle 2 , -1 , 2\rangle = \langle -2 , 3 , 1\rangle \neq \langle 2 , 1 , -3\rangle$$

Luego , $\mathbf{v} \nparallel \mathbf{a}_1$, o sea $P_2 \notin \mathscr{L}_1$, por tanto , $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ no son coincidentes ($\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \varnothing$)

Veamos ahora si $P_3 \in \mathscr{L}_3$ pertenece también a $\mathscr{L}_1$.

Trazamos el vector $\mathbf{v} = \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1 = \langle 6 , 1 , -4\rangle - \langle 2 , -1 , 2\rangle = 2\langle 2 , 1 , -3\rangle$

Como $\mathbf{v} \parallel \mathbf{a}_1 \Leftrightarrow \mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_3$ son rectas coincidentes , es decir , $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_3$ y $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_3 = \{P_1\}$

OBSERVACION 5.5 Si dos rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ en el espacio no son paralelas entonces, o son concurrentes ($\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \neq \varnothing$) o se cruzan en el espacio ($\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \varnothing$).

Dadas las rectas no paralelas , $\mathscr{L}_1 = \{\mathbf{P}_1 + t\,\mathbf{a} \mid t \in R\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{\mathbf{P}_2 + s\,\mathbf{b} \mid s \in R\}$ y trazado el vector $\mathbf{c} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$, entonces para reconocer si estas rectas son concurrentes o se cruzan en el espacio , se sigue el siguiente criterio.

1. $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son concurrentes ⇔ $(\mathbf{a\,b\,c}) = 0$
2. $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ se cruzan en el espacio ⇔ $(\mathbf{a\,b\,c}) \neq 0$

Ejemplo 6 Dadas las rectas $\mathscr{L}_1 = \frac{x+4}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{-1}$, $\mathscr{L}_2 = \{\langle -3 , -2 , 6\rangle + t\langle 2 , 3 , -4\rangle\}$ y $\mathscr{L}_3 : x = s + 5 \ , \ y = -4s - 1 \ , \ z = s - 4$; establecer cuales son concurrentes o cuales se cruzan en el espacio. En el caso de que sean concurrentes , hallar el punto de intersección.

Solución. Si $\mathscr{L}_1 = \{\langle -4 , 0 , 3\rangle + r\langle 1 , 3 , -1\rangle\}$ y $\mathscr{L}_3 = \{\langle 5 , -1 , -4\rangle + s\langle 1 , -4 , 1\rangle\}$, entonces para cada par e rectas tendremos :

1. Con $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$: $\mathbf{a}_1 = \langle 1 , 3 , -1\rangle$, $\mathbf{a}_2 = \langle 2 , 3 , -4\rangle$

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = \langle -3 , -2 , 6\rangle - \langle -4 , 0 , 3\rangle = \langle 1 , -2 , 3\rangle$$

$$\Rightarrow (\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\,\mathbf{c}_1) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -22 \neq 0$$

Luego , $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ se cruzan en el espacio

2. Para $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_3$: $\mathbf{a}_1 = \langle 1 , 3 , -1\rangle$, $\mathbf{a}_3 = \langle 1 , -4 , 1\rangle$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1 = \langle 5 , -1 , -4\rangle - \langle -4 , 0 , 3\rangle = \langle 9 , -1 , -7\rangle$$

$$\Rightarrow (\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_3\,\mathbf{c}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 9 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 42 \neq 0$$

Por tanto $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_3$ se cruzan en el espacio

3. Para $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$: $a_2 = \langle 2, 3, -4\rangle$, $a_3 = \langle 1, -4, 1\rangle$

$c_3 = P_3 - P_2 = \langle 5, -1, 4\rangle - \langle -3, -2, 6\rangle = \langle 8, 1, -10\rangle$

$$\Rightarrow (a_2\, a_3\, c_3) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \\ 8 & 1 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo que, $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$ son rectas concurrentes.

Si $P \in (\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3) \Rightarrow \exists\, t, s \in \mathbf{R}$ tales que

$$\langle x, y, z\rangle = \langle -3, -2, 6\rangle + t\langle 2, 3, -4\rangle = \langle 5, -1, -4\rangle + s\langle 1, -4, 1\rangle \qquad (1)$$

o bien

$$\langle 2t - s, 3t + 4s, -4t - s\rangle = \langle 8, 1, -10\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - s = 8 \\ 3t + 4s = 1 \\ 4t + s = 10 \end{cases}$$

Resolviendo las dos primeras ecuaciones obtenemos : $t = 3$ y $s = -2$

Luego, en (1) : $\langle x, y, z\rangle = \langle -3, -2, 6\rangle + 3\langle 2, 3, -4\rangle \Rightarrow P(3, 7, -6) \in \mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3$ ■

DEFINICION 5.2 *Perpendicularidad de rectas*

Dos rectas $\mathscr{L}_1 = \{P_1 + ta\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{P_2 + sb\}$ se dice que son perpendiculares si lo son sus vectores de dirección, esto es

$$\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow a \perp b$$

Ejemplo 7 Hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}$ que pasa por el punto $P_1(3, 1, 2)$ y es perpendicular a las rectas $\mathscr{L}_1 = \{\langle 1, 0, 2\rangle + r\langle 1, -2, 2\rangle\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{\langle 2, 6, -3\rangle + s\langle 3, 0, -1\rangle\}$

Solución. Si $a_1 = \langle 1, -2, 2\rangle$ y $a_2 = \langle 3, 0, -1\rangle$, y dado que

$\mathscr{L} \perp \mathscr{L}_1 \Rightarrow a \perp a_1$, y también $\mathscr{L} \perp \mathscr{L}_2 \Rightarrow a \perp a_2$

Por la definición de producto vectorial, el vector **a** es perpendicular al plano formando a_1 y a_2, entonces

$$a = a_1 \times a_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2i + 7j - 6k$$

Por lo tanto, la ecuación buscada es, $\mathscr{L} : P = \langle 3, 1, 2\rangle + t\langle 2, 7, -6\rangle,\ t \in \mathbf{R}$ ■

Ejemplo 8 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto S(2 , -1 , 1) y es perpendicular en el punto de intersección con la recta

$\mathscr{L}_1 = \{\langle 11, -3, 2\rangle + r\langle 2, 0, -1\rangle \mid r \in \mathbf{R}\}$

Solución. Sea $T \in (\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L})$ y $a_1 = \langle 2, 0, -1\rangle$

Si $\mathscr{L}_1 : P = \langle 1, -3, 2\rangle + r\langle 2, 0, -1\rangle,\ r \in \mathbf{R}$

y si $T \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow T = \langle 1 + 2r, -3, 2 - r\rangle$

$\overline{ST} = T - S = \langle 1 + 2r, -3, 2 - r\rangle - \langle 2, -1, 1\rangle = \langle 2r - 1, -2, 1 - r\rangle$

$\overline{ST} \perp a_1 \Rightarrow \overline{ST} \cdot a_1 = 0$

$\Rightarrow \langle 2r - 1, -2, 1 - r\rangle \cdot \langle 2, 0, -1\rangle = 0$

de donde obtenemos , $r = 3/5$

Luego : $\overline{ST} = \langle \frac{6}{5} - 1, -2, 1 - \frac{3}{5}\rangle = \frac{1}{5}\langle 1, -10, 2\rangle$

Como $a \parallel \overline{ST} \Rightarrow a = t\langle 1, -10, 2\rangle$

$\therefore\ \mathscr{L} = \{\langle 2, -1, 1\rangle + t\langle 1, -10, 2\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$ ■

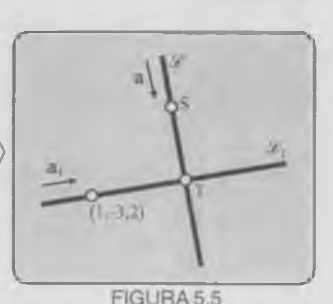


FIGURA 5.5

Ejemplo 9 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto S(1 , -4 , 6) y es perpendicular , en el espacio, a la recta $\mathscr{L}_1 = \{\langle 3, 2, -1\rangle + r\langle 1, -1, 2\rangle \mid r \in \mathbf{R}\}$

Solución. Sean : $P_1(3, 2, -1)$, $a_1 = \langle 1, -1, 2\rangle$ y $v = \overline{SP_1}$

Entonces, $v = P_1 - S = \langle 3, 2, -1\rangle - \langle 1, -4, 6\rangle = \langle 2, 6, -7\rangle$

Un vector normal al plano formado por los vectores v y a_1 es :

$$n_1 = v \times a_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 6 & -7 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \langle 5, -11, -8\rangle$$

y un vector normal al plano formado por los vectores a_1 y n_1 es :

$$n_2 = a_1 \times n_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -11 & -8 \end{vmatrix} = 6\langle 5, 3, -1\rangle$$

Como n_2 es paralelo a la recta $\mathscr{L} \Rightarrow a = \langle 5, 3, -1\rangle$

$\therefore\ \mathscr{L} = \{\langle 1, -4, 6\rangle + t\langle 5, 3, -1\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$ ■

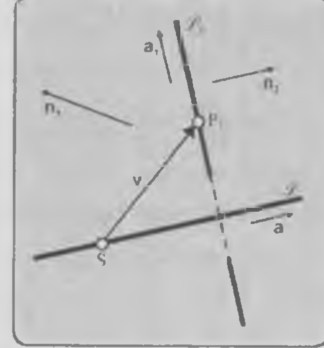


FIGURA 5.6

Ejemplo 10 Hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}$ que pasa por la intersección de las rectas $\mathscr{L}_1 = \{\langle 5, -3, 1\rangle + t\langle 3, -4, 7\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{\langle 4, 2, -9\rangle + r\langle 2, 1, -3\rangle \mid r \in \mathbf{R}\}$ y es perpendicular al plano formado por $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$.

Solución. Si $P_1 \in (\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2) \Rightarrow \exists\, t, r \in \mathbf{R}$, tales que

$$\langle x_1, y_1, z_1\rangle = \langle 5, -3, 1\rangle + t\langle 3, -4, 7\rangle = \langle 4, 2, -9\rangle + r\langle 2, 1, -3\rangle \qquad (1)$$

Entonces : $\langle 3t - 2r, -4t - r, 7t + 3r\rangle = \langle -1, 5, -10\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 3t - 2r = -1 \\ -4t - r = 5 \\ 7t + 3r = -10 \end{cases}$

Resolviendo las dos primeras ecuaciones obtenemos , $t = r = -1$

Luego , en (1) : $P_1 = \langle 5, -3, 1\rangle - \langle 3, -4, 7\rangle = \langle 2, 1, -6\rangle$

Si a es el vector de dirección de $\mathscr{L}$, entonces : $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$

$$\Rightarrow \mathbf{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -4 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \langle 5, 23, 11\rangle$$

$$\therefore \ \mathscr{L} = \{\langle 2, 1, -6\rangle + s\langle 5, 23, 11\rangle \mid s \in \mathbf{R}\}$$ ■

Ejemplo 11 Sean las rectas $\mathscr{L}_1 = \{\langle 3, 4, 0\rangle + r\langle 1, 2, -1\rangle \mid r \in \mathbf{R}\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{\langle 1, 1, 1\rangle + s\langle 1, 0, 2\rangle \mid s \in \mathbf{R}\}$. Hallar la ecuación de una recta que corta a $\mathscr{L}_1$ en A , a $\mathscr{L}_2$ en B y al eje X en C , de modo que $\overline{AB} = \overline{BC}$

Solución. Si $A \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow \mathbf{A} = \langle 3 + r, 4 + 2r, -r\rangle$

$B \in \mathscr{L}_2 \Rightarrow \mathbf{B} = \langle 1 + s, 1, 1 + 2s\rangle$

$C \in$ (Eje X) $\Rightarrow \mathbf{C} = \langle x, 0, 0\rangle$

Dado que $\overline{AB} = \overline{BC} \Rightarrow$ B es punto medio de $\overline{AC}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 + r + x = 2(1 + s) \Leftrightarrow r - 2s + x = -1 \\ 4 + 2r + 0 = 2(1) \Leftrightarrow r = -1 \\ -r + 0 = 2(1 + 2s) \Leftrightarrow s = -1/4 \end{cases}$$

Luego , $\mathbf{A} = \langle 2, 2, 1\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 3/4, 1, 1/2\rangle$

El vector de dirección de la recta $\mathscr{L}$ es

$$\mathbf{a} = \overline{BA} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \frac{1}{4}\langle 5, 4, 2\rangle$$

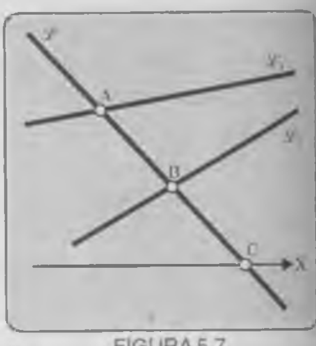


FIGURA 5.7

$$\therefore \ \mathscr{L} = \{\langle 2, 2, 1\rangle + t\langle 5, 4, 2\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$$ ■

Ejemplo 12 Dados los vértices de un triángulo A(1 , -2 , -4) , B(3 , 1 , -3) y C(5 , 1 , -7) , hallar las ecuaciones paramétricas de la altura bajada desde el vértice B al lado opuesto.

Solución. Considérese el ΔABC de la Figura 5.8 , en donde :

$$\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{AH} = \overline{AB} - \text{Proy}_{\overline{AC}}\overline{AB} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = \langle 3, 1, -3\rangle - \langle 1, -2, -4\rangle = \langle 2, 3, 1\rangle \qquad (2)$$

$$\overline{AC} = \mathbf{C} - \mathbf{A} = \langle 5, 1, -7\rangle - \langle 1, -2, -4\rangle = \langle 4, 3, -3\rangle$$

$$\text{Proy}_{\overline{AC}}\overline{AB} = \left(\frac{\langle 2, 3, 1\rangle \cdot \langle 4, 3, -3\rangle}{\|\langle 4, 3, -3\rangle\|^2}\right)\langle 4, 3, -3\rangle$$

$$= \frac{8 + 9 - 3}{(\sqrt{16 + 9 + 9})^2}\langle 4, 3, -3\rangle = \frac{7}{17}\langle 4, 3, -3\rangle \quad (3)$$

FIGURA 5.8

Sustituyendo (2) y (3) en (1) , obtenemos :

$$\overline{HB} = \frac{2}{17}\langle 3, 15, 19\rangle$$

Si a es el vector direccional de la altura $\overline{HB}$ y como $\mathbf{a} \parallel \overline{HB} \Rightarrow \mathbf{a} = \langle 3, 15, 19\rangle$

Dado que B(3 , 1 , -3) pertenece a la altura $\overline{HB}$, sus ecuaciones paramétricas son

$$x = 3 + 3t \ , \ y = 1 + 15t \ , \ z = -3 + 19t$$ ■

Ejemplo 13 Dados los vértices de un triángulo A(3 , -1 , -1) , B(1 , 2, -7) y C(-5 , 14 , -3). Hallar las ecuaciones simétricas de la bisectriz del ángulo interno del vértice B.

Solución. La Figura 5.9 muestra al ΔABC y la representación de posición de la bisectriz $\overline{BD}$.

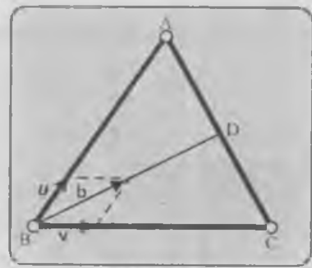


FIGURA 5.9

Entonces

$$\overline{BA} = \langle 3, -1, 1\rangle - \langle 1, 2, -7\rangle = \langle 2, -3, 6\rangle$$

$$\overline{BC} = \langle -5, 14, -3\rangle - \langle 1, 2, 7\rangle = \langle -6, 12, 4\rangle$$

Los vectores unitarios en las direcciones de $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ son , respectivamente

$$\boldsymbol{u} = \frac{\langle 2, -3, 6\rangle}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{\langle 2, -3, 6\rangle}{7} \ , \ \boldsymbol{v} = \frac{\langle -6, 12, 4\rangle}{\sqrt{36 + 144 + 16}} = \frac{\langle -3, 6, 2\rangle}{7}$$

Luego , un vector en la dirección de la bisectriz $\overline{BD}$ es

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = -\frac{1}{7}\langle 1, -3, -8\rangle$$

Por lo que , los números directores de la bisectriz $\overline{BD}$ son : 1 , -3 y -8. Si B(1 , 2 , -7) pertenece a la bisectriz , entonces sus ecuaciones simétricas son

$$\mathscr{L} : \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{-3} = \frac{z + 7}{-8}$$ ■

Ejemplo 14 Los ángulos que forman el vector a con los vectores ortonormales ⟨1 , 0 , 0⟩, ⟨0 , 1 , 0⟩ y ⟨0 , 0 , 1⟩ son 45° , 60° y 60° respectivamente. Los ángulos que forman el vector **b** con dichos vectores son 45°, 45° y 90°, respectivamente. Hallar : a) El ángulo entre **a** y **b**. b) La recta que pasa por A(1 , 1 , 1) y es paralelo al vector a + b , siendo a y b unitarios.

Solución. La ecuación que permite expresar un vector en términos de su módulo y de sus cosenos directores es

$$\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \langle \cos\alpha , \cos\beta , \cos\gamma \rangle$$

Entonces : $\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \langle \cos 45^\circ , \cos 60^\circ , \cos 60^\circ \rangle = \frac{\|\mathbf{a}\|}{2} \langle \sqrt{2} , 1 , 1 \rangle$

Del mismo modo : $\mathbf{b} = \|\mathbf{b}\| \langle \cos 45^\circ , \cos 45^\circ , \cos 90^\circ \rangle = \frac{\|\mathbf{b}\|}{2} \langle \sqrt{2} , \sqrt{2} , 0 \rangle$

Luego ; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{4}\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \, (2 + \sqrt{2}) \Rightarrow \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$

a) Si $\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \theta = \text{arc Cos}\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4}\right)$

es el ángulo entre los vectores a y b.

b) Dado que a y b son unitarios , entonces : $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle \sqrt{2} , \frac{1 + \sqrt{2}}{2} , \frac{1}{2} \rangle$

$$\therefore \ \mathcal{L} : P = \langle 1 , 1 , 1 \rangle + t\langle 2\sqrt{2} , 1 + \sqrt{2} , 1 \rangle , \ t \in \mathbb{R}$$ ■

Ejemplo 15 Una recta $\mathcal{L}_1$ pasa por los puntos A(2 , 1 , 1) y B(6 , 4 , 1) y otra recta $\mathcal{L}_2$ pasa por C(1 , 3 , -1) y D(3 , 0 , 5). Si $\mathcal{L}$ es una recta que pasa por P(1 , 3 , -1) formando un mismo ángulo con $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ tal que los vectores de dirección de las rectas $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son linealmente dependientes , hallar la ecuación de $\mathcal{L}$.

Solución. Los vectores de dirección de las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son

$$\mathbf{b} = \overline{AB} = \langle 6 , 4 , 1 \rangle - \langle 2 , 1 , 1 \rangle = \langle 4 , 3 , 0 \rangle$$

$$\mathbf{c} = \overline{CD} = \langle 3 , 0 , 5 \rangle - \langle 1 , 3 , -1 \rangle = \langle 2 , -3 , 6 \rangle$$

Entonces sus ecuaciones vectoriales son

$$\mathcal{L}_1 = \{\langle 2 , 1 , 1 \rangle + r\langle 4 , 3 , 0 \rangle \mid r \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{y} \quad \mathcal{L}_2 = \{\langle 1 , 3 , -1 \rangle + s\langle 2 , -3 , 6 \rangle \mid s \in \mathbb{R}\}$$

Como $\mathcal{L}_1 \nparallel \mathcal{L}_2$. veamos si son concurrentes o se cruzan en el espacio.

Sea $\mathbf{d} = \overline{AC} = \langle 1 , 3 , -1 \rangle - \langle 2 , 1 , 1 \rangle = \langle -1 , 2 , -2 \rangle$

$$\Rightarrow (\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$$

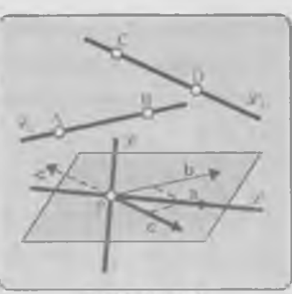


FIGURA 5.10

luego , $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se cruzan en el espacio.

Dado que los vectores de dirección de $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son coplanares (linealmente dependientes) , trazamos éstos sobre un plano de modo que sus puntos iniciales coinciden con P (Figura 5.10). Además como $\mathcal{L}$ forma ángulos iguales con $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, su vector de dirección es bisectriz del ángulo entre **b** y **c** o entre **b** y **-c**.

$$\Rightarrow \mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|} = \frac{\langle 4 , 3 , 0 \rangle}{5} + \frac{\langle 2 , -3 , 6 \rangle}{7} = \frac{2}{35}\langle 19 , 3 , -15 \rangle$$

$$\text{o} \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} - \frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|} = \frac{\langle 4 , 3 , 0 \rangle}{5} - \frac{\langle 2 , -3 , 6 \rangle}{7} = \frac{2}{35}\langle 7 , 18 , 15 \rangle$$

$$\therefore \ \mathcal{L} = \{\langle 1 , 3 , -1 \rangle + t\langle 19 , 3 , -15 \rangle \mid t \in \mathbb{R}\} \ \text{o} \ \mathcal{L} = \{\langle 1 , 3 , -1 \rangle + t\langle 7 , 18 , 15 \rangle \mid t \in \mathbb{R}\}$$ ■

Ejemplo 16 Sea la recta $\mathcal{L} = \{\langle 1 , -2 , 4 \rangle + t\langle 2 , 1 , -2 \rangle \ t \in \mathbb{R}\}$ y los puntos P(-2 , 3 , 5) y C(*a* , *b* , 2) , estando C sobre la recta $\mathcal{L}$.

a) Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por P e intersecan a $\mathcal{L}$, de tal manera que los puntos de intersección disten 9 unidades de C.

b) hallar la ecuación de la recta que pasa por P y sea ortogonal a $\mathcal{L}$ y a las rectas obtenidas en a).

Solución. Dado que $C(a , b , 2) \in \mathcal{L}$, entonces

$$\langle a , b , 2 \rangle = \langle 1 + 2t , -2 + t , 4 - 2t \rangle$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 + 2t \\ b = -2 + t \\ 2 = 4 - 2t \Rightarrow t = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow C(3 , -1 , 2)$$

Un vector unitario en la dirección de $\mathcal{L}$ es

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\langle 2 , 1 , -2 \rangle}{3}$$

FIGURA 5.11

a) $\overline{AC} = \|\overline{AC}\| \, \boldsymbol{u} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{C} - 3\langle 2 , 1 , -2 \rangle$

$= \langle 3 , -1 , 2 \rangle - \langle 6 , 3 , -6 \rangle = \langle -3 , -4 , 8 \rangle$

$\overline{CB} = \|\overline{CB}\| \, \boldsymbol{u} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C} + 3\langle 2 , 1 , -2 \rangle$

$= \langle 3 , -1 , 2 \rangle + \langle 6 , 3 , -6 \rangle = \langle 9 , 2 , -4 \rangle$

Por consiguiente : $\mathcal{L}_1 = \{P + t\overline{AP}\} = \{\langle -2 , 3 , 5 \rangle + t\langle 1 , 7 , -3 \rangle \mid t \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{L}_2 = \{P + t\overline{BP}\} = \{\langle -2 , 3 , 5 \rangle + t\langle -11 , 1 , 9 \rangle \mid t \in \mathbb{R}\}$

b) La recta $\mathscr{L}_3$ requerida que no aparece en la Figura 5.11 , pasa por P y es perpendicular al plano generado por $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, entonces su vector de dirección será paralelo a la normal de dicho plano , esto es

$$n = \overline{AP} \times \overline{BP} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 7 & -3 \\ -11 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 6\langle 11 , -7 , 13\rangle \Rightarrow a_3 = \langle 11 , -7 , 13\rangle$$

$$\therefore \mathscr{L}_3 = \{P + t a_3\} = \{\langle -2 , 3 , 5\rangle + t\langle 11 , -7 , 13\rangle \mid t \in \mathbb{R}\}$$ ■

EJERCICIOS : Grupo 29

1. Hallar la ecuación paramétrica vectorial de la recta que pasa por los puntos S(1 , -2 , -3) y T(2 , -3 , 2).
2. Por los puntos A(-6 , 6 , -5) y B(12 , -6 , 1) se ha trazado una recta. Hallar los puntos de intersección de esta recta con los planos coordenados.
3. Hallar las coordenadas de los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son S(6 , 0 , -3) y T(-6 , 9 , -12).
4. Hallar las coordenadas de los puntos que dividen en 4 partes iguales al segmento de extremos A(-1 , 2 , 1) y B(7 , 6 , -11).
5. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(3 , 0 , -1) y es perpendicular, en su punto de intersección con la recta $\mathscr{L}_1 = \{\langle 2 , 3 , 2\rangle + t\langle 2 , -1 , 0\rangle \mid t \in \mathbb{R}\}$.
6. Una recta $\mathscr{L}$ que pasa por el punto A(-2 , 1 , 3) es perpendicular e interseca a la recta $\mathscr{L}_1 : P = \langle 2 , 2 , 1\rangle + t\langle 1 , 0 , -1\rangle , t \in \mathbb{R}$. Hallar la ecuación vectorial de $\mathscr{L}$.
7. Hallar la ecuación vectorial de una recta que pasa por el punto A(2 , 1 , -1) y corta a las rectas $\mathscr{L}_1 : P = \langle 1 , 1 , 1\rangle + r\langle 2 , 4 , 5\rangle , r \in \mathbb{R}$, y $\mathscr{L}_2$: eje X.
8. Una recta $\mathscr{L}_1$ pasa por los puntos A(2 , -1 , 1) y B(3 , 2 , -1) y otra recta $\mathscr{L}_2$ pasa por el punto C(2 , -3 , -1) y corta perpendicularmente a $\mathscr{L}_1$. Hallar la ecuación vectorial de $\mathscr{L}_2$.
9. Demostrar que las rectas , dadas mediante sus ecuaciones paramétricas $\mathscr{L}_1 : x = 2t - 3 , y = 3t - 2 , z = -4t + 6$ y $\mathscr{L}_2 : x = t + 5 , y = -4t - 1 , z = t - 4$ son concurrentes.
10. Se dan las rectas
$$\mathscr{L}_1 : \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4} \quad y \quad \mathscr{L}_2 : \frac{x-3}{m} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$
cuál debe ser el valor de m para que estas rectas sean concurrentes?

11. Sean $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ rectas en $\mathbb{R}^3$, tales que $\mathscr{L}_1$ es paralela a $\mathscr{L}_2 : x = \sqrt{2}\,y = \sqrt{2}\,z$, y $\mathscr{L}_2$ pasa por el punto Q(-2 , 7 , 13) y por el punto medio del segmento $\overline{AB}$, donde A(-2 , 3 , 4) y B(3 , -2 , -3). Hallar el ángulo que forman $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$.
12. Una recta $\mathscr{L}$ pasa por el punto A(2 , 1 , 3) y forma con los vectores $\langle 1 , 0 , 0\rangle$, $\langle 0 , 1 , 0\rangle$ y $\langle 0 , 0 , 1\rangle$, ángulos de 45° , 60° y γ respectivamente. Hallar un vector dirección para $\mathscr{L}$, de norma 1 y dar las ecuaciones paramétricas de ésta.
13. Hallar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas $\mathscr{L}_1 = \{\langle -1 , 4 , -3\rangle + r\langle 5 , -2 , 2\rangle\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{\langle -2 , 4 , 13\rangle + s\langle 3 , -1 , -10\rangle\}$ y es perpendicular al plano formado por $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$.
14. Hallar la ecuación de la recta que pasa por P(0 , 1 , 1) y corta a la rectas
$$\mathscr{L}_1 : \begin{cases} x = y \\ 2x = z \end{cases} \quad y \quad \mathscr{L}_2 = \{\langle 1 , -2 , 0\rangle + s\langle 1 , 2 , 1\rangle \mid s \in \mathbb{R}\}$$
15. Dadas las rectas que se cruzan
$$\mathscr{L}_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{5-z}{4} \quad y \quad \mathscr{L}_2 : x = -2 , \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$$
, hallar la ecuación de la recta que pasa por S(-1 , -2 , 1) y es perpendicular a $\mathscr{L}_1$ (en el espacio) y corta a $\mathscr{L}_2$.
16. Dadas las rectas $\mathscr{L}_1 = \{\langle 2 , -1 , 3\rangle + r\langle 1 , 0 , -2\rangle \mid r \in \mathbb{R}\}$, $\mathscr{L}_2 = \{\langle 3 , 0 , -2\rangle + s\langle 0 , 2 , 1\rangle \mid s \in \mathbb{R}\}$ y $\mathscr{L}_3 = \{\langle 3 , 2 , 0\rangle + t\langle 0 , 3 , 1\rangle \mid t \in \mathbb{R}\}$. Hallar la ecuación de la recta que corta a $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$ en los puntos A , B y C respectivamente, de modo que B sea el punto de trisección , más cercano de C , del segmento $\overline{AB}$.
17. Dados los vértices de un triángulo A(2 , -1 , -3), B(5 , 2 , -7) y C(-7 , 11 , 6) , hallar la ecuación vectorial de la bisectriz del ángulo externo del vértice A.
18. Hallar las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por el punto A(-1 , 2 , -3), es perpendicular al vector **v** = $\langle 6 , -2 , -3\rangle$ y se corta con la recta
$$\mathscr{L}_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$$
19. Hallar las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por el punto A(-4 , -5 , 3) y se corta con las dos rectas
$$\mathscr{L}_1 : \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1} \quad ; \quad \mathscr{L}_2 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$$
20. Hallar las ecuaciones paramétricas de la perpendicular común a las dos rectas , dadas por las ecuaciones
$\mathscr{L}_1 : x = 3t - 7 , y = -2t + 4 , z = 3t + 4$ y $\mathscr{L}_2 : x = t + 1 , y = 2t - 9 , z = -t - 12$

21. Hallar el punto simétrico de P(3 , 2 , 1) , respecto de la recta

$$\mathscr{L} = \{\langle 1 , 2 , 1\rangle + t\langle 2 , 3 , 2\sqrt{3}\rangle \mid t \in \mathbb{R}\}$$

22. Sea la recta $\mathscr{L} = \{\langle 1 , 2 , 3\rangle + t\langle 1 , -2 , 2\rangle \mid t \in \mathbb{R}\}$ y los puntos P(3 , 3 , 1) y Q(2 , r , s), estando Q en la recta $\mathscr{L}$.
   a) Hallar las rectas que pasan por P e intersecan a $\mathscr{L}$, de tal manera que los puntos de intersección disten 6 unidades de Q.
   b) Hallar la recta que pasa por P y sea ortogonal a $\mathscr{L}$ y a las rectas obtenidas en la parte a).

5.3 APLICACIONES DE LA RECTA EN EL ESPACIO

TEOREMA 5.1 *Distancia entre un punto y una recta en el espacio*

La distancia entre un punto S y una recta $\mathscr{L}$ en el espacio viene dada por

$$d(S , \mathscr{L}) = \frac{\|\mathbf{a} \times \overline{TS}\|}{\|\mathbf{a}\|}$$

donde **a** es el vector de dirección de la recta $\mathscr{L}$ y T es un punto cualquiera de la recta.

Demostración. Sea la recta $\mathscr{L}$ de ecuación

$$\mathscr{L} = \{P = T + t\mathbf{a} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

En la Figura 5.12 se observa que la

$$d(S , \mathscr{L}) = \|\overline{TS}\| \operatorname{Sen}\theta$$

donde θ es el ángulo entre **a** y $\overline{TS}$.

Por la propiedad 2 del Teorema 4.3 , tenemos

$$\|\mathbf{a} \times \overline{TS}\| = \|\mathbf{a}\| \, \|\overline{TS}\| \operatorname{Sen}\theta$$

Por tanto, $\|\mathbf{a} \times \overline{TS}\| = \|\mathbf{a}\| \, d(S , \mathscr{L})$

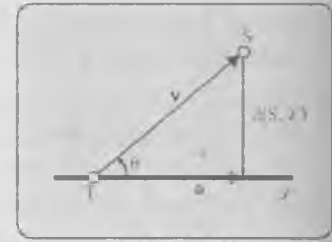


FIGURA 5.12

$$\Rightarrow \quad d(S , \mathscr{L}) = \frac{\|\mathbf{a} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{a}\|} \qquad (17)$$

Ejemplo 1 Hallar la distancia del punto S(1 , -1 , 2) a la recta

$$\mathscr{L}_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{3}$$

Solución. Por simple inspección , un punto de la recta $\mathscr{L}$ es T(3 , 2 , -3) y su vector de dirección es $\mathbf{a} = \langle 2 , -1 , 3\rangle$. Entonces , un vector que va de T a S es:

$$\mathbf{v} = \overline{TS} = \langle 1 , -1 , 2\rangle - \langle 3 , 2 , -3\rangle = \langle -2 , -3 , 5\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 4\langle 1 , -4 , -2\rangle$$

Luego , $\|\mathbf{a} \times \mathbf{v}\| = 4\sqrt{1 + 16 + 4} = 4\sqrt{21}$ y $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$

Finalmente , por la fórmula (17) : $d(S , \mathscr{L}) = \dfrac{4\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{6}$ ■

Ejemplo 2 Hallar la distancia del punto S(5 , -3 , -4) a la recta

$$\mathscr{L} : y + 4 = 0 \ , \ x + z = 3$$

Solución. Las ecuaciones simétricas de la recta $\mathscr{L}$ son : $\dfrac{x}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$, $y = -4$

Por inspección , un punto sobre $\mathscr{L}$ es T(0 , -4 , 3) y su vector de dirección es $\mathbf{a} = \langle 1 , 0 , -1\rangle$.

Ahora , si $\mathbf{v} = \overline{TS} \Rightarrow \mathbf{v} = \langle 5 , -3 , -4\rangle - \langle 0 , -4 , 3\rangle = \langle 5 , 1 , -7\rangle$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -7 \end{vmatrix} = \langle 1 , 2 , 1\rangle$$

Luego , $\|\mathbf{a} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$ y $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$

Por tanto , aplicando la fórmula (17) obtenemos : $d(S , \mathscr{L}) = \sqrt{3}$ ■

Ejemplo 3 Desde el punto S(4 , 5, -1) se traza una perpendicular a la recta $\mathscr{L}_1 = \{\langle 2 , -1 , 1\rangle + r\langle 1 , 2 , -2\rangle \mid r \in \mathbb{R}\}$. A qué distancia del punto A(5 , 2 , -2) se halla dicha perpendicular?

Solución. Si $\mathscr{L}_1 : P = \langle 2 , -1 , 1\rangle + r\langle 1 , 2 , -3\rangle , r \in \mathbb{R}$, por inspección , $P_1(2 , -1 , 1)$ y $\mathbf{a}_1 = \langle 1 , 2 , -2\rangle$

Si $T \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow \mathbf{T} = \langle 2 + r , -1 + 2r , 1 - 2r\rangle$

Luego , $\overline{TS} = \mathbf{S} - \mathbf{T} = \langle 2 - r , 6 - 2r , 2r - 2\rangle$

Si $\overline{ST} \perp \mathbf{a}_1 \Rightarrow \langle 2 - r , 6 - 2r , 2r - 2\rangle \cdot \langle 1 , 2 , -2\rangle = 0$

$\Rightarrow 2 - r + 12 - 4r - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 2$

Por lo que : $\mathbf{T} = \langle 4 , 3 , -3\rangle$ y $\overline{TS} = 2\langle 0 , 1 , 1\rangle$

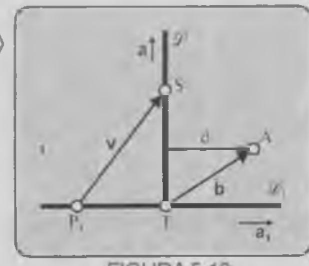


FIGURA 5.13

Refiriéndonos a la Figura 5.13 , vemos que $\mathbf{a} \parallel \overline{TS}$

$\Rightarrow$ a = ⟨0 , 1 , 1⟩ es el vector de dirección de la recta $\mathscr{L} \perp \mathscr{L}_1$

Si $\mathbf{b} = \overline{TA} \Rightarrow \mathbf{b} = \langle 5, 2, -2\rangle - \langle 4, 3, -3\rangle = \langle 1, -1, 1\rangle$

Luego : $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \langle 2, 1, -1\rangle \Rightarrow \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \sqrt{6}$ y $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2}$

Ahora , haciendo uso de la fórmula (17) , obtenemos

$$d(A, \mathscr{L}) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$ ■

Ejemplo 4 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1 , -3 , -4) y corta al eje X , sabiendo que la distancia del origen de coordenadas a dicha recta es 5 unidades.

Solución. Sean : A(x , 0 , 0) , $\mathbf{v} = \overrightarrow{PO} = \langle -1, 3, 4\rangle$ y

$\mathbf{a} = \overline{PA} = \langle x-1, 3, 4\rangle$

$$\Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x-1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = x\langle 0, -4, 3\rangle$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{a}\times\mathbf{v}\| = |x|\sqrt{0+16+9} = 5|x|$$

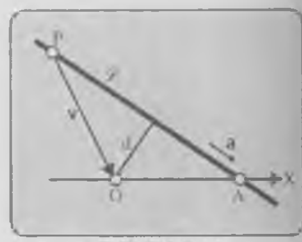


FIGURA 5.14

Si $d(0, \mathscr{L}) = \dfrac{\|\mathbf{a}\times\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{a}\|} \Rightarrow 5 = \dfrac{5|x|}{\sqrt{x^2-2x+26}} \Leftrightarrow x = 13$

$$\therefore\ \mathscr{L} = \{\langle 1, -3, -4\rangle + t\langle 12, 3, 4\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$$ ■

TEOREMA 5.2 *Distancia entre dos rectas en el espacio*

La distancia entre dos rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ en el espacio , viene dada por

$$d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = \frac{|(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)\cdot(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)|}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|}$$

donde los puntos $P_1 \in \mathscr{L}_1$ y $P_2 \in \mathscr{L}_2$, y $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ son los vectores de dirección de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ respectivamente.

Demostración. Sean las rectas no paralelas

$\mathscr{L}_1 = \{\mathbf{P}_1 + t\mathbf{a}_1 \mid t \in \mathbf{R}\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{\mathbf{P}_2 + r\mathbf{a}_2 \mid r \in \mathbf{R}\}$

Construimos dos planos paralelos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ que contengan a las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ respectivamente. Como la normal **n** a ambos planos , es perpendicular a los vectores de dirección de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, entonces

$$d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = |\text{Comp}_{\mathbf{n}}\mathbf{v}|$$

en donde : $\mathbf{v} = \overline{P_1P_2} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$ y $\mathbf{n} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$

$$d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = \frac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)\cdot(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)|}{\|\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2\|} \quad (18)$$

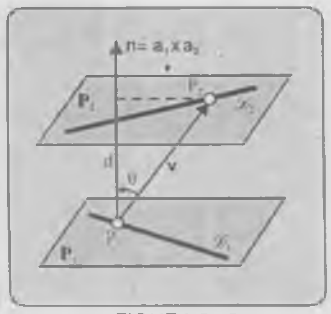


FIGURA 5.15

Ejemplo 5 Calcular la distancia entre las rectas

$$\mathscr{L}_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-1} \quad \text{y} \quad \mathscr{L}_2 : \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{1}$$

Solución. De $\mathscr{L}_1$ obtenemos : $P_1(1, 0, 5)$, $\mathbf{a}_1 = \langle 3, 4, -1\rangle$

y de $\mathscr{L}_2$: $P_2(0, -1, 4)$, $\mathbf{a}_2 = \langle 2, -1, 1\rangle \Rightarrow \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = \langle -1, -1, -1\rangle$

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \langle 3, -5, -11\rangle$$

Luego , por la fórmula (18) : $d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = \dfrac{|\langle -1,-1,-1\rangle\cdot\langle 3,-5,-11\rangle|}{\sqrt{9+25+121}} = \dfrac{13}{\sqrt{155}}$ ■

Ejemplo 6 Hallar la distancia entre las rectas

$$\mathscr{L}_1 : x = 3t,\ y = -4 - t,\ z = -18 + 4t \quad \text{y} \quad \mathscr{L}_2 : \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$$

Solución. Por simple inspección : $P_1(0, -4, -18)$ y $\mathbf{a}_1 = \langle 3, -1, 4\rangle$

$P_2(-7, 5, 9)$ y $\mathbf{a}_2 = \langle 3, -1, 4\rangle$

Como $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 \Rightarrow \mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2$; luego , no es posible calcular la $d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$ por la fórmula (18) ,puesto que $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = 0$

Consultando con la Figura 5.16 , vemos que

$$d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = d(P_1, \mathscr{L}_2) = d(P_2, \mathscr{L}_1)$$

Si $\mathbf{v} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = \langle -7, 5, 9\rangle - \langle 0, -4, -18\rangle = \langle -7, 9, 27\rangle$

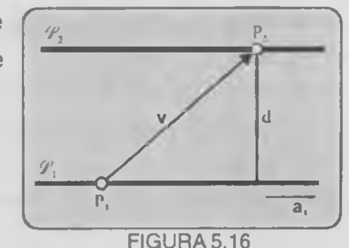


FIGURA 5.16

$$\Rightarrow \mathbf{v} \times \mathbf{a}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -7 & 9 & 27 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \langle 63, 109, -20 \rangle$$

$$d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}_1\|} = \frac{\sqrt{16.250}}{\sqrt{26}} = 25$$ ■

Ejemplo 7 Dadas las rectas

$$\mathscr{L}_1 : \frac{x+6}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1} \quad y \quad \mathscr{L}_2 : \frac{x-3}{1} = \frac{y}{2}, \; z = 2,$$

que se cruzan en el espacio : determinar un punto $A \in \mathscr{L}_1$ y otro punto $B \in \mathscr{L}_2$, tales que la distancia de A a B sea mínima , así como la recta que los contiene.

Solución. Si $\mathscr{L}_1 = \{\langle -6, 1, -1\rangle + r\langle 2, 1, -1\rangle \mid r \in R\}$
y $\mathscr{L}_2 = \{\langle 3, 0, 2\rangle + s\langle 1, 2, 0\rangle \mid s \in R\}$

Entonces : $a_1 = \langle 2, 1, -1\rangle$ y $a_2 = \langle 1, 2, 0\rangle$

Para que la distancia entre los puntos A y B sea mínima , la recta $\mathscr{L}$ que los debe ser perpendicular a $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, cuyo vector de dirección es $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$

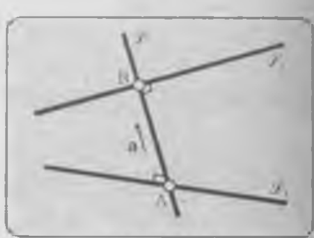
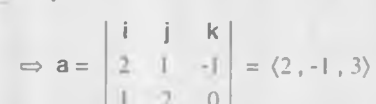


FIGURA 5.17



$$\Rightarrow \mathbf{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \langle 2, -1, 3\rangle$$

Refiriéndonos a la Figura 5.17 : $\overline{AB} = t\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A} + t\langle 2, -1, 3\rangle$ (1)

$B \in \mathscr{L}_2 \Rightarrow \mathbf{B} = \langle 3, 0, 2\rangle + s\langle 1, 2, 0\rangle$ (2)

$A \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow \mathbf{A} = \langle -6, 1, -1\rangle + r\langle 2, 1, -1\rangle$ (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1) se tiene :

$$\langle 3, 0, 2\rangle + s\langle 1, 2, 0\rangle = \langle -6, 1, -1\rangle + r\langle 2, 1, -1\rangle + t\langle 2, -1, 3\rangle$$

$$\Rightarrow \langle s-2r-2t, 2s-r+t, r-3t\rangle = \langle -9, 1, -3\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} s - 2r - 2t = -9 \\ 2s - r + t = 1 \\ r - 3t = -3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones , obtenemos : $r = 3$, $s = 1$, $t = 2$

Por lo tanto : $\mathbf{A} = \langle -6, 1, -1\rangle + 3\langle 2, 1, -1\rangle = \langle 0, 4, -4\rangle \Rightarrow A(0, 4, -4)$

$\mathbf{B} = \langle 3, 0, 2\rangle + \langle 1, 2, 0\rangle = \langle 4, 2, 2\rangle \Rightarrow B(4, 2, 2)$

$\mathscr{L} = \{\mathbf{A} + t\mathbf{a} \mid t \in R\} \Rightarrow \mathscr{L} = \{\langle 0, 4, -4\rangle + t\langle 2, -1, 3\rangle \mid t \in R\}$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 30*

1. Hallar la distancia del punto S(3 , -1 , 5) a la recta que pasa por los puntos A(3 , -2 , 4) y B(0 , 4 , 6).
2. Hallar la distancia del punto S(-1 , 2 , 3) a la recta
$$\mathscr{L} = \{\langle 7, -3, 0\rangle + t\langle 6, -2, 3\rangle \mid t \in R\}$$
3. Hallar la distancia entre las rectas $\mathscr{L}_1 = \{\langle 1, 2, -2\rangle + t\langle 0, 4, 2\rangle \mid t \in R\}$ y $\mathscr{L}_2 = x + 4 = 0$, $y + z = 6$.
4. Hallar la distancia entre las rectas $\mathscr{L}_1 : \frac{x-3}{-2} = \frac{z-6}{2}$, $y = 4$, y $\mathscr{L}_2 : x + 1 = y - 2 = z$
5. Hallar la distancia entre las rectas $\mathscr{L}_1 : \frac{x-5}{-7} = \frac{y+3}{21} = \frac{z-7}{14}$ y $\mathscr{L}_2 = \{\langle 4, -1, 5\rangle + t\langle 1, -3, -1\rangle \mid t \in R\}$.
6. Desde el punto P(3 , 6 , 7) se traza una perpendicular a la recta $\mathscr{L} = \{\langle 1, 1, 2\rangle + t\langle 2, -1, 3\rangle\}$. A qué distancia del punto A(4 , 4, 7) se halla dicha perpendicular.
7. Sean dadas las rectas que se cruzan ,
$$\mathscr{L}_1 : \frac{x}{-2} = \frac{z+2}{1}, \; y = 1 \quad y \quad \mathscr{L}_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$$
Hállese la distancia $d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$ entre las rectas y escríbase la ecuación de la perpendicular $\mathscr{L}$ común para ambas rectas.
8. Sean dadas dos rectas $\mathscr{L}_1 : \mathbf{P} = \langle -7, -4, -3\rangle + r\langle 3, 4, -2\rangle$, $r \in R$ y $\mathscr{L}_2 : \mathbf{Q} = \langle 21, -5, 2\rangle + s\langle 6, -4, -1\rangle$, $s \in R$. Se necesita :
   a) Demostrar que las rectas no se disponen en un mismo plano , es decir , se cruzan.
   b) Determinar un punto $A \in \mathscr{L}_1$ y otro punto $B \in \mathscr{L}_2$, tales que la distancia de A a B sea mínima. Halle dicha distancia.
   c) Escribir la ecuación de la perpendicular común a las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$
9. Demuéstrese que las rectas $\mathscr{L}_1$, que pasa por A(9 , -7 , -6) y B(27/2 , -17/2 , 0), y $\mathscr{L}_2 : \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$ son paralelas y hállese la distancia $d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$
10. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(-2 , 1 , -3) y corta al eje Y , sabiendo que la distancia del origen de coordenadas a dicha recta es $\sqrt{13}$ unidades.
11. Hallar la distancia más corta entre las dos rectas , en cada uno de los casos siguientes

a) $\mathscr{L}_1: \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$ y $\mathscr{L}_2: \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$

b) $\mathscr{L}_1: x = 2t - 4 , y = -t + 4 , z = -2t - 1$; $\mathscr{L}_2: x = 4t - 5 , y = -3t + 5 , z = -5t + 5$

c) $\mathscr{L}_1: \frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$; $\mathscr{L}_2: x = 6t + 9 , y = -2t , z = -t + 2$

12. Hallar un punto cuyas distancias a las rectas $\mathscr{L}_1 = \{\langle 3, 2, 2\rangle + s\langle 1, 5, 3\rangle\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{\langle 1, 0, 1\rangle + t\langle 1, 2, 1\rangle\}$ sea la mitad de la distancia (mínima) de $\mathscr{L}_1$ a $\mathscr{L}_2$.
13. Hallar la ecuación de la recta que pasa por A(3 , 4 , 0) y corta al eje Z , sabiendo que la distancia del origen de coordenadas a dicha recta es 4 unidades.
14. Dadas las rectas $\mathscr{L}_1: x - 1 = y/2 = z$ y $\mathscr{L}_2: x = y = z$; hallar un punto $P_0 \in \mathscr{L}_1$ y otro $Q_0 \in \mathscr{L}_2$, tales que la distancia de P_0 a Q_0 sea mínima , así como la recta $\mathscr{L}$ que los contiene.

6 PLANOS EN EL ESPACIO

6.1 ECUACION VECTORIAL DE UN PLANO

Así como en $\mathbf{R}^2$, la gráfica de una ecuación de dos variables x e y es una *curva* , en $\mathbf{R}^3$ la gráfica de una ecuación en tres variables x , y , z es una *superficie*. La más simple es el *plano* , pues su ecuación es de primer grado en tres variables.

Es bien conocido que tres puntos no colineales en el espacio determinan un plano. Basándonos de este hecho trataremos de obtener su ecuación vectorial de la siguiente manera. Considérese el plano $\mathbf{P}$ que pasa por puntos A , B y P_1 , y que contiene a los vectores no paralelos **a** y **b** , como se muestra en la Figura 6.1. Un vector $\mathbf{v} = \overline{P_1P}$ cualquiera del plano se puede escribir como una combinación lineal de un vector en la dirección de **a** y otro en la dirección de **b**. Esto es , si

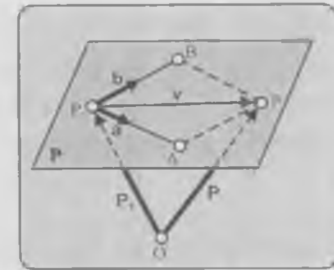


FIGURA 6.1

$$P(x , y , x) \in \mathbf{P} \Rightarrow \exists\, s , t , \in \mathbf{R} \text{, tales que}$$

$$\overline{P_1P} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \Rightarrow P - P_1 = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

$$\Rightarrow P = P_1 + s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

Queda entonces definido la ecuación vectorial del plano $\mathbf{P}$, como el conjunto de puntos :

$$\mathbf{P} = \{P \mid P = P_1 + s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \text{ , } s , t \in \mathbf{R}\} \qquad (1)$$

Ejemplo 1 Hallar la ecuación paramétrica vectorial del plano que contiene a los vectores **a** = ⟨-1 , 2 , 3⟩ , **b** = ⟨4 , -3 , 5⟩ y pasa por el punto $P_1(1 , 0 , 2)$.

Solución. Según la fórmula (1) , la ecuación vectorial del plano es

$$\mathbf{P} = \{P \mid P = \langle 1 , 0 , 2\rangle + s\langle -1 , 2 , 3\rangle + t\langle 4 , -3 , 5\rangle , s , t \in \mathbf{R}\}$$ ■

OBSERVACION 6.1 *Ecuaciones paramétricas del plano*

Si en la ecuación (1) se sustituye $P = \langle x , y , z\rangle$, $P_1 = \langle x_1 , y_1 , z_1\rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1 , a_2 , a_3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1 , b_2 , b_3\rangle$, obtenemos

$$\begin{cases} x = x_1 + s a_1 + t b_1 \\ y = y_1 + s a_2 + t b_2 \\ z = z_1 + s a_3 + t b_3 \end{cases} \qquad (2)$$

Las ecuaciones (2) son definidas como las *ecuaciones paramétricas* del plano, cuyo punto de paso es P_1 y es paralelo a los vectores **a** y **b**.

Ejemplo 2 Hallar las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por los puntos R(2 , 1 , 3) , S(-1 , -2 , 4) y T(4 , 2 , 1).

Solución. Sean : $\mathbf{a} = \overline{RS} = \langle -1 , -2 , 4\rangle - \langle 2 , 1 , 3\rangle = \langle -3 , -3 , 1\rangle$

y $\mathbf{b} = \overline{RT} = \langle 4 , 2 , 1\rangle - \langle 2 , 1 , 3\rangle = \langle 2 , 1 , -2\rangle$

Si $R(2 , 1 , 3) \in \mathbf{P} \Rightarrow \exists\, s , t \in \mathbf{R}$, tales que : $\mathbf{P} = \langle 2 , 1 , 3\rangle + s\langle -3 , -3 , 1\rangle + t\langle 2 , 1 , -2\rangle$.

Entonces , por simple inspección , las ecuaciones paramétricas del plano son

$$x = 2 - 3s + 2t \;,\quad y = 1 - 3s + t \;,\quad z = 3 + s - 2t$$ ■

OBSERVACION 6.2 *Ecuación normal del plano*

Si el plano **P** es paralelo a los vectores **a** y **b** , entonces existen infinidad de vectores ortgonales a dicho plano y por consiguiente ortogonales a los vectores **a** y **b**. Por lo que , un vector *normal* al plano **P** será el vector **n** = **a** x **b**. Ahora , si P_1 es un punto dado y P es un punto cualquiera del plano , entonces el vector $\overline{P_1P}$ es ortogonal al vector **n** y del hecho que el producto escalar de dos vectores ortogonales es cero, se tiene :

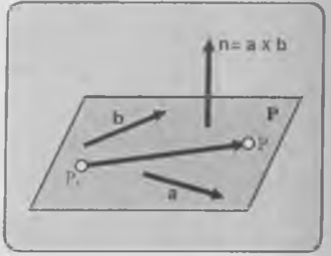


FIGURA 6.2

$$P(x , y , z) \in \mathbf{P} \Leftrightarrow \overline{P_1P} \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(P - P_1) \cdot \mathbf{n} = 0} \qquad (3)$$

La expresión (3) se conoce como la ***ecuación normal*** del plano **P** , cuyo punto de paso es P_1.

OBSERVACION 6.3 *Ecuación general del plano*

Dado que el producto escalar de dos vectores es un número real , se puede emplear la ecuación (3) para obtener una ecuación escalar o cartesiana del plano que pasa por P_1 y con vector normal **n**.

En efecto , supóngase que $P = \langle x , y , z\rangle$, $P_1 = \langle x_1 , y_1 , z_1\rangle$ y $\mathbf{n} = \langle A , B , C\rangle$, entonces , si :

$$(P - P_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow P \cdot \mathbf{n} = P_1 \cdot \mathbf{n}$$

$$\Leftrightarrow \langle x , y , z\rangle \cdot \langle A , B , C\rangle = \langle x_1 , y_1 , z_1\rangle \cdot \langle A , B , C\rangle$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + Cz = Ax_1 + By_1 + Cz_1$$

Si hacemos $D = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1)$, obtenemos

$$\boxed{\mathbf{P} :\; Ax + By + Cz + D = 0} \qquad (4)$$

que es la denominada *ecuación general del plano*.

Ejemplo 3 Obtener la ecuación general del plano que pasa por los puntos R(3 , 2 , 1) , S(1 , 3 , 2) y T(1 , -2 , 3)

Solución. Sean : $\mathbf{a} = \overline{RS} = \langle 1 , 3 , 2\rangle - \langle 3 , 2 , 1\rangle = \langle -2 , 1 , 1\rangle$

y $\mathbf{b} = \overline{RT} = \langle 1 , -2 , 3\rangle - \langle 3 , 2 , 1\rangle = \langle -2 , -4 , 2\rangle$

Luego , **n** = **a** x **b** es el vector normal al plano determinado por los tres puntos dados , esto es

$$\Rightarrow \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2\langle 3 , 1 , 5\rangle$$

Sin perder generalidad , tomamos $\mathbf{n} = \langle 3 , 1 , 5\rangle$

Si $P(x , y , z) \in \mathbf{P} \Leftrightarrow (P - R) \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow P \cdot \mathbf{n} = R \cdot \mathbf{n}$

$$\Rightarrow \langle x , y , z\rangle \cdot \langle 3 , 1 , 5\rangle = \langle 3 , 2 , 1\rangle \cdot \langle 3 , 1 , 5\rangle$$

de donde obtenemos la ecuación $\mathbf{P} : 3x + y + 5z - 16 = 0$ ■

FIGURA 6.3

Ejemplo 4 Hallar la ecuación normal y la ecuación general de un plano $\mathbf{P}$ que pasa por el punto S(3 , -3 , 1) y contiene a la recta $\mathscr{L} = \{\langle 2, 3, -1\rangle + t\langle 1, 0, -1\rangle \mid t \in \mathbb{R}\}$

Solución. El punto de paso del plano es S(3 , -3 , 1) y como contiene a la recta $\mathscr{L}$, el punto $P_1 \in \mathscr{L}$, también pertenece al plano. Luego, el vector

$$a = \overline{P_1S} = \langle 3, -3, 1\rangle - \langle 2, 3, -1\rangle = \langle 1, -6, 2\rangle$$

es paralelo al plano, también lo es el vector direccional de $\mathscr{L}$, $b = \langle 1, 0, -1\rangle$. Entonces

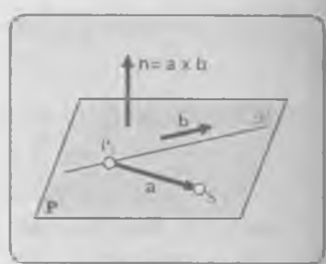


FIGURA 6.4

$$n = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -6 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \langle -6, 3, 6\rangle = -3\langle 2, -1, -2\rangle$$

Sin perder generalidad podemos elegir a $n = \langle 2, -1, -2\rangle$ como el vector normal al plano. Luego, si $P(x, y, z) \in \mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{P} : (P - S)\cdot n = 0$

$$\Rightarrow \mathbf{P} : [P - \langle 3, -3, 1\rangle]\cdot\langle 2, -1, -2\rangle = 0$$

es la ecuación normal del plano. Su ecuación general lo obtenemos de

$$P\cdot n = S\cdot n \Leftrightarrow \langle x, y, z\rangle\cdot\langle 2, -1, -2\rangle = \langle 3, -3, 1\rangle\cdot\langle 2, -1, -2\rangle$$

$$\Rightarrow \mathbf{P} : 2x - y - 2z - 7 = 0$$ ■

Ejemplo 5 Hallar la ecuación cartesiana del plano que contiene a las rectas $\mathscr{L}_1 : P = \langle 2, 5, -1\rangle + t\langle -4, -3, 2\rangle$; $t \in \mathbb{R}$ y $\mathscr{L}_2 : x = 4 + 4s$, $y = -3 + 3s$, $z = -2s : s \in \mathbb{R}$

Solución. Por inspección, la ecuación vectorial de la recta $\mathscr{L}_2$ es: $Q = \langle 4, -3, 0\rangle + s\langle 4, 3, -2\rangle$; $s \in \mathbb{R}$

Siendo $\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2$, no podemos construir el producto vectorial $a_1 \times a_2$, pues el vector $n = \mathbf{O}$, pero como los puntos P_1 y P_2 pertenecen al plano, entonces, sea

$$v = \overline{P_1P_2} = \langle 4, -3, 0\rangle - \langle 2, 5, -1\rangle = \langle 2, -8, 1\rangle$$

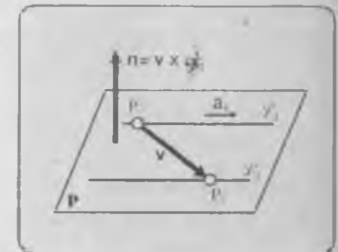


FIGURA 6.5

Luego: $$n = v \times a_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -8 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \langle 13, 8, 38\rangle$$

Por lo que, si $P(x, y, z) \in \mathbf{P} \Leftrightarrow P\cdot n = P_1\cdot n$

$$\Leftrightarrow \langle x, y, z\rangle\cdot\langle 13, 8, 38\rangle = \langle 2, 5, -1\rangle\cdot\langle 13, 8, 38\rangle$$

$$\Rightarrow \mathbf{P} : 13x + 8y + 38z - 28 = 0$$ ■

Ejemplo 6 Sea $\mathbf{P}$ un plano que pasa por $P_1(5, 4, 3)$ y tiene como vector normal a $n = \langle 1, 2, 3\rangle$. Hallar una ecuación vectorial para P.

Solución. Si $P(x, y, z) \in \mathbf{P} \Leftrightarrow (P - P_1)\cdot n = 0 \Leftrightarrow P\cdot n = P_1\cdot n$

$$\Rightarrow \langle x, y, z\rangle\cdot\langle 1, 2, 3\rangle = \langle 5, 4, 3\rangle\cdot\langle 1, 2, 3\rangle$$

de donde obtenemos la ecuación general, $\mathbf{P} : x + 2y + 3z = 22$

Entonces, para $x = 1, z = 3 \Rightarrow 1 + 2y + 9 = 22 \Leftrightarrow y = 6 \Rightarrow A(1, 6, 3) \in \mathbf{P}$

$x = 1, y = 0 \Rightarrow 1 + 0 + 3z = 22 \Leftrightarrow z = 7 \Rightarrow B(1, 0, 7) \in \mathbf{P}$

Teniendo tres puntos no colineales del plano, podemos hallar dos vectores que están contenidas en dicho plano. Esto es, si

$$a = \overline{P_1A} = \langle 1, 6, 3\rangle - \langle 5, 4, 3\rangle \Rightarrow a = \langle -4, 2, 0\rangle = -2\langle 2, -1, 0\rangle$$

$$b = \overline{P_1B} = \langle 1, 0, 7\rangle - \langle 5, 4, 3\rangle \Rightarrow b = \langle -4, -4, 4\rangle = -4\langle 1, 1, -1\rangle$$

Por lo que, una ecuación vectorial del plano pedido es

$$\mathbf{P} = \langle 5, 4, 3\rangle + s\langle 2, -1, 0\rangle + t\langle 1, 1, -1\rangle ; s, t \in \mathbb{R}$$ ■

OBSERVACION 6.4 ***Ecuaciones de los planos coordenados***

Partiendo de las ecuaciones (3), (4) y (1) podemos obtener las ecuaciones normal, general y vectorial, respectivamente, de los planos coordenados.

a) Plano XY. En la Figura 6.6a : $n = k = \langle 0, 0, 1\rangle$, $a = i$, $b = j$

La ecuación normal es : $(P - P_1)\cdot n = 0 \Leftrightarrow \langle x, y, z\rangle\cdot\langle 0, 0, 1\rangle = 0$

La ecuación general es : $z = 0$

Ecuación vectorial. $\mathbf{P} = \{P \mid P = s\langle 1, 0, 0\rangle + t\langle 0, 1, 0\rangle\}$

b) Plano XZ. En la Figura 6.6b : $n = j = \langle 0, 0, 0\rangle$, $a = i$, $b = k$ y $P_1(0, 0, 0)$

Ecuación normal : $(P - P_1)\cdot n = 0 \Leftrightarrow \langle x, y, z\rangle\cdot\langle 0, 1, 0\rangle = 0$

Ecuación general : $y = 0$

Ecuación vectorial : $\mathbf{P} = \{P \mid P = s\langle 1, 0, 0\rangle + t\langle 0, 0, 1\rangle\}$

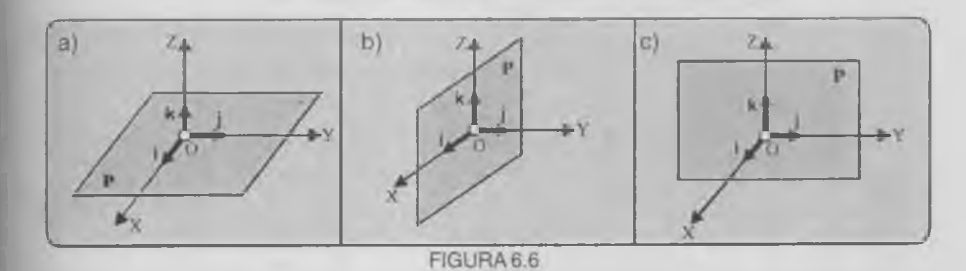


FIGURA 6.6

c) Plano YZ. En la Figura 6.6c : $\mathbf{n} = \mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{a} = \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{k}$ y $P_1(0, 0, 0)$

Ecuación normal : $(\mathbf{P} - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow \langle x, y, z\rangle \cdot \langle 1, 0, 0\rangle = 0$

Ecuación general : $x = 0$

Ecuación vectorial : $\mathbf{P} = \{P \mid P = s\langle 0, 1, 0\rangle + t\langle 0, 0, 1\rangle\}$

DEFINICION 6.1 *Paralelismo y Perpendicularidad de una recta y un plano*

Una recta $\mathscr{L}$ es *paralela* a un plano **P** si y sólo si un vector de dirección de $\mathscr{L}$ es perpendicular a un vector normal a **P**. (La recta $\mathscr{L}$ puedo o no estar contenido en **P**). Una recta $\mathscr{L}$ es *perpendicular* a un plano **P** , si y sólo si un vector de dirección de $\mathscr{L}$ es paralelo a un vector normal a **P**. Por tanto , si **a** es el vector de dirección de $\mathscr{L}$ y **n** es el vector normal al plano **P** , entonces

a) $\mathscr{L} \parallel \mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$ b) $\mathscr{L} \perp \mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{n} = \mathbf{O}$

Ejemplo 7 Cuál es el valor de m para que la recta $\mathscr{L} : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+2}{-2}$ sea paralela al plano $\mathbf{P} : x - 3y + 6z + 7 = 0$

Solución. Por simple inspección obtenemos : $\mathbf{a} = \langle 3, m, -2\rangle$ y $\mathbf{n} = \langle 1, -3, 6\rangle$

Luego , por la Definición 6.1a , si $\mathscr{L} \parallel \mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$

$\Rightarrow \langle 3, m, -2\rangle \cdot \langle 1, -3, 6\rangle = 0 \Leftrightarrow m = -3$ ∎

Ejemplo 8 Para que valores de a y b , la recta $\mathscr{L} : \frac{x-2}{a} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ es perpendicular al plano $\mathbf{P} : 3x - 2y + bz + 1 = 0$

Solución. Por inspección : $\mathbf{a} = \langle a, 4, -3\rangle$ y $\mathbf{n} = \langle 3, -2, b\rangle$

Por la Definición 6.1b , si $\mathscr{L} \perp \mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{n} = \mathbf{O}$

$$\Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & 4 & -3 \\ 3 & -2 & b \end{vmatrix} = \mathbf{i}(4b - 6) - \mathbf{j}(ab + 9) + \mathbf{k}(-2a - 12)$$

Luego , si : $\langle 4b - 6, -ab - 9, 2a - 12\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 4b - 6 = 0 \Rightarrow b = 3/2 \\ -ab - 9 = 0 \\ -2a - 12 = 0 \Rightarrow a = -6 \end{cases}$ ∎

DEFINICION 6.2 *Paralelismo y perpendicularidad de dos planos*

Dos planos son paralelos o perpendiculares si y sólo si sus respectivas normales son paralelas o perpendiculares. Es decir , si $\mathbf{P}_1$ es un plano con normal $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{P}_2$ es un plano con normal $\mathbf{n}_2$, entonces

a) $\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{P}_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{O}$ b) $\mathbf{P}_1 \perp \mathbf{P}_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$

Ejemplo 9 Determinar para qué valores de a y b las ecuaciones $\mathbf{P}_1 : ax - 6y - 6z + 2 = 0$ y $\mathbf{P}_2 : 2x + by + 3z - 5 = 0$, determinan planos paralelos.

Solución. Del plano $\mathbf{P}_1$ se tiene $\mathbf{n}_1 = \langle a, -6, -6\rangle$, y de $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{n}_2 = \langle 2, b, 3\rangle$

Si $\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{P}_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{O}$ (Definición 6.2a)

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & -6 & -6 \\ 2 & b & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-18 + 6b) - \mathbf{j}(3a + 12) + \mathbf{k}(ab + 12)$$

Luego , si $\langle 6b - 18, -3a - 12, ab + 12\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 6b - 18 = 0 \Rightarrow b = 3 \\ -3a - 12 = 0 \Rightarrow a = -4 \\ ab + 12 = 0 \end{cases}$ ∎

Ejemplo 10 Demostrar que la ecuación del plano que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y es perpendicular a los dos planos $\mathbf{P}_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$. $\mathbf{P}_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, se puede representar en la forma

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

Demostración. Refiriéndonos a la Figura 6.7 , podemos observar que las normales a los planos $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ son paralelos al plano **P** , por lo que $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ y como cualquier vector contenido en el plano **P** que va del punto de paso P_1 a un punto genérico P , es ortogonal a su normal , esto es , si $\mathbf{v} = \overline{P_1P}$, su ecuación estará definido por el producto escalar

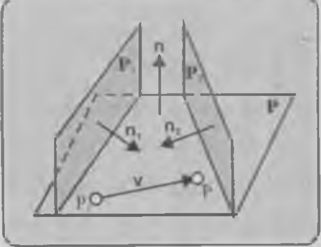


FIGURA 6.7

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{P} - \mathbf{P}_1) \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) = 0$$

Escribiendo el producto mixto de vectores en términos de sus componentes , tendremos :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

EJERCICIOS : Grupo 31

1. Dados los puntos M(3 , -1 , 2) y R(4 , -2 , -1) , hallar la ecuación del plano que pasa por M y es perpendicular al vector $\overline{MR}$.
2. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto S(3 , 4 , -5) y es paralelo a los vectores **a** = ⟨3 , 1 , -1⟩ y **b** = ⟨1 , -2 , 1⟩.
3. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos N(3 , -1 , 2) , R(4 , -1 , -1) y S(2 , 0 , 2)
4. Hallar la ecuación del plano que contiene a las rectas concurrentes

$$\mathscr{L}_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{7} \quad , \quad \mathscr{L}_2 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z}{-2}$$

5. Determinar el valor de m para que los planos $\mathbf{P}_1 : mx - 2y + 2z - 7 = 0$ y $\mathbf{P}_2 : 4x + my - 6z + 9 = 0$ sean perpendiculares.
6. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto S(2 , -1 , 1) y es perpendicular a los planos $\mathbf{P}_1 : 2x + z + 1 = 0$ y $\mathbf{P}_2 : y = 0$
7. **P** es un plano de ecuación vectorial $\mathbf{P} = P_0 + r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$, r , s ∈ **R** , y una normal es el vector **n**. Si P_1 y $P_2 \in \mathbf{P}$, demostrara que $\mathbf{n} \perp \overline{P_1P_2}$
8. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos $\mathbf{P}_1 : 2x - y + 3z = 1$ y $\mathbf{P}_2 : x + 2y + z = 0$
9. Para qué valores de a y b la recta $\mathscr{L} : x = 3 + 4t$, $y = 1 - 4t$, $z = -3 + t$, está contenida en el plano $\mathbf{P} : ax + 2y - 4z + b = 0$
10. Para qué valores de A y B el plano $\mathbf{P} : Ax + By + 3z - 5 = 0$ es perpendicular a la recta $\mathscr{L} : x = 3 + 2t , y = 5 - 3t , z = -2 - 2t$.
11. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(1 , -1 , -2)$ y $P_2(3 , 1 , 1)$ y es perpendicular al plano $x - 2y + 3z - 5 = 0$
12. Encuentre la ecuación del plano que contiene a las rectas paralelas $\mathscr{L}_1 : x = -2 + 2t$, $y = 1 + 4t$, $z = 2 - t$ y $\mathscr{L}_2 : x = 2 - 2t$, $y = 3 - 4t$, $z = 1 + t$
13. Encuentre la ecuación del plano que pasa por A(6 , 2 , -1) y perpendicular a la recta que es intersección de los planos

$$\mathbf{P}_1 : 4x - 3y + 2z + 5 = 0 \text{ y } \mathbf{P}_2 : 3x + 2y - z + 11 = 0$$

14. Encuentre la ecuación del plano que contiene a la recta $\mathscr{L} : x = 1 + 2t , y = -1 + 3t , z = 4 + t$ y al punto A(1 , -1 , 5)
15. Para qué valores de a y b , la recta $\mathscr{L} : \mathbf{P} = \langle 2 , -1 , 5\rangle + t\langle a , 4 , -3\rangle$, t ∈ **R** es perpendicular al plano $\mathbf{P} : 3x - 2y + bz + 1 = 0$
16. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(x_1 , y_1 , z_1)$ y $P_2(x_2 , y_2 , z_2)$ y es perpendicular al plano $\mathbf{P} : Ax + By + Cz + D = 0$, se puede representar en la forma siguiente :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

17. Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano $\mathbf{P}_1 : 4x - 3y + 2z - 9 = 0$ y que pasa por los puntos $P_1(2 , -6 , 4)$ y $P_2(3 , -7 , 5)$
18. Un plano pasa por los puntos extremos de los vectores **a** = ⟨1 , 3 , 1⟩ , **b** = ⟨4 , 2 , -1⟩ y **c** = ⟨3 , 0 , -4⟩ , si éstos tienen el origen común en el punto M(1 , -1 , 2)

6.2 DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

Sea S un punto del espacio y **P** un plano ,. Si T es cualquier punto sobre **P** , y **n** es un vector normal a **P** , entonces la distancia que separa a S de **P** es igual a la componente del vector **V** = **S** - **T** sobre **n**. Esto es

$$d(S , \mathbf{P}) = |\text{Comp}_{\mathbf{n}}\mathbf{V}| = \frac{|(\mathbf{S} - \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} \qquad (5)$$

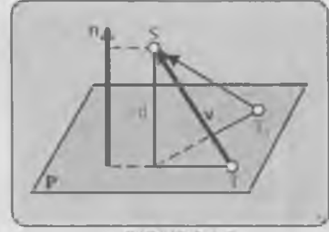


FIGURA 6.8

En la Figura 6.8 se ilustra el hecho de que la $d(S , \mathbf{P})$ no depende de la elección del punto específico T sobre **P**. La componente de **V** paralela a **n** es la misma para todos los puntos sobre **P**. Es decir, para cualquier otro punto T_1 se tiene

$$|\text{Comp}_{\mathbf{n}}(\mathbf{S} - \mathbf{T})| = |\text{Comp}_{\mathbf{n}}(\mathbf{S} - \mathbf{T}_1)|$$

Para obtener una expresión cartesiana de la distancia de S al plano $\mathbf{P} : Ax + By + Cz + D = 0$, consideremos los puntos $S(x_1 , y_1 , z_1)$, $T(x_2 , y_2 , z_2)$ y **n** = ⟨A , B , C⟩ una normal al plano **P**. Entonces , por la fórmula (5) :

$$d(S - \mathbf{P}) = \frac{|S \cdot n - T \cdot n|}{||n||} = \frac{|\langle x_1 , y_1 , z_1\rangle \cdot \langle A , B , C\rangle - \langle x_2 , y_2 , z_2\rangle \cdot \langle A , B , C\rangle|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{|A x_1 , B y_1 , C z_1 - (A x_2 , B y_2 , C z_2)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Como $T(x_2 , y_2 , z_2) \in \mathbf{P} \Rightarrow Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \Rightarrow D = -(Ax_2 + By_2 + Cz_2)$

$$d(S , \mathbf{P}) = \frac{|A x_1 , B y_1 , C z_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (6)$$

Si en la fórmula (6) sustituimos las coordenadas de S por las del origen , obtenemos

$$d(O , \mathbf{P}) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (7)$$

que es la fórmula para calcular la distancia del origen a un plano. Valiéndose de esta fórmula podemos calcular la distancia cartesiana entre dos planos paralelos. En efecto , sean $\mathbf{P}_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $\mathbf{P}_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$ dos planos paralelos.

Por la fórmula (7) : $d(O , \mathbf{P}_1) = \dfrac{|D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, $d(O , \mathbf{P}_2) = \dfrac{|D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Luego , $d(\mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2) = d(O , \mathbf{P}_2) - d(O , \mathbf{P}_1)$ o $d(\mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2) = d(O , \mathbf{P}_1) - d(O , \mathbf{P}_2)$

$$\therefore \quad d(\mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (8)$$

Ejemplo 1 Hallar la distancia del punto S(5 , -2 , 3) al plano $\mathbf{P} = \{\langle 2 , -1 , 6\rangle + t\langle 1 , 0 , 3\rangle + s\langle 2 , -2 , 3\rangle \mid t ; s \in \mathbb{R}\}$

Solución. Por simple inspección , un punto sobre el plano **P** es T(2 , -1 , 6) y dos vectores sobre **P** son , $a = \langle 1 , 0 , 3\rangle$ y $b = \langle 2 , -2 , 3\rangle$

$$\Rightarrow n = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \langle 6 , 3 , -2\rangle$$

Un vector que va de T a S es : $v = \langle 5 , -2 , 3\rangle - \langle 2 , -1 , 6\rangle = \langle 3 , -1 , -3\rangle$

Luego , usando la fórmula (5) obtenemos

$$d(S - \mathbf{P}) = \frac{|\langle 3 , -1 , -3\rangle \cdot \langle 6 , 3 , -2\rangle|}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{21}{7} = 3$$ ■

Ejemplo 2 Dados los planos paralelos $\mathbf{P}_1 : 2x - 3y + 6z - 14 = 0$ y $\mathbf{P}_2 : 4x - 6y + 12z + 21 = 0$; determinar si el punto S(3 , -2 , 5) está entre dichos planos.

Solución. Un punto estará entre dos planos paralelos si su distancia a cada plano es menor que la distancia entre ambos planos. Luego , haciendo uso de las fórmulas (6) y (8) tendremos

$$d(S , \mathbf{P}_1) = \frac{|2(3) - 3(-2) + 6(5) - 14|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{28}{7} = 4$$

$$d(S , \mathbf{P}_2) = \frac{|4(3) - 6(-2) + 12(5) + 21|}{\sqrt{16 + 36 + 144}} = \frac{105}{14} = 7.5$$

Obsérvese que los coeficientes de las ecuaciones de ambos planos son proporcionales , entonces para que sean iguales debemos multiplicar la ecuación de $\mathbf{P}_1$ por 2 , y así aplicar , la fórmula (8) , esto es , si

$$d(\mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Rightarrow d(\mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2) = \frac{|21 - (-28)|}{\sqrt{16 + 36 + 144}} = \frac{49}{14} = 3.5$$

Como $d(S , \mathbf{P}_2) > d(S , \mathbf{P}_1) > d(\mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2)$, el punto S no está entre ambos planos ■

Ejemplo 3 Si la base de un tetraedro es un triángulo cuyos vectores son R(1 , 3 , -3) , S(2 , 2, -1) y T(3 , 4 , -2) ; hallar la longitud de la altura del tetraedro desde el vértice D(2 , 9 , -2) a la base.

Solución. Si $a = \overline{RT} = T - R = \langle 2 , 1 , 1\rangle$

y $b = \overline{RS} = R - S = \langle 1 , -1 , 2\rangle$

un vector normal al plano de la base es

$$n = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\langle 1 , -1 , -1\rangle$$

Sin perder generalidad podemos elegir , $n = \langle 1 , -1 , -1\rangle$

Si $v = \overline{RD} = D - R \Rightarrow v = \langle 1 , 6 , 1\rangle$

Luego , usando la fórmula (5) obtenemos

FIGURA 6.9

$$h = \frac{|v \cdot n|}{||n||} = \frac{|\langle 1 , 6 , 1\rangle \cdot \langle 1 , -1 , -1\rangle|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = 2\sqrt{3}$$ ■

Ejemplo 4 Obtener la ecuación del plano que es paralelo al plano $\mathbf{P}_1 : 3x - 2y + 6z - 9 = 0$, y que está a 7 unidades del origen.

Solución. La familia de planos paralelos a $\mathbf{P}_1$ es

$$\mathbf{P} : 3x - 2y + 6z + k = 0 \qquad (1)$$

Si $d(O, \mathbf{P}) = 7$, usando la fórmula (7) tendremos

$$\frac{|k|}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = 7 \Rightarrow |k| = 49 \Leftrightarrow k = 49 \text{ ó } k = -49$$

Por lo tanto, en (1): $\mathbf{P} : 3x - 2y + 6z \pm 49 = 0$ ■

Ejemplo 5 Hallar la ecuación vectorial de la recta que se encuentra entre los planos $\mathbf{P}_1 : x - 2y - 2z = 12$ y $\mathbf{P}_2 : x - 2y - 2z = 6$

Solución. Un plano $\mathbf{P}$ paralelo a los planos $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$, y entre ambos, tiene la forma

$$\mathbf{P} : x - 2y - 2z = k , \ \forall k \in <6 , 12>$$

Evidentemente una recta $\mathscr{L}$ que se encuentra entre los planos $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ debe estar sobre el plano $\mathbf{P}$. Entonces ubiquemos dos puntos A y B ∈ $\mathbf{P}$ por donde pasará la recta $\mathscr{L}$. Esto es, si $x = k , \ y = -k , \ z = k \Rightarrow A(k , -k , k)$

$x = 3k , \ y = k , \ z = 0 \Rightarrow B(3k , k , 0)$

El vector de dirección de la recta $\mathscr{L}$ es, $\mathbf{a} = \vec{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = \langle 2k , 2k , -k \rangle$

Por lo tanto, la ecuación vectorial de la recta es

$$\mathscr{L} : \mathbf{P} = \langle k , -k , k \rangle + t\langle 2k , 2k , -k \rangle , t \in \mathbf{R} , k \in <6 , 12>$$ ■

EJERCICIOS : Grupo 32

1. Hallar la distancia del punto S al plano $\mathbf{P}$ dados.
   a) S(4 , -1 , 5) , $\mathbf{P} = \{\langle 1 , -3 , 1 \rangle + t\langle 2 , 1 , -2 \rangle + s\langle 1 , 3 , 4 \rangle\}$
   b) S(4 , 2 , -3) , $\mathbf{P} = \{\langle 1 - 5s - 6t , -2 + 4s + 7t , 1 - 2s + 2t \rangle , s , t \in \mathbf{R}\}$
   c) S(9 , 3 , -5) , $\mathbf{P} = 2x + 3y - 6z - 15 = 0$
2. Hallar la distancia entre los planes paralelos dados
   a) $\mathbf{P}_1 : 2x - y + 2z + 9 = 0$, $\mathbf{P}_2 : 4x - 2y + 4z - 21 = 0$
   b) $\mathbf{P}_1 : 6x - 18y - 9z - 28 = 0$, $\mathbf{P}_2 : 4x - 12y - 6z - 7 = 0$
   c) $\mathbf{P}_1 : 30x - 32y + 24z - 75 = 0$, $\mathbf{P}_2 : 15x - 17y + 12z - 25 = 0$
3. Dos caras de un cubo están en los planos $\mathbf{P}_1 : 2x - 2y + z - 1 = 0$ y $\mathbf{P}_2 : 2x - 2y + z + 5 = 0$, calcular el volumen de este cubo.
4. Si la base de un tetraedro es un triángulo de vértices R(1 , -2 , 1) , S(-4 , 2 , -1) y T(-5 , 5 , 3) ; hallar la longitud de la altura del tetraedro trazada desde el vértice D(4 , 2 , -3) a la base.

5. Hallar la ecuación del plano que es paralelo al plano $\mathbf{P}_1 : x - 3y + 5z - 8 = 0$ y que está a 3 unidades del origen.
6. Hallar las ecuaciones de los planos paralelos al plano $\mathbf{P} : 2x - z - 3 = 0$, que están a la distancia 5 unidades de él.
7. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos equidistantes de los dos planos paralelos $\mathbf{P}_1 : 5x - 3y + z + 3 = 0$ y $\mathbf{P}_2 : 10x - 6y + 2z + 7 = 0$
8. Hallar las ecuaciones de los planos que dividen por la mitad los ángulos diedros formados por los planos concurrentes $\mathbf{P}_1 : 2x - y + 5z + 3 = 0$ y $\mathbf{P}_2 : 2x - 10y + 4z - 2 = 0$
9. Hallar la distancia del punto (-1 , 1 , -2) al plano que pasa por los puntos R(1 , -1 , 1) , S(-2 , 1 , 3) y T(4 , -5 , 2)
10. Hallar un punto simétrico de P(36 , 20 , -17) respecto del plano formado por las rectas $\mathscr{L}_1 = \{\langle 1 , 2 , 3 \rangle + t\langle 0 , 4 , 3 \rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$ y $\mathscr{L}_2 : \{\langle 1 , -2 , 0 \rangle + s\langle 3 , 0 , 4 \rangle \mid s \in \mathbf{R}\}$

6.3 INTERSECCIONES DE PLANOS

Dos planos $\mathbf{P}_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $\mathbf{P}_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, cuyos vectores normales no son paralelos se intersecan en una recta $\mathscr{L}$. Esta recta recibe el nombre de *recta de intersección de dos planos*. Como todo punto de la recta $\mathscr{L}$ pertenece también a ambos, su ecuación cartesiana o biplanar suele escribirse de la forma

$$\mathscr{L} : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Si $\mathbf{n}_1$ es una normal al plano $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{n}_2$ es una normal al plano $\mathbf{P}_2$, entonces un vector de dirección de $\mathscr{L}$ está dado por

$$\mathbf{a} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$$

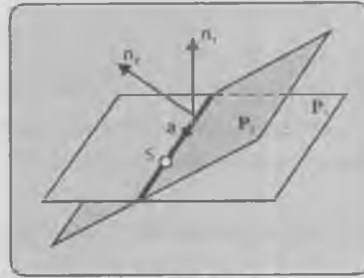


FIGURA 6.10

Para determinar $\mathscr{L}$ vectorialmente, bastará obtener al menos las coordenadas de un punto S sobre $\mathscr{L}$, sabiendo que pertenece también a los planos $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$, y si P(x , y , z) representa un punto cualquiera de $\mathscr{L}$ en el espacio, entonces

$$\mathscr{L} : \mathbf{P} = \mathbf{S} + t(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)$$

es una ecuación paramétrica vectorial de $\mathscr{L}$.

Ejemplo 1 Hallar la ecuación paramétrica vectorial de la recta de intersección de los planos $\mathbf{P}_1 : x - 2y + z = 0$ y $\mathbf{P}_2 : 3x + y + 2z - 7 = 0$

Solución. Los vectores normales de ambos planos son $\mathbf{n}_1 = \langle 1, -2, 1\rangle$ y $\mathbf{n}_2 = \langle 3, 1, 2\rangle$. Entonces un vector de dirección de la recta de intersección es

$$\mathbf{a} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \langle -5, 1, 7\rangle$$

Como la coordenada z de **a** no es cero, la recta $\mathscr{L}$ no es paralela al plano XY, y se puede sustituir a z por cero en las ecuaciones de los planos para obtener el punto S de intersección de $\mathscr{L}$ y el plano XY. Esto es, si

$$z = 0 \Rightarrow (x - 2y = 0) \cap (3x + y = 7) = (2, 1) \Rightarrow S(2, 1, 0) \in \mathscr{L}$$

Por tanto, la ecuación paramétrica vectorial de $\mathscr{L}$ es

$$\mathscr{L} : \mathbf{P} = \langle 2, 1, 0\rangle + t\langle -5, 1, 7\rangle, t \in \mathbf{R}$$ ■

OBSERVACION 6.5 *Trazas de un plano*

La intersección de un plano **P** en el espacio con uno de los planos coordenados recibe el nombre de *traza* de **P** en ese plano coordenado. Frecuentemente se puede emplear las trazas de un plano para facilitar el trazado de su gráfica. En la Figura 6.11 se muestra la parte de un plano, con ecuación

$$\mathbf{P} : 2x + 4y + 3z - 12 = 0 \qquad (1)$$

que está en el primer octante.

La traza del plano **P** en el plano XY se obtiene haciendo z = 0 en (1). Esto es

$$2x + 4y = 12 \Rightarrow x + 2y = 6$$

Haciendo x = 0 en (1) obtenemos la ecuación de la traza en YZ, o sea: $4y + 3z = 12$

Finalmente, haciendo y = 0 en (1) obtenemos la ecuación de la traza en XZ: $2x + 3z = 12$

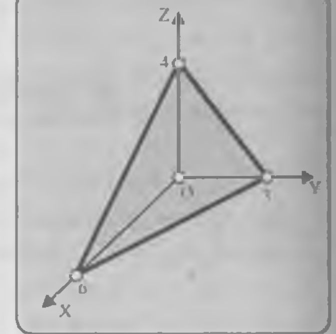


FIGURA 6.11

OBSERVACION 6.6 *Ecuación simétrica del plano*

Si en la ecuación del plano $\mathbf{P} : Ax + By + Cz + D = 0$, ninguno de los coeficientes A, B, C y D es igual a cero, esta ecuación se puede transformar a la forma

$$\boxed{\mathbf{P} : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1} \qquad (9)$$

en donde, $a = -D/A$, $b = -D/B$ y $c = -D/C$ son las magnitudes de los segmentos que el plano **P** intercepta en los ejes X, Y y Z respectivamente. La ecuación **(9)** se llama *ecuación segmentaria o simétrica* del plano.

Ejemplo 2 Las ecuaciones de las intersecciones de un plano **P** con el plano XY y el plano YZ son las rectas $\mathscr{L}_1 : 2x - y - 7 = 0, z = 0$, y $\mathscr{L}_2 : y + 3z + 7 = 0, x = 0$, respectivamente. Hallar la ecuación de dicho plano **P**.

Solución. Escribiendo las ecuaciones de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ en su forma simétrica, tenemos

$$\mathscr{L}_1 : \frac{x}{1} = \frac{y+7}{2}, z = 0 \quad , \quad \mathscr{L}_2 : \frac{y+7}{-3} = \frac{z}{1}, x = 0$$

Entonces los vectores de dirección son : $\mathbf{a}_1 = \langle 1, 2, 0\rangle$ y $\mathbf{a}_2 = \langle 0, -3, 1\rangle$

El vector normal al plano es, $\mathbf{n} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \Leftrightarrow \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \langle 2, -1, -3\rangle$

Un punto de $\mathscr{L}_1$ es $P_1(0, -7, 0)$ y como $P_1 \in \mathbf{P}$, entonces si P(x, y, z) es un punto cualquiera de **P**, implica que

$$(P - P_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow \langle x, y + 7, z\rangle \cdot \langle 2, -1, -3\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P} : 2x - y - 3z - 7 = 0$$ ■

Ejemplo 3 Hallar la ecuación del plano **P** que es paralelo al plano cuyas intersecciones con los ejes X, Y y Z son 3, -1 y 2 respectivamente, y que pasa por el punto S(5, -8, 3).

Solución. Por la fórmula **(9)**, la ecuación del plano con $a = 3$, $b = -1$ y $c = 2$ es

$$\mathbf{P}_1 : \frac{x}{3} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{P}_1 : 2x - 6y + 3z - 6 = 0$$

Si $\mathbf{P} \parallel \mathbf{P}_1$, entonces la ecuación de **P** tendrá la forma, $\mathbf{P} : 2x - 6y + 3z + k = 0$

Dado que $S(5, -8, 3) \in \mathbf{P} \Rightarrow 2(5) - 6(-8) + 3(3) + k = 0$, de donde obtenemos, $k = -67$

$$\therefore \mathbf{P} : 2x - 6y + 3z - 67 = 0$$ ■

Ejemplo 4 Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos S(-1, 4, -1) y T(-13, 2, -10) y que intercepta a los ejes X y Z segmentos de igual longitud y diferente de cero.

Solución. Si $|a| = |c| \Leftrightarrow a = c$ ó $a = -c$

Para $a = c$, la ecuación del plano es $\mathbf{P} : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{a} = 1 \qquad (\alpha)$

Si $S(-1,4,-1) \in \mathbf{P} \Rightarrow -\frac{1}{a}+\frac{4}{b}-\frac{1}{a}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{b}-\frac{2}{a}=1$ (1)

$T(-13,2,-10) \in \mathbf{P} \Rightarrow -\frac{13}{a}+\frac{2}{b}-\frac{10}{a}=1 \Leftrightarrow \frac{2}{b}-\frac{23}{a}=1$ (2)

Resolviendo (1) y (2) por simultáneas obtenemos : $a=-44$ y $b=88/21$

Luego , en (α) se tiene , $\mathbf{P}: 2x-21y+2z+88=0$

Para $a=-c$, la ecuación del plano es $\mathbf{P}: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{a}=1$ (β)

Si $S(-1,4,-1) \in \mathbf{P} \Rightarrow -\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{a}=1 \Rightarrow b=4$

$T(-13,2,-10) \in \mathbf{P} \Rightarrow -\frac{13}{a}+\frac{2}{b}+\frac{10}{a}=1$, de donde obtenemos , $a=-6$

Por lo tanto , en (β) se tiene , $\mathbf{P}: 2x-3y-2z+12=0$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 33*

1. Obtener una ecuación paramétrica vectorial de la recta de intersección de los pares de planos cuyas ecuaciones se dan
   a) $\mathbf{P}_1: 2x+3y-z=0$, $\mathbf{P}_2: y-3z+4=0$
   b) $\mathbf{P}_1: 3x+y-z-6=0$, $\mathbf{P}_2: 4x-2y-3z+2=0$
   c) $\mathbf{P}_1: x+y+3z-1=0$, $\mathbf{P}_2: 2x-3y+z-7=0$
2. Las ecuaciones de las intersecciones del plano **P** con el plano XY y el plano YZ son $\mathscr{L}_1: x-4y=12, z=0$; $\mathscr{L}_2: 2y+5z=-6, x=0$, respectivamente. Hallar la ecuación del plano **P**.
3. Para qué valor de m la recta $\mathscr{L}: \begin{cases} 3x-2y+z+3=0 \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$ es paralela al plano $\mathbf{P}: 2x-y+mz-2=0$
4. Hallar la ecuación del plano que es paralelo al plano cuyas intersecciones con los ejes X , Y y Z son -1 , 3 y 5 respectivamente , y que pasa por S(0 , 1 , -1)
5. Hallar el volumen de la pirámide limitada por el plano $\mathbf{P}: 2x-3y+6z=12$ y por los planos coordenados.
6. Hallar la ecuación del plano que intercepta al eje OZ el segmento $c=-5$ y es perpendicular al vector $\mathbf{v}=\langle -2,1,3\rangle$
7. Hallar la ecuación del plano que es perpendicular al plano $\mathbf{P}_1: 2x-2y+4z=5$ y que intercepta en los ejes coordenados OX y OY los segmentos $a=-2$ y $b=2/3$.

8. Averiguar para que valor de D la recta $\mathscr{L}: \begin{cases} 2x+3y-z+D=0 \\ 3x-2y+2z-6=0 \end{cases}$, corta
   a) el eje X , b) el eje Y , c) el eje Z.
9. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto S(2 , -3 , -4) y que intercepta en los ejes coordenados segmentos de igual magnitud y diferentes de cero (se supone que cada segmento parte del origen de coordenadas).
10. Hallar las ecuaciones de los planos que pasan por S(4 , 3 , 2) y que interceptan en los ejes coordenados segmentos de igual longitud y diferentes de cero.
11. Demuéstrese que las rectas
    $\mathscr{L}_1: \begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$, y $\mathscr{L}_2: \frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$
    son paralelas y hállese la distancia $d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$
12. Calcular el área del triángulo intersectado en el ángulo OXY por el plano $\mathbf{P}: 5x-6y+3z+120=0$

6.4 FAMILIA DE PLANOS QUE PASAN POR LA INTERSECCION DE DOS PLANOS

Dados dos planos no paralelos

$\mathbf{P}_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ y $\mathbf{P}_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

la ecuación de la familia o haz de planos que pasan por la intersección de $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ está dada por la ecuación

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad (10)$$

donde k se denomina , *parámetro* de la familia.

Ejemplo 1 Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $\mathbf{P}_1: 5x-2y-z-3=0$, $\mathbf{P}_2: x+3y-2z+5=0$ y es paralelo al vector $\mathbf{v}=\langle 5,-1,3\rangle$.

Solución. Por la fórmula (10) , el haz de planos está dado por

$$5x-2y-z-3+k(x+3y-2z+5)=0 \quad (1)$$

de donde obtenemos :

$$(5+k)x+(3k-2)y-(1+2k)z-3+5k=0 \Rightarrow \mathbf{n}=\langle 5+k, 3k-2, -1-2k\rangle$$

Dado que un miembro de la familia es paralelo al vector $\mathbf{v}=\langle 5,-1,3\rangle$, entonces

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}=0 \Rightarrow 5(5+k)-1(3k-2)+3(-1-2k)=0 \Leftrightarrow k=6$$

Sustituyendo en (1) obtenemos la ecuación del plano buscado , esto es

$$\mathbf{P}: 11x+16y-13z+27=0$$ ■

Ejemplo 2 Hallar la ecuación del plano que pertenece al haz de planos

$$\mathbf{P}: x-3y+7z+36+k(2x+y-z-15)=0$$

cuya distancia al origen de coordenadas es igual a 3

Solución. De la ecuación de la familia de planos dada se tiene

$$\mathbf{P}: (1+2k)x+(k-3)y+(7-k)z+(36-15k)=0$$

Por la fórmula (7) , si $d(O\,,\mathbf{P})=3 \Rightarrow \dfrac{|36-15k|}{\sqrt{(1+2k)^2+(k-3)^2+(7-k)^2}}=3$

$$\Rightarrow |12-5k|=\sqrt{6k^2-16k+59}$$

de donde obtenemos : $19k^2-104k+85=0 \Leftrightarrow k=1$ ó $k=85/19$

Sustituyendo en la ecuación del haz de planos se tiene dos soluciones

$$\mathbf{P}_1: 3x-2y+6z+21=0 \quad \text{ó} \quad \mathbf{P}_2: 189x+28y+48z-591=0$$ ■

Ejemplo 3 Averiguar si el plano $\mathbf{P}: 4x-8y+17z-8=0$ pertenece a la familia de planos : $5x-y+4z+k(2x-2y-3z+2)=0$

Solución. Supóngase la familia de planos $\mathbf{P}_1+k(\mathbf{P}_2)=0$

Entonces los vectores normales de cada plano son : $\mathbf{n}=\langle 4,-8,17\rangle$

$\mathbf{n}_1=\langle 5,-1,4\rangle$ y $\mathbf{n}_2=\langle 2,2,-3\rangle$.

El vector de dirección de la recta de intersección de $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ es :

$$\mathbf{a}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}=\langle -5,23,12\rangle$$

El vector de dirección de la recta de intersección de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}_1$ es :

$$\mathbf{a}_1=\mathbf{n}\times\mathbf{n}_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -8 & 17 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}=\langle -15,69,36\rangle=3\langle -5,23,12\rangle$$

El vector de dirección de la recta de intersección de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}_2$ es :

$$\mathbf{a}_2=\mathbf{n}\times\mathbf{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -8 & 17 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}=\langle -10,46,24\rangle=2\langle -5,23,12\rangle$$

Como $\mathbf{a}\,||\,\mathbf{a}_1\,||\,\mathbf{a}_2$, el plano $\mathbf{P}$ pertenece al haz de planos $\mathbf{P}_1+k\,\mathbf{P}_2=0$ ■

DEFINICION 6.3 ***Angulo diedro entre dos planos***

El ángulo diedro $0°<\theta<180°$, que forman dos planos orientados $\mathbf{P}_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ y $\mathbf{P}_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ se define como el ángulo que forman las normales a ambos planos como se indica en la Figura 6.12. Entonces, si $\mathbf{n}_1=\langle A_1,B_1,C_1\rangle$ y $\mathbf{n}_2=\langle A_2,B_2,C_2\rangle$, se tiene

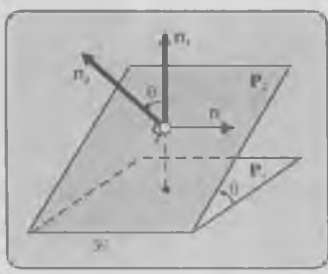
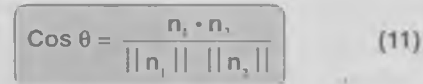


FIGURA 6.12



$$\cos\theta=\frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{||\mathbf{n}_1||\;||\mathbf{n}_2||} \quad (11)$$

En la Figura 6.12 obsérvese también que la recta de intersección $\mathscr{L}$ sigue la dirección del vector $\mathbf{n}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$.

Ejemplo 4 Hallar el coseno del ángulo diedro que forma los planos

$$\mathbf{P}_1: 4x+2y-6z+3=0 \;\text{ y }\; \mathbf{P}_2: 2x-y+3z+5=0$$

Solución. Por simple inspección : $\mathbf{n}_1=\langle 4,2,-6\rangle$ y $\mathbf{n}_2=\langle 2,-1,3\rangle$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\langle 4,2,-6\rangle\cdot\langle 2,-1,3\rangle}{(\sqrt{16+4+36})(\sqrt{4+1+9})}=\frac{8-2-18}{(\sqrt{56})(\sqrt{15})}$$

$$\therefore \cos\theta=-\frac{3}{7}$$ ■

DEFINICION 6.4 ***Angulo entre una recta y un plano***

Dados una recta $\mathscr{L}: \mathbf{P}=\mathbf{P}_1+t\,\mathbf{a}$ y un plano $\mathbf{P}$ con normal $\mathbf{n}$, se define el ángulo entre $\mathscr{L}$ y $\mathbf{P}$ al complemento del ángulo que forma el vector de dirección de $\mathscr{L}$ con la normal al plano $\mathbf{P}$. En efecto , en la Figura 6.13 se observa claramente que

$$\alpha=90°-\theta$$

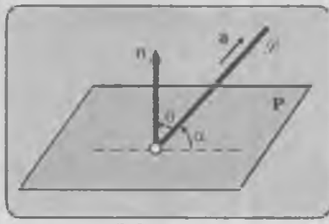
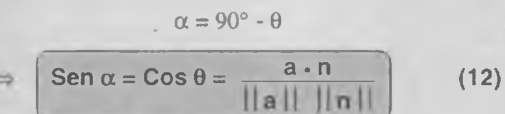


FIGURA 6.13



$$\Rightarrow \operatorname{Sen}\alpha=\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}}{||\mathbf{a}||\;||\mathbf{n}||} \quad (12)$$

Ejemplo 5 Hallar el ángulo que forma la recta $\mathscr{L}: \begin{cases} 2x+y-z=3 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

con el plano coordenado XOY

Solución. Un vector de dirección de la recta $\mathscr{L}$ es

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \langle 2, 1, -1\rangle \times \langle 1, 1, 1\rangle = \langle 2, -3, 1\rangle$$

Para el plano XOY , $\mathbf{n} = \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$

$$\Rightarrow \text{Sen}\alpha = \frac{\langle 2, -3, 1\rangle \cdot \langle 0, 0, 1\rangle}{(\sqrt{4+1+9})(\sqrt{1})} = \frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow \alpha = \text{arc Sen}(1/\sqrt{14})$$ ■

DEFINICION 6.5 *Proyección ortogonal de una recta sobre un plano*

Se denomina proyección ortogonal de una recta $\mathscr{L}: P = P_1 + t\mathbf{a}$, sobre un plano $\mathbb{P}$, de normal $\mathbf{n}$, a la intersección del plano $\mathbb{P}$ con el plano $\mathbb{P}_1$, de ecuación $\mathbb{P}_1 = \{P \mid P = P_1 + r\mathbf{a} + s\mathbf{n}\}$, el cual es perpendicular al plano $\mathbb{P}$.

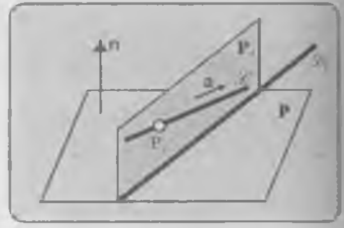


FIGURA 6.14

Ejemplo 6 Hallar las ecuaciones de la proyección de la recta

$$\mathscr{L}: \begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}, \text{ sobre el plano } \mathbb{P}: 2x - y - z - 1 = 0$$

Solución. De la recta $\mathscr{L}$ se tiene , $\mathbf{n}_1 = \langle 5, -4, -2\rangle$ y $\mathbf{n}_2 = \langle 1, 0, 2\rangle$ y del plano $\mathbb{P}$, $\mathbf{n} = \langle 2, -1, 1\rangle$. Un vector de dirección de la recta $\mathscr{L}$ es

$$\mathbf{a} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\langle 2, 3, -1\rangle$$

La normal del plano $\mathbb{P}_1$ formado por a y n es

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \langle 2, -4, -8\rangle$$

Luego , la ecuación del plano que contiene a la recta $\mathscr{L}$ es $\mathbb{P}_1: 2x - 4y - 8z + D = 0$

Elegimos un punto cualquiera de $\mathscr{L}$, tal como $P_1(0, -7/4, 1)$

Como $P_1 \in \mathbb{P}_1$, entonces : $2(0) - 4(-7/4) - 8(1) + D = 0$, de donde obtenemos $D = 1$

$$\therefore \mathbb{P}_1: 2x - 4y - 8z + 1 = 0$$

Dado que $\mathscr{L}_1 \in (\mathbb{P} \cap \mathbb{P}_1)$, entonces las ecuaciones de la proyección de $\mathscr{L}$ sobre el plano $\mathbb{P}$ son

$$\mathscr{L}: \begin{cases} 2x - 4y - 8z + 1 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 34*

1. Hallar la ecuación del plano que pertenece al haz de planos
$$3x - 4y + z + 6 + k(2x - 3y + z + 2) = 0$$
y es equidistante de los puntos S(3 , -4 , -6) y T(1 , 2 , 2)

2. Hallar la ecuación del plano que pertenece a la familia de planos
$$10x - 8y - 15z + 56 + k(4x + y + 3z - 1) = 0$$
cuya distancia al punto S(3 , -2 , -3) es igual a 7.

3. Determinar los valores de m y n para que el plano $5x + my + 4z + n = 0$ pertenezca al haz de planos : $3x - 7y + z - 3 + k(x - 9y - 2z + 5) = 0$

4. Averiguar si el plano $\mathbb{P}: 5x - 9y - 2z + 12 = 0$ pertenece al haz de planos
$$2x - 3y + z - 5 + k(x - 2y - z - 7) = 0$$

5. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $\mathbb{P}_1: 5x - 2y - z - 3 = 0$ y $\mathbb{P}_2: x + 3y - 2z + 5 = 0$ y es paralelo al vector $v = \langle 7, 9, 17\rangle$.

6. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $3x - 2y + z - 3 = 0$, $x - 2z = 0$ y es perpendicular al plano $x - 2y + z + 5 = 0$

7. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $\mathbb{P}_1: 2x + y - z + 1 = 0$, $\mathbb{P}_2: x + y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo al segmento limitado por los puntos S(2 , 5 , -3) y T(3 , -2 , 2)

8. Hallar la ecuación del plano que pertenece a la familia de planos
$$3x - 4y + z + 6 + k(2x - 3y + z + 2) = 0$$
y es equidistante de los puntos $M_1(3, -4, -6)$, $M_2(1, 2, 2)$.

9. Hallar la ecuación del plano que pertenece al haz de planos
$$4x + 13y - 2z - 60 + k(4x + 3y + 3z - 30) = 0$$
y recorta del ángulo OXY un triángulo de área igual a $6u^2$

10. Averiguar si el punto M(3 , 2 , -1) está situado en el ángulo agudo u obtuso formado por los planos $\mathbb{P}_1: x - 2y + 3z - 5 = 0$ y $\mathbb{P}_2: 4x - 3y + 2z + 5 = 0$

11. Hallar la ecuación del plano que divide por la mitad el ángulo diedro formado por los planos $\mathbb{P}_1: 2x - y + 2z - 3 = 0$ y $\mathbb{P}_2: 3x + 2y - 6z - 1 = 0$ en que está situado el punto M(1 , 2 , -3).

12. Hallar en el haz : $2x - 3y + z - 3 + k(x + 3y + 2z + 1) = 0$ un plano que :
a) sea paralelo al eje OX ; b) sea paralelo al eje OZ.

13. Hallar las ecuaciones de las proyecciones de la recta

$\mathscr{L}: \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - 3y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$, sobre el plano $\mathbf{P}: x + 2y + 3z - 5 = 0$

14. Hallar las ecuaciones de las proyecciones de la recta

$\mathscr{L}: \begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0 \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$, sobre los planos coordenados

15. Se dan el plano $\mathbf{P}: x + y - z + 1 = 0$ y la recta $\mathscr{L}: x = 1,\ \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$, con la particularidad de que $\mathscr{L} \in \mathbf{P}$ (compruébese). Se pide :
   a) Calcular el sen α y las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano. (α es el ángulo entre la recta y el plano).
   b) Escribir la ecuación de un plano que pase por la recta $\mathscr{L}$ y es perpendicular al plano $\mathbf{P}$.
   c) Escribir las ecuaciones de la proyección de la recta $\mathscr{L}$ sobre el plano $\mathbf{P}$.

6.5 INTERSECCIONES DE RECTAS Y PLANOS

Dados una recta $\mathscr{L}$ y un plano $\mathbf{P}$ en el espacio hay tres posibles configuraciones (Figura 6.13), o bien la recta es paralela al plano pero no interseca , o bien es paralela pero está completamente contenida en el plano , o bien interseca al plano en un sólo punto.

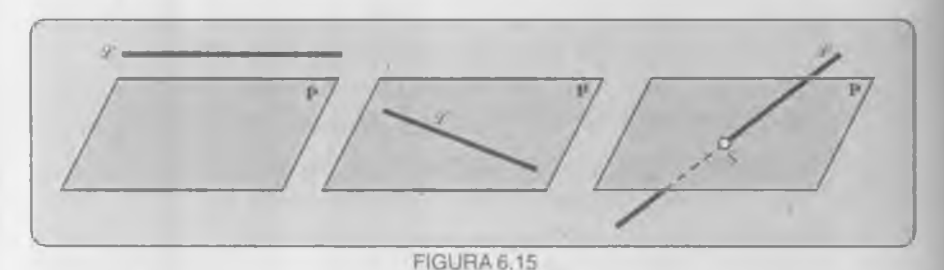


FIGURA 6.15

Los dos ejemplos siguientes ilustran como obtener la intersección de una recta $\mathscr{L}$ con un plano $\mathbf{P}$.

Ejemplo 1 Hallar las coordenadas del punto S de intersección de la recta $\mathscr{L}_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{4}$ y el plano $\mathbf{P}: x + 4y - z + 5 = 0$.

Solución. Las ecuaciones paramétricas de la recta $\mathscr{L}$ son :

$x = 1 + t,\ y = -2 + 2t,\ z = 3 + 4t$. Si $S \in \mathscr{L} \Rightarrow S(1 + t, -2 + 2t, 3 + 4t)$ (1)

y como también $S \in \mathbf{P} \Rightarrow (1 + t) + 4(-2 + 2t) - (3 + 4t) + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Por lo tanto , en (1) se tiene : $\mathscr{L} \cap \mathbf{P} = S(2, 0, 7)$ ■

Ejemplo 2 Hallar la intersección de la recta $\mathscr{L}: P = \langle -5, 1, 3\rangle + r\langle 2, -2, 3\rangle,\ r \in \mathbf{R}$, con el plano $\mathbf{P}: P = \langle 1, 3, -2\rangle + \alpha\langle 1, -2, 3\rangle + \beta\langle 2, 1, -2\rangle,\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Solución. El vector normal al plano es : $\mathbf{n} = \langle 1, -2, 3\rangle \times \langle 2, 1, -2\rangle = \langle 1, 8, 5\rangle$

Si $P(x, y, z) \in \mathbf{P} \Rightarrow (P - P_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow P \cdot \mathbf{n} = P_1 \cdot \mathbf{n}$

$\Rightarrow \langle x, y, z\rangle \cdot \langle 1, 8, 5\rangle = \langle 1, 3, -2\rangle \cdot \langle 1, 8, 5\rangle$

de donde obtenemos la ecuación general del plano , $\mathbf{P}: x + 8y + 5z - 15 = 0$

Si $S \in \mathscr{L} \Rightarrow \exists\, r \in \mathbf{R}$, tal que , $S = \langle -5 + 2r, 1 - 2r, 3 + 3r\rangle$ (1)

Pero también $S \in \mathbf{P} \Rightarrow (-5 + 2r) + 8(1 - 2r) + 5(3 + 3r) - 15 = 0 \Leftrightarrow r = -3$

Por lo tanto en (1) se tiene : $\mathscr{L} \cap \mathbf{P} = S(-11, 7, -6)$ ■

Veamos ahora , algunos ejemplos mixtos relativos a la ecuación del plano y a las ecuaciones de la recta.

MISCELANEA DE EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto S(1 , -2 , 1) y es perpendicular a la recta $\mathscr{L}: \begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$

Solución. El vector de dirección de la recta $\mathscr{L}$ es la normal al plano buscado , esto es

$$\mathbf{a} = \mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \langle 1, 2, 3\rangle$$

Si $P(x, y, z) \in \mathbf{P} \Rightarrow (P - S) \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow P \cdot \mathbf{n} = S \cdot \mathbf{n}$

$\Rightarrow \langle x, y, z\rangle \cdot \langle 1, 2, 3\rangle = \langle 1, -2, 1\rangle \cdot \langle 1, 2, 3\rangle$

de donde obtenemos la ecuación del plano

$\mathbf{P}: x + 2y + 3z = 0$ ■

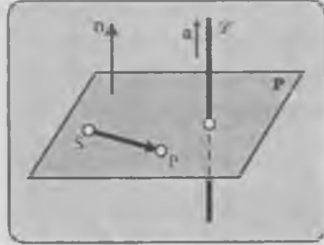


FIGURA 6.16

Ejemplo 2 Hallar la proyección del punto S(2 , -1 , 3) sobre la recta $\mathscr{L}: x = 3t\ ,\ y = -7 + 5t\ ,\ z = 2 + 2t$.

Solución. La proyección de S sobre la recta $\mathscr{L}$ es el pie de la perpendicular bajada de S sobre dicha recta , y se encuentra en la intersección de la recta con el plano que contiene al punto S y es perpendicular a $\mathscr{L}$. Esto es , si

$P(x , y , z) \in \mathbb{P} \Rightarrow (\mathbf{P} - \mathbf{S}) \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$

donde $\mathbf{n} = \langle 3 , 5 , 2\rangle$ es el vector de dirección de $\mathscr{L}$

$\Rightarrow \langle x , y , z\rangle \cdot \langle 3 , 5 , 2\rangle = \langle 2 , -1 , 3\rangle \cdot \langle 3 , 5 , 2\rangle$

$\therefore\ \mathbb{P}: 3x + 5y + 2z - 7 = 0$

Si $Q \in \mathscr{L} \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} \mid \mathbf{Q} = \langle 3t , -7 + 5t , z + 2t\rangle$ (1)

También $Q \in \mathbb{P} \Rightarrow 3(3t) + 5(-7 + 5t) + 2(2 + 2t) - 7 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Sustituyendo en (1) obtenemos la proyección buscada : Q(3 , -2 , 4) ∎

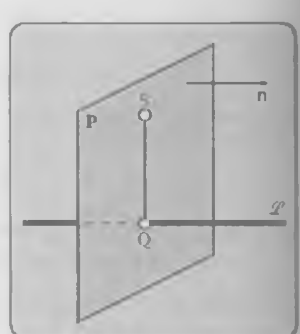


FIGURA 6.17

Ejemplo 3 Hallar el punto Q simétrico al punto S(4 , 1 , 6) respecto de la recta $\mathscr{L}: \begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0 \\ 2x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$

Solución. El vector de dirección de la recta $\mathscr{L}$ es

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\langle 2 , -2 , 1\rangle$$

Para hallar un punto $P_1 \in \mathscr{L}$, hacemos z = 0 en la ecuación biplanar de $\mathscr{L}$ y obtenemos

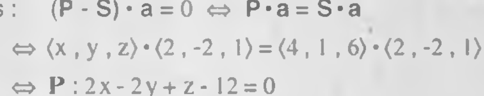
$(x - y + 12 = 0) \cap (2x + y + 3 = 0) = (-5 , 7) \Rightarrow P_1(-5 , 7 , 0)$

$\therefore\ \mathscr{L}: x = -5 + 2t\ ,\ y = 7 - 2t\ ,\ z = t$

Si $M \in \mathscr{L} \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} \mid \mathbf{M} = \langle -5 + 2t , 7 - 2t , t\rangle$ (1)

La ecuación del plano $\mathbb{P}$ que contiene al punto S y es perpendicular a $\mathscr{L}$ es : $(\mathbf{P} - \mathbf{S}) \cdot \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{a}$

FIGURA 6.18



$\Leftrightarrow \langle x , y , z\rangle \cdot \langle 2 , -2 , 1\rangle = \langle 4 , 1 , 6\rangle \cdot \langle 2 , -2 , 1\rangle$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}: 2x - 2y + z - 12 = 0$

También $M \in \mathbb{P} \Rightarrow 2(-5 + 2t) - 2(7 - 2t) + t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 4$

Sustituyendo en (1) obtenemos M(3 , -1 , 4)

Dado que M equidista de S(4 , 1 , 6) y Q(x , y , z) , implica que : $\mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q} + \mathbf{S})$

$\Rightarrow 2\langle 3 , -1 , 4\rangle = \langle x + 4 , y + 1 , z + 6\rangle \Leftrightarrow x = 2 , y = -3 , z = 2$

$\therefore$ Q(2 , -3 , 2) ∎

Ejemplo 4 Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos S(3 . 0 , 2) y T(4 . 1 , -1) y que es paralelo a la recta

$\mathscr{L}: \begin{cases} x - 2y + z - 2 = 0 \\ 2x + 3y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$

Solución. El vector de dirección de la recta $\mathscr{L}$ es

$$\mathbf{a} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \langle 2 , 4 , 7\rangle$$

Sea $\mathbf{v} = \overline{ST} = \langle 4 , 1 , 1\rangle - \langle 3 , 0 , 2\rangle = \langle 1 , 1 , -3\rangle$

Entonces la normal al plano $\mathbb{P}$ es

$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{a} = \langle 1 , 1 , -3\rangle \times \langle 2 , 4 , 7\rangle = \langle 19 , -10 , 3\rangle$

Si $S \in \mathbb{P} \Rightarrow (\mathbf{P} - \mathbf{S}) \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$

$\Leftrightarrow \langle x , y , z\rangle \cdot \langle 19 , -10 , 3\rangle = \langle 3 , 0 , 2\rangle \cdot \langle 19 - 10 , 3\rangle$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}: 19x - 10y + 3z - 63 = 0$ ∎

FIGURA 6.19

Ejemplo 5 Hallar en el plano $\mathbb{P}: 2x - 3y + 3z - 17 = 0$ un punto P de modo que la suma de sus distancias a los puntos A(3 , -4 , 7) y B(-5 , -14 , 17) sea mínima.

Solución. El punto P buscado se halla en la intersección del plano $\mathbb{P}$ con la recta que pasa por B y A' , simétrico de A respecto al plano $\mathbb{P}$.

La recta que pasa por A , perpendicular al plano $\mathbb{P}$, tiene por ecuación

$\mathscr{L}_1: \mathbf{P} = \langle 3 , -4 , 7\rangle + r\langle 2 , -3 , 3\rangle ,\ r \in \mathbb{R}$

Si $Q \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R} \mid \mathbf{Q} = \langle 3 + 2r , -4 - 3r , 7 + 3r\rangle$ (1)

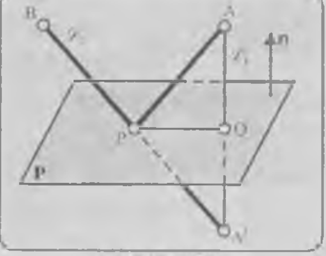


FIGURA 6.20

También $Q \in \mathbb{P} \Rightarrow 2(3 + 2r) - 3(-4 - 3r) + 3(7 + 3r) - 17 = 0$

de donde obtenemos , r = -1 ; luego en (1) : $\mathbf{Q} = \langle 1 , -1 , 4\rangle$

Como Q equidista de A y A' $\Rightarrow \mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A'}) \Rightarrow \mathbf{A'} = 2\mathbf{Q} - \mathbf{A}$

$\Rightarrow \mathbf{A'} = 2\langle 1 , -1 , 4\rangle - \langle 3 , -4 , 7\rangle = \langle -1 , 2 , 1\rangle$

Un vector de dirección de la recta que pasa por B y A' es

$\mathbf{v} = \overline{BA'} = \langle -1 , 2 , 1\rangle - \langle -5 , -14 , 17\rangle = 4\langle 1 , 4 , -4\rangle$

y su ecuación vectorial es $\mathscr{L}_2: \mathbf{P}\ \langle -1 , 2 , 1\rangle + t\langle 1 , 4 , -4\rangle ,\ t \in \mathbb{R}$

Si $P \in \mathscr{L}_2 \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R}$. tal que : $\mathbf{P} = \langle -1 + t , 2 + 4t , 1 - 4t\rangle$ (2)

También $P \in \mathbb{P} \Rightarrow 2(-1 + t) - 3(2 + 4t) + 3(1 - 4t) - 17 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Finalmente , sustituyendo en (2) obtenemos : P(-2 , -2 , 5) ∎

Ejemplo 6 La posición inicial del punto M(x , y , z) , en un movimiento uniforme rectilíneo en dirección del vector $\mathbf{a} = \langle -2 , 2 , 1\rangle$ es $M_0(15 , -24 , -16)$; la velocidad es v = 12. Tras verificar que la trayectoria del punto M corta al plano $\mathbf{P} : 3x + 4y + 7z = 17$, hallar : a) el punto P de su intersección , b) la longitud del segmento $\overline{M_0P}$, c) el tiempo que se necesita para que el punto M haga el recorrido desde M_0 hasta P.

Solución. a) La ecuación vectorial de la trayectoria es

$$\mathscr{L} = \{\langle 15 , -24 , -16\rangle + t\langle -2 , 2 , 1\rangle , t \in \mathbf{R}\}$$

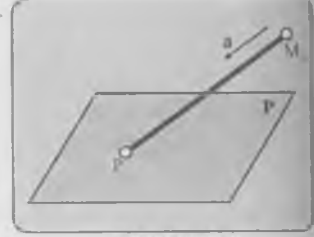


FIGURA 6.21

Si $P \in \mathscr{L} \Rightarrow P = \langle 15 - 2t , -24 + 2t , -16 + t\rangle$ (1)

$P \in \mathbf{P} \Rightarrow 3(15 - 2t) + 4(-24 + 2t) + 7(-16 + t) = 17$

de donde obtenemos , t = 20

Sustituyendo en (1) se tiene

$$\mathscr{L} \cap \mathbf{P} = P(-25 , 16 , 4)$$

b) $\overline{M_0P} = \langle -25 , 16 , 4\rangle - \langle 15 , -24 , -16\rangle = 20\langle -2 , 2 , 1\rangle$

El espacio recorrido es , $e = ||\overline{M_0P}|| = 20\sqrt{4 + 4 + 1} = 60$

c) Tiempo empleado : $t = \frac{e}{v} = \frac{60}{12} = 5$ unidades de tiempo. ■

Ejemplo 7 Un rayo luminoso parte del punto A(-3 , 8 , 5) y sigue la dirección de la recta $\mathscr{L}_1 = \{\langle 1 , 0 , 1\rangle + t\langle -1 , 2 , 1\rangle , t \in \mathbf{R}\}$, llega al espejo dado por el plano $\mathbf{P} : x + y + z = 4$. Hallar la ecuación vectorial del rayo reflejado.

Solución. La ecuación del rayo luminoso es

$$\mathscr{L}_2 = \{\langle -3 , 8 , 5\rangle + r\langle -1 , 2 , 1\rangle , r \in \mathbf{R}\}$$

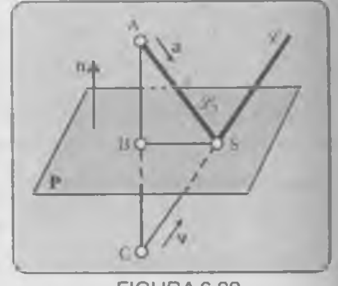


FIGURA 6.22

Si $S \in \mathscr{L}_2 \Rightarrow S = \langle -3 - r , 8 + 2r , 5 + r\rangle$ (1)

También

$S \in \mathbf{P} \Rightarrow (-3 - r) + (8 + 2r) + (5 + r) = 4 \Leftrightarrow r = -3$

Luego , en (1) : $\mathscr{L}_2 \cap \mathbf{P} = S(0 , 2 , 2)$

La ecuación de la recta que pasa por A , perpendicular al plano $\mathbf{P}$, es :

$$\mathscr{L}_3 = \{\langle -3 , 8 , 5\rangle + s\langle 1 , 1 , 1\rangle , s \in \mathbf{R}\}$$

Si $B \in \mathscr{L}_3 \Rightarrow B = \langle -3 + s , 8 + s , 5 + s\rangle$ (2)

$B \in \mathbf{P} \Rightarrow (-3 + s) + (8 + s) + (5 + s) = 4 \Leftrightarrow s = -2$

Sustituyendo en (2) obtenemos : $B = \langle -5 , 6 , 3\rangle$

Como B equidista de A y C $\Rightarrow B = \frac{1}{2}(A + C) \Leftrightarrow C = 2B - A$

$$\Rightarrow C = 2\langle -5 , 6 , 3\rangle - \langle -3 , 8 , 5\rangle = \langle -7 , 4 , 1\rangle$$

Dirección del rayo reflejado : $\mathbf{v} = \overline{CS} = \langle 0 , 2 , 2\rangle - \langle -7 , 4 , 1\rangle = \langle 7 , -2 , 1\rangle$

Por lo tanto , su ecuación vectorial es $\mathscr{L} = \{\langle 0 , 2 , 2\rangle + t\langle 7 , -2 , 1\rangle , t \in \mathbf{R}\}$ ■

Ejemplo 8 Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto S(1 , 4 , -2) y dista una unidad de la recta $\mathscr{L} = \{\langle 2 , 6 , 5\rangle + t\langle 2 , -4 , 0\rangle , t \in \mathbf{R}\}$.

Solución. Sea la ecuación general del plano

$$^{*}\mathbf{P} : x + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

Si $d(\mathscr{L} , \mathbf{P}) = 1 \Rightarrow \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|}{||\mathbf{n}||} = 1 \Leftrightarrow |\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}| = ||\mathbf{n}||$

donde : $\mathbf{v} = \overline{ST} = \langle 2 , 6 , 5\rangle - \langle 1 , 4 , -2\rangle = \langle 1 , 2 , 7\rangle$

$\mathbf{n} = \langle 1 , B , C\rangle$

Luego : $|\langle 1 , B , C\rangle \cdot \langle 1 , 2 , 7\rangle| = \sqrt{1 + B^2 + C^2}$

$\Rightarrow |1 + 2B + 7C| = \sqrt{1 + B^2 + C^2}$ (2)

FIGURA 6.23

Dado que $\mathscr{L} \perp \mathbf{n} \Rightarrow \langle 2 , -4 , 0\rangle \cdot \langle 1 , B , C\rangle = 0$

$\Leftrightarrow 2 - 4B = 0 \Rightarrow B = 1/2$

Sustituyendo en (2) se tiene : $192C^2 + 112C + 11 = 0 \Leftrightarrow C_1 = -1/8$ ó $C_2 = -11/24$

Si $S \in \mathbf{P} \Rightarrow 1 + 4B - 2C + D = 0$

Luego , para B = 1/2 y $C_1 = -1/8 \Rightarrow D_1 = -13/4$

y para B = 1/2 y $C_2 = -11/24 \Rightarrow D_2 = -47/12$

Por lo tanto , sustituyendo cada uno de estos valores en (1) obtenemos

$$\mathbf{P}_1 : 8x + 4y - z - 26 = 0 \quad ó \quad \mathbf{P}_2 : 24x + 12y - 11z - 94 = 0$$ ■

(*) **Nota.** En ocasiones en que se hace uso de la ecuación general del plano $\mathbf{P} : Ax + By + Cz + D = 0$, es aconsejable considerar como la unidad a cualquiera de los coeficientes A , B , C o D , de preferencia A ; con esto se logra eliminar una incógnita y facilitar todas las operaciones realizables.

Ejemplo 9 Hallar la ecuación del plano que pasa a través de la recta $\mathscr{L} = \{\langle 1 , 8 , 1\rangle + t\langle 1 , -3 , 1\rangle , t \in \mathbf{R}\}$ y forma un ángulo de 60° con el plano $\mathbf{P}_1 : 2x - y + z = 7$

Solución. Sea el plano buscado $\mathbf{P} : x + By + Cz + D = 0$ (1)
cuya normal es $\mathbf{n} = \langle 1 , B , C\rangle$

Como $\mathscr{L} \subset \mathbf{P} \Rightarrow (1 , 8 , 1) \in \mathbf{P} \Rightarrow 1 + 8B + C + D = 0$ (2)

$\mathscr{L} \subset \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 0 \Rightarrow \langle 1 , -3 , 1\rangle\cdot\langle 1 , B , C\rangle = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 3B + C = 0 \Rightarrow C = 3B - 1$ (3)

Sustituyendo (3) en (2) se tiene : $D = -11B$ (4)

Un vector normal al plano $\mathbf{P}_1$ es $\mathbf{n}_1 = \langle 2 , -1 , 1\rangle$

Si $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}_1$ forman un ángulo de 60° $\Rightarrow \cos 60° = \dfrac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_1}{\|\mathbf{n}\|\,\|\mathbf{n}_1\|}$

esto es $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\langle 1 , B , C\rangle\cdot\langle 2 , -1 , 1\rangle}{(\sqrt{1 + B^2 + C^2})(\sqrt{4 + 1 + 1})} \Rightarrow 2(2 - B + C) = \sqrt{6}(\sqrt{1 + B^2 + C^2})$

Sustituyendo el valor de (3) se tiene

$$2(2 - B + 3B - 1) = \sqrt{6}(\sqrt{1 + B^2 + (3B - 1)^2})\text{ , de donde obtenemos}$$

$$11B^2 - 13B + 2 = 0 \Leftrightarrow B_1 = 1 \text{ ó } B_2 = 2/11$$

Luego , en (3) y (4) tenemos : $C_1 = 2$ ó $C_2 = -5/11$

$D_1 = -11$ ó $D_2 = -2$

Sustituyendo en (1) cada uno de estos valores , resultan dos soluciones

$$\mathbf{P}_1 : x + y + 2z - 11 = 0 \quad \text{ó} \quad \mathbf{P}_2 : 11x + 2y - 5z - 22 = 0$$ ■

Ejemplo 10 Hallar la ecuación del plano que pasa por A(1 , 3 , 0) y B(4 , 0 , 0) y hace un ángulo de 30° con el plano $\mathbf{P}_1 : x + y + z - 1 = 0$

Solución. Sea el plano buscado . $\mathbf{P} : x + By + Cz + D = 0$ (1)

Si $A(1 , 3 , 0) \in \mathbf{P} \Rightarrow 1 + 3B + D = 0$ (2)

$B(4 , 0 , 0) \in \mathbf{P} \Rightarrow 4 + D = 0 \Rightarrow D = -4$, luego en (2) , B = 1

Por lo que , en (1) se tiene , $\mathbf{P} : x + y + Cz - 4 = 0 \Rightarrow \mathbf{n} = \langle 1 , 1 , C\rangle$ (3)

La normal al plano $\mathbf{P}_1$ es $\mathbf{n}_1 = \langle 1 , 1 , 1\rangle$

$$\Rightarrow \cos 30° = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_1}{\|\mathbf{n}\|\,\|\mathbf{n}_1\|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\langle 1 , 1 , C\rangle\cdot\langle 1 , 1 , 1\rangle}{(\sqrt{1 + 1 + C^2})(\sqrt{1 + 1 + 1})}$$

de donde obtenemos : $5C^2 - 16C + 2 = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{5}(8 \pm 3\sqrt{6})$

Por lo tanto , en (3) , las ecuaciones de los planos son

$$\mathbf{P} : 5x + 5y + (8 \pm 3\sqrt{6})z - 20 = 0$$ ■

Ejemplo 11 Hallar la ecuación cartesiana de un plano que contiene a la recta $\mathscr{L} = \{\langle 1 , 2 , -3\rangle + t\langle 1 , -4 , 2\rangle \mid t \in \mathbb{R}\}$ y se encuentra a una distancia de $8/\sqrt{41}$ unidades del punto T(2 , -4 , -5).

Solución. Sea el plano buscado $\mathbf{P} : x + By + Cz + D = 0 \Rightarrow \mathbf{n} = \langle 1 , B , C\rangle$ (1)

Si $\mathscr{L} \subset \mathbf{P} \Rightarrow (1 , 2 , -3) \in \mathbf{P} \Leftrightarrow 1 + 2B - 3C + D = 0$ (2)

También si $\mathscr{L} \subset \mathbf{P} \Rightarrow \langle 1 , -4 , 2\rangle\cdot\langle 1 , B , C\rangle = 0$, de donde : $B = \frac{1}{4}(1 + 2C)$ (3)

Sustituyendo (3) en (2) se tiene : $D = \frac{1}{2}(4C - 3)$ (4)

$$d(T , \mathbf{P}) = \frac{8}{\sqrt{41}} \Rightarrow \frac{|2 - 4B - 5C + D|}{\sqrt{1 + B^2 + C^2}} = \frac{8}{\sqrt{41}}$$

Sustituyendo en esta expresión los valores de (3) y (4) resulta la ecuación

$$180C^2 + 36C - 11 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 1/6 \text{ ó } C_2 = -11/30$$

Si $C_1 = 1/6 \Leftrightarrow B_1 = 1/3$ y $D_1 = -7/6$, y si $C_2 = -11/30 \Rightarrow B_2 = 1/15$, $D_2 = -67/30$

Luego , en (1) , las ecuaciones de los planos buscados son

$$\mathbf{P}_1 : 6x + 2y + z - 7 = 0 \quad \text{ó} \quad \mathbf{P}_2 : 30x + 2y - 11z - 67 = 0$$ ■

Ejemplo 12 Dado el plano $\mathbf{P} : x - 2y + 3z = 0$ y la recta $\mathscr{L}_1 : \dfrac{x + 4}{4} = \dfrac{5 - z}{3}$, y = - 1 ; hallar la ecuación de la recta que pasa por A(0 , 2 , -1) , es paralelo al plano $\mathbf{P}$ y corta a la recta $\mathscr{L}_1$.

Solución. La normal al plano $\mathbf{P}$ es $\mathbf{n} = \langle 1 , -2 , 3\rangle$

y $\mathscr{L}_1 = \{\langle -4 , -1 , 5\rangle + r\langle 4 , 0 , -3\rangle , r \in \mathbb{R}\}$

Si $P_1 \in \mathscr{L}_1 \Leftrightarrow \mathbf{P}_1 = \langle -4 + 4r , -1 , 5 - 3r\rangle$

El vector de dirección de la recta $\mathscr{L}$ es $\mathbf{a} = \overline{AP_1}$

$\Rightarrow \mathbf{a} = \langle -4 + 4r , -1 , 5 - 3r\rangle - \langle 0 , 2 , -1\rangle = \langle -4 + 4r , -3 , 6 - 3r\rangle$

Como $\mathscr{L} \parallel \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 0$

$\Rightarrow \langle -4 + 4r , -3 , 6 - 3r\rangle\cdot\langle 1 , -2 , 3\rangle = 0$

de donde obtenemos , $r = 4 \Rightarrow \mathbf{a} = \langle 12 , -3 , -6\rangle = 3\langle 4 , -1 , -2\rangle$

$\therefore \mathscr{L} = \{\langle 0 , 2 , -1\rangle + t\langle 4 , -1 , -2\rangle , t \in \mathbb{R}\}$ ■

FIGURA 6.24

Ejemplo 13 Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que es paralela a los planos $\mathbf{P}_1 : 3x + 12y - 3z - 5 = 0$ y $\mathbf{P}_2 : 3x - 4y + 9z + 7 = 0$, y que corta a las rectas

$$\mathscr{L}_1: \frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3} \quad \text{y} \quad \mathscr{L}_2: \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$$

Solución. Las normales a los planos dados son : $\mathbf{n}_1 = \langle 1, 4, -1\rangle$ y $\mathbf{n}_2 = \langle 3, -4, 9\rangle$ y las ecuaciones vectoriales de las rectas son

$$\mathscr{L}_1 = \{\langle -5, 3, -1\rangle + r\langle 2, -4, 3\rangle, r \in \mathbf{R}\}\ ,\ \mathscr{L}_2 = \{\langle 3, -1, 2\rangle + s\langle -2, 3, 4\rangle, s \in \mathbf{R}\}$$

Sea $\mathscr{L} : P = P_1 + t\,\mathbf{a}$, $t \in \mathbf{R}$, la ecuación vectorial de la recta buscada , cuyo vector de dirección es $\mathbf{a} = \langle a, b, c\rangle$

Dado que : $\mathscr{L} \,||\, \mathbf{P}_1 \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_1 = 0 \Leftrightarrow a + 4b - c = 0$

$\mathscr{L} \,||\, \mathbf{P}_2 \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 3a - 4b + 9c = 0$

Resolviendo el sistema para a y b obtenemos , $a = 2c$ y $b = 3c/4$

$$\Rightarrow \mathbf{a} = \langle -2c, 3c/4, c\rangle = -\frac{c}{4}\langle 8, -3, -4\rangle$$

Sin perder generalidad podemos elegir : $\mathbf{a} = \langle 8, -3, -4\rangle$

Si $P_1 \in (\mathscr{L} \cap \mathscr{L}_1) \Rightarrow P_1 \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow P_1 = \langle -5 + 2r, 3 - 4r, -1 + 3r\rangle$

$P_2 \in (\mathscr{L} \cap \mathscr{L}_2) \Rightarrow P_2 \in \mathscr{L}_2 \Rightarrow P_2 = \langle 3 - 2s, -1 + 3s, 2 + 4s\rangle$

Como $\overline{P_1P_2} \,||\, \mathbf{a} \Rightarrow P_2 - P_1 = k\mathbf{a}$

$$\Rightarrow \langle 8 - 2s - 2r, -4 + 3s + 4r, 3 + 4s - 3r\rangle = k\langle 8, -3, -4\rangle$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 2s - 2r = 8k \Rightarrow s + r + 4k = 4 \\ -4 + 3s + 4r = -3k \Rightarrow 3s + 4r + 3k = 4 \\ 3 + 4s - 3r = -4k \Rightarrow 4s - 3r + 4k = -3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos : $r = 1$, $s = -1$, $k = 1 \Rightarrow P_1 = \langle -3, -1, 2\rangle$

$$\therefore\ \mathscr{L} : P = \langle -3, -1, 2\rangle + t\langle 8, -3, -4\rangle \Leftrightarrow x = -3 + 8t\ ,\ y = -1 - 3t\ ,\ z = 2 - 4t \quad \blacksquare$$

Ejemplo 14 Sean los conjuntos

$A = \{\langle x, y, z\rangle \in \mathbf{R}^3 \mid 63(7 - x) = 18(13 + y) = -14(z + 1)\}$

$B = \{\langle 1 + 2t, -1 + 3t, 5 + 5t\rangle \in \mathbf{R}^3 \mid t \in \mathbf{R}\}$

$C = \{\langle x, y, z\rangle \in \mathbf{R}^3 \mid 8x + y = 7, -7y + 8z = 47\}$

a) Dar la ecuación cartesiana de un plano $\mathbf{P}$ que contenga a dos de los conjuntos dados.

b) Hallar una ecuación vectorial de una recta $\mathscr{L}$ paralela a $\mathbf{P}$ y cuya intersección con A , B y C sea no vacía.

Solución. a) Los conjuntos A , B y C son rectas cuyas representaciones vectoriales son las siguientes

$$A = \mathscr{L}_1 : \frac{x-7}{2} = \frac{y+13}{-7} = \frac{z+1}{9} \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 = \{\langle 7, -13, -1\rangle + t\langle 2, -7, 9\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$$

$$B = \mathscr{L}_2 = \{\langle 1, -1, 5\rangle + r\langle 2, 3, 5\rangle \mid r \in \mathbf{R}\}$$

C es la recta determinada por la intersección de dos planos $\mathbf{P}_1 : 8x + y = 7$ y $\mathbf{P}_2 : -7y + 8z = 47$, cuyo vector de dirección es $\mathbf{a}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$

$$\Rightarrow \mathbf{a}_3 = \langle 8, 1, 0\rangle \times \langle 0, -7, 8\rangle = 8\langle 1, -8, -7\rangle$$

El punto de paso de $\mathscr{L}_3$ lo obtenemos de las ecuaciones de $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$. Por ejemplo , para $y = -1$, en $\mathbf{P}_1$, $x = 1$, y en $\mathbf{P}_2$, $z = 5$, por lo que , $(1, -1, 5) \in \mathscr{L}_3$

Luego , $C = \mathscr{L}_3 = \{\langle 1, -1, 5\rangle + s\langle 1, -8, 7\rangle \mid s \in \mathbf{R}\}$

Obsérvese que $A \cap B = \varnothing$ (compruébese) y $A \cap C = P_0(1, -1, 5)$, ambos conjuntos tienen el mismo punto de paso. Entonces el plano $\mathbf{P}$ formado por los conjuntos B y C tienen por ecuación vectorial

$$\mathbf{P} = \{\langle 1, -1, 5\rangle + r\langle 2, 3, 5\rangle + s\langle 1, -8, -7\rangle ; r, s \in \mathbf{R}\}$$

cuya normal está dado por

$$\mathbf{n} = \langle 2, 3, 5\rangle \times \langle 1, -8, 7\rangle = 19\langle 1, 1, -1\rangle$$

Ahora , si $(P - P_0)\cdot\mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow P\cdot\mathbf{n} = P_0\cdot\mathbf{n}$

$$\Rightarrow \langle x, y, z\rangle\cdot\langle 1, 1, -1\rangle = \langle 1, -1, 5\rangle\cdot\langle 1, 1, -1\rangle$$

$$\therefore\ \mathbf{P} : x + y - z + 5 = 0$$

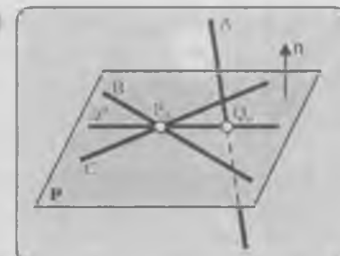


FIGURA 6.25

b) La recta $\mathscr{L} \,||\, \mathbf{P}$, pasa por $P_0(1, -1, 5) \in (B \cap C)$ y por $Q_0 \in (A \cap \mathbf{P})$

Luego , si $Q_0 \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow Q_0 = \langle 7 + 2t, -13 - 7t, -1 + 9t\rangle$ (1)

$Q_0 \in \mathbf{P} \Rightarrow (7 + 2t) + (-13 - 7t) - (-1 + 9t) + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Por lo que , en (1) , obtenemos $Q_0 = \langle 7, -13, -1\rangle$

El vector de dirección de $\mathscr{L}$ es $\mathbf{a} = \overline{P_0Q_0} = Q_0 - P_0$

$$\Rightarrow \mathbf{a} = \langle 7, -13, -1\rangle - \langle 1, -1, 5\rangle = 6\langle 1, -2, 1\rangle$$

$$\therefore\ \mathscr{L} = \{\langle 1, -1, 5\rangle + t\langle 1, -2, 1\rangle \mid t \in \mathbf{R}\} \quad \blacksquare$$

EJERCICIOS : *Grupo 35*

1. Hallar la ecuación del plano que pasa por S(1 , 1, 1) y es perpendicular a la recta $\mathscr{L} : \begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x + 2y + 2 = 5 \end{cases}$

2. Hallar el punto Q que es simétrico al punto S(2 , -5 , 7) respecto de la recta que pase por los puntos A(5 . 4 , 6) y B(-2 , -17 , -8).

3. Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos S(1 , 2 , 3) y T(3 , -1 , 0) y que es paralelo a la recta de intersección de los planos $x + y + z - 3 = 0$ y $x + 2y - 3z + 5 = 0$.

4. Una recta $\mathscr{L}$ que contiene al punto S(2 , -5 , 8) es perpendicular al plano **P** : x - 2y + 3z - 8 = 0. Hallar las coordenadas del punto de intersección de $\mathscr{L}$ y **P**.

5. Obtener una ecuación cartesiana del plano que contiene al punto S(-6 , 1 , -3) y que es perpendicular a la recta cuyos cosenos directores son todos iguales.

6. Hallar las coordenadas del punto de intersección del plano **P** : 2x + y + z - 6 = 0 y la recta que pasa por el origen y que es perpendicular a **P**.

7. Hallar la proyección del punto S(5 , 2 , -1) sobre el plano **P** : 2x - y + 3z + 23 = 0.

8. Hallar el punto Q que es simétrico al punto S(1 , 3 , -4) respecto del plano **P** : 3x + y - 2z = 0

9. Hallar en el plano XOY un punto P de modo que la suma de sus distancias a los puntos A(-1 , 2 , 5) y B(11 , -16 , 10) sea mínima.

10. Hallar en el plano **P** : 2x + 3y - 4z - 15 = 0 un punto P de modo que la diferencia de sus distancias a los puntos A(5 , 2 , -7) y B(7 , -25 , 10) sea máxima.

11. Para que valores de A y B el plano **P** : Ax + By + 3z - 5 = 0 es perpendicular a la recta $\mathscr{L}$: x = 3 + 2t , y = 5 - 3t , z = - 2 - 2t

12. Para que valores de a y C la recta $\mathscr{L}: \frac{x-2}{a} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ es perpendicular al plano **P** : 3x - 2y + Cz + 1 = 0

13. Hallar la ecuación del plano que pasa por $\mathscr{L}: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{2}$ y es perpendicular al plano **P** : 3x + 2y - z - 5 = 0

14. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por la recta $\mathscr{L}$: $x = x_0 + at$, $y = y_0 = bt$, $z = z_0 + ct$ y es perpendicular al plano $\mathbf{P}_1$: Ax + By + Cz + D = 0 se puede representar en la forma

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

15. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P_1(1 , 2 , -3)$ y paralelo a las rectas $\mathscr{L}_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}$ y $\mathscr{L}_2: \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$

16. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por el punto $P_0(x_0 , y_0 , z_0)$ y es paralelo a las rectas

$$\mathscr{L}_1: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} \quad y \quad \mathscr{L}_2: \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}\ .$$

se puede representar en la forma

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

17. La posición inicial del punto M(x , y , z) en un movimiento uniforme rectilíneo , es $M_0(28 , -30 , -27)$; la velocidad es v = 12.5 y la dirección es la de la perpendicular bajada del punto M_0 al plano **P** : 15x - 16y - 12z + 26 = 0. Hallar las ecuaciones del movimiento del punto M y determinar : a) el punto P de intersección de su trayectoria con este plano , b) el tiempo que se necesita para que el punto M haga el recorrido desde M_0 hasta P_1 c) la longitud del segmento $\overline{M_0P}$.

18. Sean las rectas $\mathscr{L}_1 = \{\langle -1 , 3 , 3\rangle + s\langle 0 , -1 , 1\rangle , s \in \mathbf{R}\}$, $\mathscr{L}_2 = \{\langle -1 , 3 , 1\rangle + r\langle 1 , -1 , 1\rangle , r \in \mathbf{R}\}$ y $\mathscr{L}$ una tercera recta que corta a $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ ortogonalmente. Si $\mathbf{P}_1$ es el plano que determinan $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, y $\mathbf{P}_2$ es el plano que determinan $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}$; hallar el coseno del ángulo que forman $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$.

19. Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano z = 2 , que contenga al punto $P_1(1 , -3 , 4)$ y haga un ángulo de 60° con el plano **P** : $2x - \sqrt{3}y + 3z - 5 = 0$

20. Hallar la ecuación del plano que pasa por T(2 , -1 , 0) y forma un ángulo de 30° con el eje X.

21. Hallar la ecuación del plano que pasa por A(1 , 3 , 0) y B(4 , 0 , 0) y hace un ángulo de 30° con el plano $\mathbf{P}_1$: x + y + z - 1 = 0

22. Hallar las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por el punto $M_0(3 , -2 , -4)$ paralelamente al plano **P** : 3x - 2y - 3z - 7 = 0 y que corta a la recta

$$\mathscr{L}_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$$

23. Hallar la proyección del punto C(3 , -4 , -2) sobre el plano que pasa por las dos rectas paralelas $\mathscr{L}_1: \frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}$ y $\mathscr{L}_2: \frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}$

24. Hallar el punto Q que es simétrico al punto P(3 , -4 , -6) con respecto al plano que pasa por los puntos $P_1(-6 , 1 , -5)$, $P_2(7 , -2 , -1)$ y $P_3(10 , -7 , 1)$.

25. Hallar el punto Q que es simétrico al punto P(-3 , 2 , 5) con respecto al plano que pasa por las rectas

$$\mathscr{L}_1: \begin{cases} x-2y+3z-5=0 \\ x-2y-4z+3=0 \end{cases} , \quad \mathscr{L}_2: \begin{cases} 3x+y+3z+7=0 \\ 5x-3y+2z+5=0 \end{cases}$$

26. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por la recta

$\mathscr{L}_1: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$, y es paralelo a la recta $\mathscr{L}_2$: $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$,

$z = z_0 + c\,t$, se puede representa en la forma

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$$

27. Demostrar que si dos rectas

$$\mathscr{L}_1: \frac{x + x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1} \quad y \quad \mathscr{L}_2: \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$$

se cortan , la ecuación del plano en el que están situadas se puede representar en la forma siguiente

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

28. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(x_1 , y_1 , z_1)$ y $P_2(x_2 , y_2 , z_2)$ y el paralelo a la recta $\mathscr{L}: \frac{x - x_3}{a} = \frac{y - y_3}{b} = \frac{z - z_3}{c}$ se puede representar en la forma

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

29. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por las rectas paralelas $\mathscr{L}_1: x = x_1 + at$, $y = y_1 + bt$, $z = z_1 + ct$ y $\mathscr{L}_2: x = x_2 + at$, $y = y_2 + bt$, $z = z_2 + ct$, se puede representar en la forma siguiente :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

30. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por la recta

$$\mathscr{L}: x = x_0 + at \ , \ y = y_0 + bt \ , \ z = z_0 + ct$$

y por el punto $P_1(x_1 , y_1 , z_1)$ se puede representar en la forma :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

7.1 EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Dentro del campo de los números reales podemos hallar números x tales que $x^2 = a$, si $a > 0$. Pero que sucede cuando $a < 0$. No existe ningún número real que satisfaga esta ecuación pues , el cuadrado de todo número real es siempre positivo o cero. Por tanto , para resolver la ecuación debemos ampliar el sistema numérico o incluir expresiones semejantes a $i = \sqrt{-1}$, tal que $i^2 = -1$. Esta expresión es llamada ***número imaginario*** o unidad imaginaria. Podemos entonces investigar el conjunto de números de la forma $a + bi$ (llamados *números complejos*) , donde a y b se eligen del conjunto de números reales. Estos números son parejas de números reales (a , b) , donde el símbolo i sirve solamente para conservar separados dos números. Esto es , si representamos por $\mathbb{C}$ a dicho conjunto , entonces tenemos la siguiente definición formal

DEFINICION 7.1 *Conjunto de los números complejos*

El conjunto de todos los números de la forma

$a + bi$, donde $a , b \in \mathbf{R}$ e $i^2 = -1$

se denomina el *conjunto de los números complejos* y se denota por $\mathbb{C}$, esto es

$$\mathbb{C} = \{(a , b) = a + bi \mid a , b \in \mathbf{R}^2 , i^2 = -1\}$$

Los elementos del conjunto $\mathbb{C}$ se denotan por las letras v , w , z , etc. de modo que si

$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (a, b), a, b \in \mathbb{R}$

$w \in \mathbb{C} \Leftrightarrow w = (c, d), c, d \in \mathbb{R}$

La combinación de los números complejos con los números reales se llama *sistema de números complejos*. Entonces a semejanza con el estudio desarrollado en forma axiomática de los números reales comenzaremos por definir este sistema en función de los números reales.

DEFINICION 7.2 *El sistema de números complejos*

El sistema de números complejos es el conjunto $\mathbb{C}$ de todos los pares ordenados de números reales (a, b), provistos de una *relación de equivalencia* y dos operaciones llamadas de *adición y multiplicación*, tales que, para dos elementos cualesquiera $(a, b) \in \mathbb{C}$ y $(c, d) \in \mathbb{C}$ se tiene

1. *Igualdad*: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$
2. *Adición*: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
3. *Multiplicación*: $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

TEOREMA 7.1 *Propiedades de la Adición*

Para los números complejos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, se cumple las siguientes propiedades

A.1 : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow (z_1 + z_2) \in \mathbb{C}$ (Clausura)

A.2 : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (Conmutatividad)

A.3 : $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \Rightarrow (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (Asociatividad)

A.4 : Existencia y unidad del elemento neutro aditivo $z_0 = (0, 0)$

$\exists ! z_0 \in \mathbb{C} \mid \forall z \in \mathbb{C}$; $z + z_0 = z$

A.5 : Existencia y unicidad del inverso aditivo

Para cada $z \in \mathbb{C}$, existe un único $(-z) \in \mathbb{C} \mid z + (-z) = z_0$

Demostración de A.2 : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

En efecto, sean $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$ dos números complejos

$\Rightarrow z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + a)$ (Def. de suma)

$= (c + a, d + b)$ (Conmutatividad en $\mathbb{R}$)

$= (c, d) + (a, b) = z_2 + z_1$ (Def. de suma)

$\therefore$ La suma de números complejos es conmutativa.

Demostración de A.3 : $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

En efecto, sean : $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$ y $z_3 = (e, f) \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (z_1 + z_2) + z_3 = [(a, b) + (c, d)] + (e, f)$

$= (a + c, b + d) + (e, f)$ (Definición de suma)

$= [(a + c) + e, (b + d) + f]$ (Definición de suma)

$= [a + (c + e), b + (d + f)]$ (Asociatividad en $\mathbb{R}$)

$= (a, b) + [(c + e), (d + f)]$ (Definición de suma)

$= (a, b) + [(a, d) + (e, f)]$ (Definición de suma)

$= z_1 + (z_2 + z_3)$

$\therefore$ La suma de complejos es asociativa.

Demostración de A.4 : $\exists ! z_0 \in \mathbb{C} \mid \forall z \in \mathbb{C} : z + z_0 = z$

En efecto, sean, $z_0 = (x, y)$ y $z = (a, b)$

Averiguaremos que valores deben tomar x e y de modo que : $z + z_0 = z$

$\Rightarrow (a, b) + (x, y) = (a, b)$

$(a + x, b + y) = (a, b)$ (Definición de suma)

$(a + x = a) \wedge (b + y = b)$ (Definición de igualdad)

$\Rightarrow (x = 0) \wedge (y = 0)$

Entonces el elemento neutro aditivo es $z_0 = (0, 0)$. La unicidad de z_0 resulta de la unicidad de los valores de x e y.

$\therefore z_0 = (0, 0)$ es el elemento neutro aditivo de $\mathbb{C}$

Demostración de A.5 : $\forall z \in \mathbb{C}, \exists ! (-z) \in \mathbb{C} \mid z + (-z) = z_0$

En efecto, sean : $z = (a, b)$ y $-z = (x, y)$

Averiguaremos que valores deben tomar x e y, tales que : $z + (-z) = z_0$

$\Rightarrow (a, b) + (x, y) = (0, 0)$

$$\Rightarrow (a + x, b + y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a + x = 0 \Rightarrow x = -a \\ b + y = 0 \Rightarrow y = -b \end{cases}$$

Luego, si $z = (a, b) \Rightarrow -z = (-a, -b)$

$\therefore -z = (-a, -b)$ es el inverso aditivo u opuesto de $z = (a, b)$

Según esta propiedad, se puede definir la resta, $z_1 - z_2$ por la siguiente relación.

$$\boxed{z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)} \qquad (1)$$

TEOREMA 7.2 ***Propiedades de la Multiplicación***

Para $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ se cumplen las siguientes propiedades

M.1 : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow z_1 z_2 \in \mathbb{C}$ (Clausura)

M.2 : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow z_1 z_2 = z_2 z_1$ (Conmutatividad)

M.3 : $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \Rightarrow (z_1 z_2) z_3 = z_1(z_2 z_3)$ (Asociatividad)

M.4 : Existencia y unicidad del elemento neutro multiplicativo

$\exists ! \omega \in \mathbb{C}, \omega \neq z_0 \mid \forall z \in \mathbb{C} : z\omega = z$, donde $\omega = (1, 0)$

M.5 : Existencia y unicidad del elemento inverso multiplicativo

$\forall z \in \mathbb{C}, z \neq z_0, \exists ! z^{-1} \in \mathbb{C} \mid z z^{-1} = \omega$

M.6 : $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (Propiedad Distributiva)

Demostración de M.2 : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow z_1 z_2 = z_2 z_1$

En efecto, sean : $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$

(1) $\Rightarrow z_1 z_2 = (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ (Def. de Mult.)

(2) $z_2 z_1 = (c, d)(a, b) = (ca - db, cb + da)$ (Def. de Mult.)

(3) $= (ac - bd, ad + bc)$ (Conmutatividad en $\mathbb{R}$)

(4) Luego, de (1) y (3) : $z_1 z_2 = z_2 z_1$

$\therefore$ El producto de números complejos es conmutativo

Demostración de M.3 : $(z_1 z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3)$

En efecto, sean : $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$ y $z_3 = (x, y)$

(1) $\Rightarrow (z_1 z_2)z_3 = (ac - bd, ad + bc)(x, y)$

(2) $= [(ac - bd)x - (ad + bc)y, (ac - bd)y + (ad + bc)x]$

(3) $= (acx - bdx - ady - bcy, acy - bdy + adx + bcx)$

(4) $= (acx - ady - bdx - bcy, acy + adx - bdy + bcx)$

(5) $= [a(cx - dy) - b(cy + dx), a(cy + dx) + b(cx - dy)]$

(6) $= (a, b)(cx - dy, cy + dx)$

(7) $= (a, b)[(c, d)(x, y)] = z_1(z_2 z_3)$

$\therefore$ El producto de números complejos es asociativo

Demostración de M.4 : $\exists ! \omega \in \mathbb{C} \mid \forall z \in \mathbb{C} : z\omega = z$, $\omega = (1, 0)$

Probaremos que $\omega = (1, 0)$, suponiendo que $z = (a, b)$ y $\omega = (x, y)$

(1) Si $z\omega = z \Rightarrow (a, b)(x, y) = (a, b)$

(2) $\Rightarrow (ax - by, ay + bx) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = a & (\alpha) \\ ay + by = b & (\beta) \end{cases}$

(3) Multiplicando (α) por a : $a^2x - aby = a^2$

(4) Multiplicando (β) por b : $b^2x + aby = b^2$

(5) Sumando (3) + (4) se tiene : $(a^2 + b^2)x = a^2 + b^2 \Rightarrow x = 1$

(6) Sustituyendo en (β) : $b + ay = b \Rightarrow y = 0$, luego : $\omega = (1, 0)$

$\therefore$ $\omega = (1, 0)$ es el elemento neutro multiplicativo de $\mathbb{C}$

Nota. El elemento neutro multiplicativo definido en M.4 se llama también *unidad compleja o uno complejo* y se denota por 1. Esto es $\omega = 1 = (1, 0)$

Demostración de M.5 : $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq z_0, \exists ! z^{-1} \in \mathbb{C} \mid z z^{-1} = \omega$

En efecto, sean $z = (a, b)$ y $z^{-1} = (x, y)$

(1) Si $zz^{-1} = \omega \Rightarrow (a, b)(x, y) = (1, 0)$

(2) $\Rightarrow (ax - by, ay + bx) = (1, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases}$

(3) Resolviendo el sistema para x e y obtenemos

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

(4) Luego, si $z = (a, b)$ y si $z^{-1} = (x, y) \Rightarrow$ $\boxed{z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)}$ (2)

es el inverso multiplicativo de $z = (a, b)$ y es único.

Nota. El elemento inverso multiplicativo de $z = (a, b)$ definido en M.5 se denomina también recíproco de z. Es costumbre representar a z^{-1} como $\frac{1}{z}$

Según esta propiedad, se puede definir la división de z entre w por la siguiente relación

$$\boxed{\frac{z}{w} = z\left(\frac{1}{w}\right) = z(w^{-1})} \quad (3)$$

De esta división se obtiene la regla para dividir dos números complejos : $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$

$$\frac{z}{w} = \frac{(a, b)}{(c, d)} = (a, b)(c, d)^{-1} = (a, b)\left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2}\right) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}\right)$$

$$\therefore \boxed{\frac{(a, b)}{(c, d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)} \quad (4)$$

Por ejemplo, si $z = (5, 3)$ y $w = (3, -1)$, entonces según la regla (4) para la división

$$\frac{z}{w} = \frac{(5, 3)}{(3, -1)} = \left(\frac{15 - 3}{9 + 1}, \frac{9 + 5}{9 + 1}\right) = \left(\frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

7.2 R COMO SUBCONJUNTO DE C

Veremos ahora la relación que existe entre los números complejos y los números reales.

Sea A = $\{(a , 0) \mid a \in \mathbf{R} \subset \mathbf{C}\}$, el conjunto de los complejos de parte imaginaria nula. Se puede establecer una correspondencia biunívoca entre A y los números reales de la siguiente manera.

La función $f : A \Rightarrow \mathbf{R}$, definida por $f[(a , 0)] = a$, asigna a cada complejo real su primera componente.

f es *inyectiva* , puesto que si $z_1 = (a_1 , 0)$ y $z_2 = (a_2 , 0)$ y $z_1 \neq z_2$

$$\Rightarrow (a , 0) \neq (a_2 , 0) \Leftrightarrow a_1 \neq a_2$$

Además como , $f(z_1) = f[(a_1 , 0)] = a_1$ y $f(z_2) = f[(a_2 , 0)] = a_2$

se tiene que : $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$

f es *sobreyectiva* , pues $\forall a \in \mathbf{R}$, existe $(a , 0) \in A \mid f[(a , 0)] = a$

Por tanto , f es una función *biyectiva*. Esto es , $\forall (a , 0) \in A$ le corresponde el elemento a en los reales . lo cual se indica escribiendo

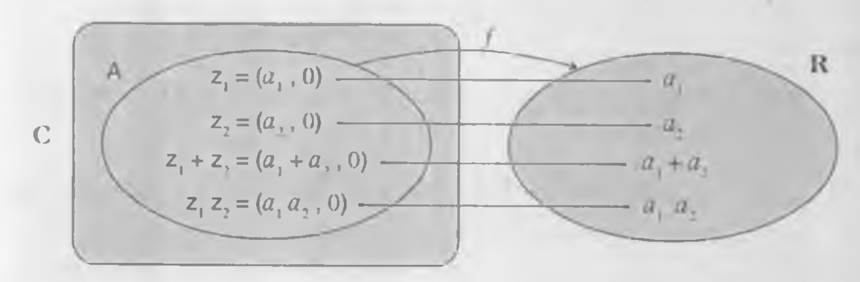
$$(a , 0) \Leftrightarrow a \ , \ \forall a \in \mathbf{R}$$

Veamos el comportamiento de las operaciones (2) y (3) de la Definición 7.2 en los conjuntos A y **R**. Si $z_1 = (a_1 , 0)$ y $z_2 = (a_2 , 0)$, entonces

$$z_1 + z_2 = (a_1 , 0) + (a_2 , 0) = (a_1 + a_2 , 0) \Leftrightarrow a_1 + a_2$$
$$z_1 z_2 = (a_1 , 0)(a_2 , 0) = (a_1 a_2 , 0) \Leftrightarrow a_1 a_2$$

Aplicando f a cada una de estas operaciones se tiene

$$f(z_1 + z_2) = f[(a_1 , 0) + (a_2 , 0)] = f[(a_1 + a_2 , 0)]$$
$$= a_1 + a_2 = f[(a_1 , 0)] + f[(a_2 , 0)] = f(z_1) + f(z_2)$$
$$f(z_1 z_2) = f[(a_1 , 0)(a_2 , 0)] = f[(a_1 a_2 , 0)]$$
$$= a_1 a_2 = f[(a_1 , 0)] f[(a_2 ,0)] = f(z_1) f(z_2)$$



Esta analogía permite identificar cada complejo real con el real correspondiente , es decir , es válida la igualdad

$$(a ,0) = a , \forall a \in \mathbf{R}$$

o sea , podemos afirmar que A = **R** y como $A \subset \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$

De aquí se considera que el sistema de los números complejos es una ampliación del sistema de los números reales.

7.3 FORMA CARTESIANA DE UN NUMERO COMPLEJO

DEFINICION 7.3 *La unidad imaginaria*

El número complejo imaginario cuya segunda componente es la unidad se denomina *unidad imaginaria* y se denota por

$$i = (0 , 1)$$

Tiene la propiedad de que si

$$i^2 = (0 , 1)(0 , 1) = (0 - 1 , 0 + 0) = (-1 , 0)$$

y por la analogía de los complejos reales con los reales

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

Si p es un número positivo , podemos usar la notación $i = \sqrt{-1}$, para denotar la *raíz cuadrada principal* de -p , representada por $\sqrt{-p}$, esto es , si

$$\sqrt{-p} = \sqrt{-1}\sqrt{p} \Rightarrow \sqrt{-p} = i\sqrt{p}$$

Ejemplos : a) $\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$, b) $\sqrt{-25} = i\sqrt{25} = 5i$

También podemos usar la rotación $i^2 = -1$ para obtener diversas potencias de i.

	Análogamente
$i^0 = 1$	
$i^1 = i$	$i^5 = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$
$i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$	$i^7 = -i$
$i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$	$i^8 = 1$

Obsérvese que para cada 4 potencias sucesivas de i se repiten los mismos resultados. Luego , si el exponente de i es $n \in \mathbf{N}$, al efectuar la división entre cuatro se obtiene 4 k + r , donde $0 \leq r < 4$, entonces

$$i^n = i^{4k+r} = (i^{4k})i^r = (i^4)i^r = (1)i^r = i^r$$

En consecuencia , i^n se reduce a uno de los cuatro considerados en primer lugar, según el valor que tenga r

Ejemplos : **1.** $i^{128} = i^{4(32)+0} = i^0 = 1$ **3.** $i^{54} = i^{4(13)+2} = i^2 = -1$

2. $i^{25} = i^{4(6)+1} = i^1 = i$ **4.** $i^{87} = i^{4(21)+3} = i^3 = -1$

Usando la convención de identificar los números complejos de la forma $(a, 0)$ con el número real a, podemos escribir el número complejo $z = (a, b)$ en la forma

$$\begin{aligned} z &= (a, b) = (a, 0) + (0, b) \\ &= (a, 0) + (b, 0)(0, 1) \\ &= (a, 0) + b(0, 1) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{z = a + b\,i}$$

Notación que se conoce con el nombre de *forma cartesiana*, *rectangular*, *canónica o binómica* de un número complejo, de donde a es su parte real y b su parte imaginaria, y se denotan, respectivamente

$$a = \text{Re}(z) \quad , \quad b = \text{Im}(z)$$

de modo que podemos escribir

$$\boxed{z = \text{Re}(z) + \text{Im}(z)\,i}$$

Una ventaja de escribir los números complejos en la forma cartesiana es que la suma y la multiplicación se pueden efectuar sin referirse a las definiciones en términos de pares ordenados.

Si usamos la notación $z_1 = (a, b) = a + b\,i$, $z_2 = (c, d) = c + d\,i$ para efectuar la multiplicación $z_1 z_2$ donde consideramos los términos a, b, c, d, i, como si todos ellos obedecieran a las leyes de los números reales y reemplazando i^2 por -1 tendríamos

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a + b\,i)(c + d\,i) = ac + ad\,i + bc\,i + bd\,i^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)\,i \\ &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

Por ejemplo, si $z_1 = (-2, 3)$ y $z_2 = (1, -2)$, entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (-2 + 3i)(1 - 2i) = (-2)(1) + (-2)(-2i) + (3i)(1) + (3i)(-2i) \\ &= -2 + 4i + 3i - 6i^2 = 4 + 7i = (4, 7) \end{aligned}$$

OBSERVACIONES

1. Se dice que un número complejo es puramente real, si su parte imaginaria es cero. Esto es, si $z = (a, 0) = a + 0i \Rightarrow \text{Im}(z) = 0$
2. Se dice que un número complejo es imaginario puro, si su parte real es cero. Esto es, si $z = (0, a) = 0 + a\,i \Rightarrow \text{Re}(z) = 0$

7.4 REPRESENTACION GEOMETRICA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

La idea de representar geométricamente un número complejo es realmente muy simple. Se puede establecer una correspondencia uno a uno entre los números complejos y los puntos del plano cartesiano de acuerdo con el esquema:

Número complejo		Punto del plano
$(a, b) = a + b\,i$	$\Leftrightarrow$	$P(a, b)$

Así, cada número complejo $a + b\,i$ corresponde a un punto único del plano cuyas coordenadas son $x = a$, $y = b$. Recíprocamente, cada punto $P(a, b)$ del plano corresponde a un número único $a + b\,i$.

El punto $P(a, b)$ recibe el nombre de *punto, afijo o gráfica* del número complejo $a + b\,i$.

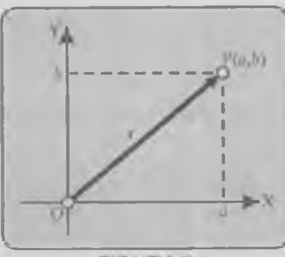


FIGURA 7.1

El plano donde suponemos representados los afijos de todos los números complejos se llama *plano complejo*. El eje $\overline{OX}$ de este plano contiene todos los afijos de los complejos de la forma $(a, 0) = a + 0\,i$, es decir, los números reales. Por esta razón recibe el nombre de *eje real*.

El eje $\overline{OY}$ contiene los afijos de los números imaginarios puros $(0, b)$ y se llama *eje imaginario*. La línea $\overline{OP}$ que representa la magnitud del complejo $a + b\,i$ se llama *radio vector*.

7.4.1 REPRESENTACION GRAFICA DE LA SUMA Y DIFERENCIA

Si en un plano complejo representamos los complejos $z_1 = (a_1, b_1)$ y $z_2 = (a_2, b_2)$ por sus respectivos radios vectores r_1 y r_2, entonces el vector suma $z_1 + z_2$ es la diagonal del paralelogramo construido sobre los radios vectores representativos de los sumandos.

En efecto, en la Figura 7.2

$$\Delta ODM \cong \Delta NEP \text{, por tener : } \overline{OD} = \overline{NE} \text{ y } \overline{MD} = \overline{PE}$$

Entonces :

$$\begin{aligned} a &= \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OA} + \overline{NE} = \overline{OA} + \overline{OD} = a_1 + a_2 \\ b &= \overline{PB} = \overline{PE} + \overline{EB} = \overline{MD} + \overline{NA} = b_2 + b_1 \\ \therefore\ z &= a + b\,i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,i = z_1 + z_2 \end{aligned}$$

Para la diferencia : $z = z_1 - z_2$ (Figura 7.3), construimos el inverso aditiva de z_2,

ON' , de modo que :

$$\overline{OM} - \overline{ON} = \overline{OM} + \overline{ON'} = \overline{OP} \Rightarrow z = z_1 + (-z_2)$$

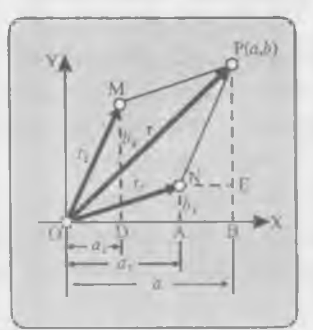


FIGURA 7.2

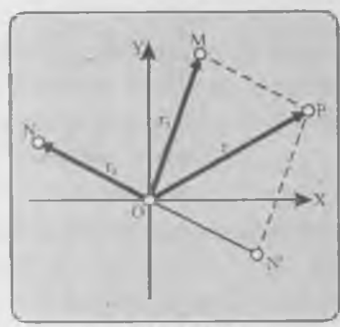


FIGURA 7.3

La siguiente definición del *conjugado* de un número complejo es útil en las operaciones que involucran números complejos

DEFINICION 7.4 *Conjugado de un número complejo*

Si $z = a + b\,i$ es un número complejo , entonces $\bar{z} = a - b\,i$ se denomina *conjugado* complejo o simplemente , conjugado de z.

Geométricamente dos complejos conjugados están representados por dos puntos simétricos respecto del eje real , como se ilustra en la Figura 7.4

Por ejemplo , el conjugado de $z = 3 - 2i$ es $\bar{z} = 3 + 2i$ y obsérvese que : $z\bar{z} = (3 - 2i)(3 + 2i) = 9 - 4i^2$

entonces con $i^2 = -1$, se obtiene

$$z\bar{z} = 9 + 4 = 13 > 0$$

El producto de un número complejo por su conjugado es un número real positivo.

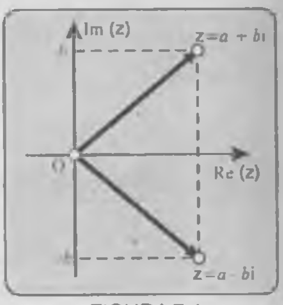


FIGURA 7.4

TEOREMA 7.3 *Propiedades del conjugado de un número complejo*

Si z , w ∈ ℂ , entonces se cumplen las propiedades siguientes

CC.1 : a) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, b) $z\bar{z} \in \mathbb{R} \wedge (z\bar{z}) \geq 0$.

CC.2 : Si $z = a + 0i \Leftrightarrow z = \bar{z}$

CC.3 : $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

CC.4 : $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$

CC.5 : Si $z \in \mathbb{C} \Rightarrow (\bar{\bar{z}}) = z$

CC.6 : Si $z = a + bi \Rightarrow a = \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \wedge b = \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

Demostración de CC.1 :

a) La suma de dos complejos conjugados es igual al doble de la parte real.
En efecto , $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a \Rightarrow z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

b) El producto de dos complejos conjugados es un número real no negativo.
En efecto , $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$
Como $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que $(z\bar{z}) \in \mathbb{R} \wedge (z\bar{z}) \geq 0$

Demostración de CC.2 : Un número complejo es real si y sólo si es igual a su conjugado.

i) $z \in \mathbb{R} \Rightarrow z = a + 0i \Rightarrow (z = a) \wedge (\bar{z} = a) \Rightarrow z = \bar{z}$

ii) Si $\bar{z} = z \Rightarrow a + bi = a - bi \Rightarrow 2bi = 0$. Luego , $z = a$, esto es $z \in \mathbb{R}$.

Demostración de CC.3 : El conjugado de una suma es igual a la suma de los conjugados.

En efecto , (1) Sean $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$
(2) Si $z + w = (a + c, b + d) \Rightarrow \overline{z + w} = (a + c, -b - d)$
(3) Igualmente , si $\bar{z} = (a, -b)$ y $\bar{w} = (c, -d) \Rightarrow \bar{z} + \bar{w} = (a + c, -b - d)$
(4) Luego , de (2) y (3) se sigue que : $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

Demostración de CC.4 : El conjugado de un producto es igual al producto de los conjugados.

En efecto , (1) Sean $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$
(2) Si $zw = (ac - bd, ad + bc) \Rightarrow \overline{zw} = (ac - bd, -ad - bc)$
(3) Si $\bar{z} = (a - b)$ y $\bar{w} = (c, -d) \Rightarrow \bar{z}\bar{w} = (ac - bd, -ad - bc)$
(4) Luego , de (2) y (3) , se tiene : $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$

Nota. Una aplicación importante de la conjugación en ℂ es el de la simplificación de la división de dos números complejos. En efecto , según la propiedad CC.1b , el producto de cualquier complejo y su conjugado es un número real positivo. Entonces consideremos el problema de encontrar el cociente de $z = a + bi$ y $w = c + di$ de la siguiente manera

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Por ejemplo , si $z = 2 + 5i$ y $w = 3 - i$

$$\Rightarrow \frac{z}{w} = \frac{(2 + 5i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{(6 - 5) + (2 + 15)i}{3^2 + 1^2} = \frac{1 + 17}{10}i$$

$$\therefore \frac{z}{w} = \frac{1}{10} + \frac{17}{10}i$$

MISCELANEA DE EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Se sabe que (3 , 5) (x - 1 , 4) = (y - 2 , 5) + (3 , -1) para ciertos números complejos. Hallar t y u , tales que :

$$(5x - 4 , u + t) = (3t + 1\text{-}, -5y - 19)$$

Solución. Si

$$(3 , 5)(x - 1 , 4) = (y - 2 , 5) + (3 , -1) \Rightarrow (3x - 3 - 20 , 12 + 5x - 5) = (y - 2 + 3 , 5 - 1)$$

$$\Rightarrow (3x - 23 , 5x + 7) = (y + 1 , 4) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 23 = y + 1 \Rightarrow 3x - y = 24 \\ 5x + 7 = 4 \Rightarrow x = -3/5 \ , \ y = -129/5 \end{cases}$$

y si $(5x - 4 , u + t) = (3t + 1 , -5y - 19) \Rightarrow (-3 - 4 , u + t) = (3t + 1 , 129 - 19)$

$$\Rightarrow (-7 , u + t) = (3t + 1 , 110) \Leftrightarrow \begin{cases} -7 = 3t + 1 \Leftrightarrow t = -8/3 \\ u + t = 110 \Leftrightarrow u = 338/3 \end{cases}$$ ■

Ejemplo 2 Determinar el complejo $\omega = 5z + 2w^2 + u$, sabiendo que

$$z = \frac{(1 + i)^4 + (1 - i)^4}{2 + i} \ , \quad w = \frac{4i^{11} - i}{1 + 2i} \ , \quad u = i^{75} + [(1 - i)^{-2i}]^{3i}$$

Solución. Para calcular potencias de 1 + i y 1 - i , tener presente lo siguiente :

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$
$$(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$$

Entonces : $(1 + i)^4 = [(1 + i)^2]^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$

$$(1 - i)^4 = [(1 - i)^2]^2 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4$$

Luego , $z = \frac{-4 - 4}{2 + i} = \frac{-8(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = -\frac{8(2 - i)}{4 + 1} = -\frac{8}{5}(2 - i)$

$i^{11} = i^{4 \times 2 + 3} = i^3 = -i \Rightarrow w = \frac{-4i - i}{1 + 2i} = \frac{-5i(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{-5(i - 2i^2)}{1 + 4} = -(2 + i)$

$$\Rightarrow w^2 = (2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i$$

$i^{75} = i^{4 \times 18 + 3} = i^3 = -i \Rightarrow u = -i + (1 - i)^{-6i^2} = -i + [(1 - i)^2]^3$

$$\Rightarrow u = -i + (-2i)^3 = -i - 8i^3 = -i + 8i = 7i$$

$$\therefore \ \omega = 5z + 2w^2 + u = -8(2 + i) + 2(3 + 4i) + 7i = -10 + 7i$$ ■

Ejemplo 3 Hallar la forma cartesiana de $z = \left[\frac{(2 + i)^2 + (2 - i)^2}{(1 + i)^3}\right]^4$

Solución. Haciendo uso de la identidad $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$, se tiene :

$$z = \left[\frac{2(4 + i^2)}{2i(1 + i)}\right]^4 = \left(\frac{3}{i - 1}\right)^4 = \frac{81}{(-2i)^2} = -\frac{81}{4}$$

$$\therefore \ z = -\frac{81}{4} + 0i$$ ■

Ejemplo 4 Demostrar la identidad

$$x^4 + 4 = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 - i)(x + 1 + i)$$

Demostración. Se sabe que : $(1 + i)^2 = 2i$ y $(1 - i)^2 = -2i \Rightarrow (1 + i)^2 = -(1 - i)^2$

Teniendo en cuenta estos resultados podemos escribir

$$x^4 + 4 = x^4 - (-4) = x^4 - (2i)^2 = x^4 - [(1 + i)^2]^2$$

Factorizando : $x^4 + 4 = [x^2 + (1 + i)^2][x^2 - (1 + i)^2]$

$$= [x^2 - (1 - i)^2][x^2 - (1 + i)^2]$$
$$= (x + 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 + i)(x - 1 - i)$$

Ahora , por la propiedad conmutativa del producto en $\mathbb{C}$, obtenemos

$$x^4 + 4 = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 - i)(x + 1 + i)$$ ■

Ejemplo 5 Expresar en la forma binómica : $z = 1 + \cfrac{i}{1 + \cfrac{i}{1 + \cfrac{i}{1 + i}}}$

Solución. En estos casos conviene expresar los complejos en la forma de par ordenado y aplicar la regla (4) para la división , esto es :

$$z = 1 + \cfrac{i}{1 + \cfrac{i}{\cfrac{(1 , 2)}{(1 , 1)}}} = 1 + \cfrac{i}{1 + \cfrac{i}{\left(\frac{1 + 2}{2} , \frac{2 - 1}{2}\right)}} = 1 + \cfrac{i}{1 + \cfrac{2i}{(3 , 1)}}$$

$$= 1 + \cfrac{i}{\cfrac{(3 , 3)}{(3 , 1)}} = 1 + \cfrac{i}{\left(\frac{9 + 3}{10} , \frac{9 - 3}{10}\right)} = 1 + \frac{10i}{6(2 , 1)} = \frac{2(3 , 4)}{3(2 , 1)}$$

$$\therefore \ z = \frac{2}{3}\left(\frac{6 + 4}{5} , \frac{8 - 3}{5}\right) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}i$$ ■

Nota. Otras identidades importantes para simplificar operaciones con números complejos son las siguientes

a) $(1 + i\sqrt{3})^3 = (1 - i\sqrt{3})^3 = -8$

b) $(\sqrt{3} + i)^3 = 8i$ y $(\sqrt{3} - i)^3 = -8i$

Ejemplo 6 Si $z = \frac{(1+i)^5}{(\sqrt{3}-i)^3}$, hallar Im (z^2)

Solución. $z = \frac{(1+i)^4(1+i)}{-8i} = \frac{(2i)^2(1+i)}{-8i} = \frac{4i^2(1+i)}{-8i} = \frac{1}{2}(1-i)$

Luego : $z^2 = \frac{1}{4}(1-i)^2 = \frac{1}{4}(-2i) = -\frac{1}{2}i \Rightarrow \text{Im}(z^2) = -\frac{1}{2}$ ■

Ejemplo 7 Sea $z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$, hallar la forma cartesiana de z

Solución. $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3 \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right) = \left(\frac{-8i}{8i}\right)\frac{(\sqrt{3}-i)^2}{3+1} = -\frac{1}{4}(3 - 2\sqrt{3}i + i^2)$

$= -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 = \left[\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right]^5 = \left(\frac{2i}{1+1}\right)^5 = i^5 = i$

$\therefore\ z = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\,i = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ■

Ejemplo 8 Expresar en la forma rectangular el complejo

$z = (1+i)^n + (1-i)^n$

Solución. Veamos los casos en que n es un número par o impar

1. Si n es un número par $\Rightarrow$ $n = 4k$ o $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{Z}^+$
   a) $(1+i)^n = (1+i)^{4k} = (2i)^{2k} = (4i^2)^k = (-4)^k$
      $(1-i)^n = (1-i)^{4k} = (-2i)^{2k} = (4i^2)^k = (-4)^k$
      $\Rightarrow z = 2(-4)^k + 0i$, $k \in \mathbb{Z}^+$
   b) $(1+i)^n = (1+i)^{4k+2} = (1+i)^2(1+i)^{4k} = 2i(-4)^k$
      $(1-i)^n = (1-i)^{4k+2} = (1-i)^2(1-i)^{4k} = -2i(-4)^k$
      $\Rightarrow z = 0 + 0i$
2. Si n es un número impar , entonces : $n = 4k+1$ o $n = 4k+3$, $k \in \mathbb{Z}^+$
   a) $(1+i)^n = (1+i)^n = (1+i)^{4k+1} = (1+i)(1+i)^{4k} = (1+i)(-4)^k$
      $(1-i)^n = (1-i)^{4k+1} = (1-i)(1-i)^{4k} = (1-i)(-4)^k$
      $\Rightarrow z = 2(-4)^k + 0i$, $k \in \mathbb{Z}^+$
   b) $(1+i)^n = (1+i)^{4k+3} = (1+i)^2(1+i)(1+i)^{4k}$
      $= (2i)(1+i)(-4)^k = (-2+2i)(-4)^k$

$(1-i)^n = (1-i)^{4k+3} = (1-i)^2(1-i)(1+i)^{4k}$
$= (-2i)(1-i)(-4)^k = (-2-2i)(-4)^k$
$\Rightarrow z = (-4)^{k+1} + 0i$, $k \in \mathbb{Z}^+$ ■

Ejemplo 9 En $\mathbb{C}$ definimos la operación binaria * de la siguiente manera: $z * w = z + w + zw$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$, hallar el valor de z tal que $z * (1+i) = 0$

Solución. Aplicando la operación binaria a $z * (1+i) = 0$, se tiene :

$z + (1+i) + z(1+i) = 0.$

Si $z = (x, y) \Rightarrow (x+1 , y+1) + (x, y)(1, 1) = (0, 0)$

$\Rightarrow (x+1, y+1) + (x-y, x+y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1+x-y=0 \Rightarrow 2x-y+1=0 & (1) \\ y+1+x+y=0 \Rightarrow x+2y+1=0 & (2) \end{cases}$

Resolviendo (1) y (2) obtenemos : $x = -3/5$, $y = -1/5 \Rightarrow z = (-3/5 , -1/5)$ ■

Ejemplo 10. Si $\overline{w} = 2\overline{u} + v$, $v = -u + (1-i)$ y $\overline{u} + (1-i) = 2\overline{(1+i)}$; efectuar :

$z = \frac{\overline{v} + 2w - u}{u^2 - w} + \overline{2i - 1} + u^3$, expresando el resultado en forma de par ordenado.

Solución. Si $\overline{u} = -(1-i) + 2(1-i) = 1 - i \Rightarrow u = 1 + i$

$v = -u + (1-i) = -(1+i) + (1-i) \Rightarrow v = -2i$

$\overline{w} = 2\overline{u} + v = 2(1-i) - 2i = 2 - 4i \Rightarrow w = 2 + 4i$

Luego : $z = \frac{2i + 2(2+4i) - (1+i)}{(1+i)^2 - (2+4i)} + (-1-2i) + (1+i)^2(1+i)$

$= \frac{2i + 4 + 8i - 1 - i}{2i - 2 - 4i} - 1 - 2i + 2i(1+i) = -\frac{3}{2}\left(\frac{3+5i}{1+i}\right)$

$= -\frac{3}{2}\frac{(3+5i)(1-i)}{1+1} = -\frac{3}{4}(8+2i) \Rightarrow z = (-6 , -3/2)$ ■

Ejemplo 11 Sean $w, z \in \mathbb{C}$ tales que , $w + z$ y wz son reales. Demostrar que $w = \overline{z}$.

Demostración. En efecto

(1) Sean : $w = a + bi$ y $z = c + di$
(2) Entonces , $w + z = (a+c) + (b+d)i$ y $wz = (ac - bd) + (ad + bc)i$
(3) Dado que $w + z$ es real $\Rightarrow b + d = 0 \Leftrightarrow d = -b$

$$wz \text{ es real} \Rightarrow ad + bc = 0 \Rightarrow a(-b) + bc = 0 \Rightarrow c = a$$

(4) Luego, de (3) se deduce que $z = a - bi \Rightarrow \bar{z} = a + bi$

$$\therefore\ w = \bar{z}$$ ■

Ejemplo 12 Demostrar que $\forall w, z, v \in \mathbb{C}$, se cumple:

$$w \operatorname{Im}(\bar{z}v) + z \operatorname{Im}(\bar{v}w) + v \operatorname{Im}(\bar{w}z) = (0, 0)$$

Demostración. Sean: $w = (a, b)$, $z = (c, d)$ y $v = (e, f)$

$$\Rightarrow \bar{w} = (a, -b),\ \bar{z} = (c, -d) \text{ y } \bar{v} = (e, -f)$$

Efectuando los productos indicados entre paréntesis, tenemos:

$$\bar{z}v = (c, -d)(e, f) = (ce + df, cf - de)$$

$$\bar{v}w = (e, -f)(a, b) = (ae + bf, be - af)$$

$$\bar{w}z = (a, -b)(c, d) = (ac + bd, ad - bc)$$

Luego: $w \operatorname{Im}(\bar{z}v) = (a + bi)(cf - de)i = (acf - ade)i + (bcf - bde)i^2$

$$= (bde - bcf) + (acf - ade)i \qquad (1)$$

$$z \operatorname{Im}(\bar{v}w) = (c + di)(be - af)i = (bce - acf)i + (bde - adf)i^2$$

$$= (adf - bde) + (bce - acf)i \qquad (2)$$

$$v \operatorname{Im}(\bar{w}z) = (e + fi)(ad - bc)i = (ade - bce)i + (adf - bcf)i^2$$

$$= (bcf - adf) + (ade - bce)i \qquad (3)$$

Sumando (1) + (2) + (3), se tiene finalmente que:

$$w \operatorname{Im}(\bar{z}v) + z \operatorname{Im}(\bar{v}w) + v \operatorname{Im}(\bar{w}z) = 0 + 0i = (0, 0)$$ ■

Ejemplo 13 Demostrar que $\forall w, z \in \mathbb{C}$, se cumple:

$$\operatorname{Im}(wz) = \operatorname{Re}(w)\operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)\operatorname{Re}(z)$$

Demostración. Por la propiedad CC.6 del Teorema 7.3: $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(wz) = \frac{wz - \overline{wz}}{2i} = \frac{2wz - 2\bar{w}\bar{z}}{4i}$$

En el numerador, por el artificio de sumar y restar $2(w\bar{z} + \bar{w}z)$ se tiene:

$$\operatorname{Im}(wz) = \frac{2wz + (2w\bar{z} + 2\bar{w}z) - (2w\bar{z} + \bar{w}z) - 2\bar{w}\bar{z}}{4i}$$

$$= \frac{wz + \bar{w}z - w\bar{z} - \overline{wz}}{4i} + \frac{wz - \bar{w}z + w\bar{z} - \overline{wz}}{4i}$$

$$= \frac{z(w + \bar{w}) - \bar{z}(w + \bar{w})}{4i} + \frac{z(w - \bar{w}) + \bar{z}(w - \bar{w})}{4i}$$

$$= \frac{(w + \bar{w})(z - \bar{z})}{4i} + \frac{(w - \bar{w})(z + \bar{z})}{4i}$$

$$= \left(\frac{w + \bar{w}}{2}\right)\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + \left(\frac{w - \bar{w}}{2i}\right)\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)$$

$$\therefore\ \operatorname{Im}(wz) = \operatorname{Re}(w)\operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)\operatorname{Re}(z)$$ ■

Ejemplo 14 Resolver el sistema: $-2\bar{z}_1 + z_2 = 2 + 3i$

$$iz_1 + \frac{1}{2}\bar{z}_2 = \frac{5}{2} + i$$

Solución. En la primera ecuación el conjugado de ambos extremos es

$$\overline{-2\bar{z}_1 + z_2} = \overline{2 + 3i} \Rightarrow -2z_1 + \bar{z}_2 = 2 - 3i$$

Multiplicando por -1 se tiene: $2z_1 - \bar{z}_2 = -2 + 3i$ (1)

Multiplicando por 2 la segunda ecuación: $2iz_1 + \bar{z}_2 = 5 + 2i$ (2)

De la suma (1) + (2), resulta: $2(1 + i)z_1 = 3 + 5i \Leftrightarrow z_1 = 2 + \frac{1}{2}i$

Sustituyendo en la primera ecuación dada obtenemos z_2, esto es:

$$-2\left(2 - \frac{1}{2}i\right) + z_2 = 2 + 3i \Leftrightarrow z_2 = 6 + 2i \Rightarrow \text{C.S} = \{(2, 1/2), (6, 2)\}$$ ■

Ejemplo 15 Resolver en $\mathbb{C}$ el sistema de ecuaciones

$$(1 - i)\bar{z} + 5iw = 2i - 7$$

$$2z + (3 - 4i)\bar{w} = 8 - i$$

y dar las soluciones en forma cartesiana o binómica.

Solución. Multiplicando las primera ecuación por $(1 + i)$ se tiene:

$$(1 + i)(1 - i)\bar{z} + 5(1 + i)iw = (1 + i)(2i - 7)$$

$$\Rightarrow 2\bar{z} + (-5 + 5i)w = -9 - 5i \qquad (1)$$

El conjugado de ambos miembros de la segunda ecuación es

$$2\bar{z} + (3 + 4i)w = 8 + i \qquad (2)$$

Restando (2) - (1) resulta: $(8 - i)w = 17 + 6i \Leftrightarrow w = 2 + i$

Sustituyendo $\bar{w} = 2 - i$ en la segunda ecuación dada obtenemos

$$2z + (3 - 4i)(2 - i) = 8 - i \Leftrightarrow z = 3 + 5i$$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 36*

1. Hállense las soluciones reales de las siguientes ecuaciones

a) $(1+i)x + (-2+5i)y = -4+17i$

b) $(2-5i)x + (1+3i)y - 8 + 9i = 0$

c) $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$

d) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{x+yi} = 1+i$

e) $\frac{x(1-2i)^2 + y(2+3i)^2}{3-2i} = -2+4i$

f) $12\,[(2x+i)(1+i) + (x+y)(3-2i)\,] = 17+6i$

g) $x(3+4i) - y(8-3i) = (2xi - 10y + 4) + (4yi - 2x + 7i)$

2. En los ejercicios siguientes , obtener z , dando el resultado en forma de par ordenado.

a) $z = 24(i^{24} + i^{19} + i^{62})^3 - 4(1-i)^4 + 3(2-3i)^2$

b) $z = \frac{i^4 + i^8 + i^{16}}{2 - i^4 + i^{10} + i^{15}}$

c) $z = \frac{ai + 3a}{a + bi} - \frac{b + bi + 2ai}{ai - b}$

d) $z = \left(\frac{i^5 + 2}{i^{19} + 1}\right)^2$

e) $z = \left[\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{3i}\right]^{-2i}$

3. En los ejercicios siguientes, ejecútense las operaciones mencionadas, representado los resultados en forma cartesiana

a) $z = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$

b) $z = \left(\frac{2i}{1+i}\right)^7 + (2i - i^2)^2$

c) $z = \frac{(1-i)^6 - 1}{(1+i)^6 + 1}$

d) $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^6 + \frac{(3 - i\sqrt{3})^6}{(\sqrt{3} + i\sqrt{3})^{12}}$

4. Demostrar que :

a) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}:\ z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

b) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{C}:\ (a+b)z = az + bz$

5. Demostrar que si z y w son dos números complejos diferentes , entonces

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z-w}\right) - \mathrm{Re}\left(\frac{w}{z-w}\right) = 1$$

6. Demostrar que si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces

a) $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z+w}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{w}{z+w}\right) = 1$

b) $\mathrm{Re}(zw) = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(w) - \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(w)$

7. Si $z_1 = (2, -1)$, $z_2 = (1, 3)$ y $z_1 z_3 = 2\bar{z}_2$, hallar $\bar{z}_3$ y z_3^{-1}

8. Sean $z = 2(1+i) + 3(i-2)$ y $w = \frac{1}{1+2i}$. Hallar : a) $\mathrm{Re}(w^2)$, b) $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{zw}\right)$

9. Sean los números complejos , $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 2 + i\sqrt{3}$, $2_3 = 5 - 4i\sqrt{3}$. Si $z = 3z_1 - z_2^2 + \bar{z}_3$, hallar Im (z)

10. Si $z = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$, hallar : $\frac{3}{z+1} - \frac{1}{z}$

11. Si $z_1 = (-1, 3)$, $z_2 = (-5/3, 1)$ y $z_1 z_3 = 3\bar{z}_2$, hallar z_3^{-1}

12. Si $\frac{3+2i}{z(2+i)} = 4i + 8$, hallar z en la forma de par ordenado.

13. Si $z = \frac{1}{2}(1-3i)$, hallar $(1+z)^7$ en la forma cartesiana.

14. En los ejercicios siguientes , ejecútense las operaciones indicadas , representando z en la forma binómica.

a) $z = \cfrac{i-2}{1+i-\cfrac{1-i}{1-i-\cfrac{1-i}{1-i+\cfrac{2i}{3-i}}}}$

b) $z = (6 + 2i\sqrt{3})(7 + 7i)(4\sqrt{3} + 12i)$

c) $z = \cfrac{5+3i}{1+i+\cfrac{1-i}{1+i+\cfrac{2i}{1-i}}}$

d) $z = (\sqrt{2} + i\sqrt{3})^2 - i\sqrt{6} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

15. Qué relación debe existir entre x e y para que siendo $z = x + yi$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, se tenga que el cociente $\frac{z+1}{z-1}$ tenga parte real nula.

16. La suma de dos números complejos es 3 + 2 i. La parte real de uno de ellos es 2. Hallar dichos números , sabiendo que su cociente es imaginario puro.

17. Dados los números : $w_1 = 3 + 2i$, $w_2 = 1 + 4i$ y sus afijos M_1 y M_2 ; se pide

a) La expresión binómica del complejo $z = a + bi$ tal que sus afijos están alineados con M_1 y M_2 , y la suma $w_2 + z$ sea imaginario puro.

b) La expresión binómica del número complejo $z_1 = a_1 + b_1 i$ tal que la resultante de la suma $w_1 + z_1$, pase por el afijo (-3 , 12)

18. Si $z_1 = (x, -y) \neq 0 \in \mathbb{C}$, $z_2 = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ y $z_1 z_2 = (a, b)$; calcular $a^2 + b^2$.

19. Demostrar que $\forall z \in \mathbb{C} - \{1\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : 1 + z + z^2 + \ldots\ldots\ldots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$

(Sug. Sea $S = 1 + z + z^2 + \ldots\ldots + z^n$, multiplicar z S , luego restar z S - S)

20. Hallar todos los valores posibles de $S = 1 + i + i^2 + \ldots\ldots\ldots + i^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, n par.

(Sug. $S = \sum_{h=0}^{n} i^h = \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i}$, luego analizar S para n = 2k)

21. Obtener los siguientes complejos

a) $z = \sum_{k=0}^{100} i^k$ b) $z = \prod_{k=1}^{100} i^k$

En los ejercicios 22 al 33 , resolver el sistema de ecuaciones

22. $(3 - i)z + (4 + 2i)w = 2 + 6i$
$(4 + 2i)z - (2 + 3i)w = 5 + 4i$

23. $(3 + i)z + 2w = 3 + 4i$
$4iz + (3 + i)w = -4$

24. $(3 - i)z - (1 + 3i)w = 5 + 5i$
$(4 + i)z + (5 - 3i)w = 7 + 6i$

25. $3z^2 + iw^3 = 7i$
$z^2 i + 2w^3 = 0$
$(v + 1)^2 = -1$

26. $(1 - i)\overline{z} - \overline{w} + (2 + i)\overline{v} = 3 - 4i$
$z + (1 - i)w + (1 + i)v = 3i$
$(1 - i)z + (2 + i)w - v = -i$

27. $z\overline{w} = 10 + 11i$
$z + w = 7 - 3i$
$\text{Re}(z) = 3$

28. $(2 - 3i)z - (1 + i)w = 4 - 3i$
$(3 - i)z + (1 + 2i)w = 11 + i$

29. $(3 - i)z + (4 + 2i)w = 1 + 3i$
$(4 + 2i)z - (2 + 3i)w = 7$

30. $(2 + i)z + (2 - i)w = 6$
$(3 + 2i)z + (3 - 2i)w = 8$

31. $3iz + 2w - iv = 1 - 2i$
$-\overline{z} - 2\overline{v} - i\overline{w} = -6$
$2z - w + v = 6 - i$

32. $(1 + i)\overline{z} + i\overline{w} + \overline{v} = 1$
$2z + w + (2 - i)v = 1 + 2i$
$2z + (1 - i)w + (1 + 2i)v = 0$

33. $z + w + v = 2$
$iz + 2w + (2 + 3i)v = 12 + 4i$
$\overline{z} - i\overline{w} + \overline{v} = 2i$

7.5 MODULO DE UN NUMERO COMPLEJO

Dado $z = a + bi$, el *módulo o valor absoluto* de z es la raíz cuadrada no negativa de la suma de las partes real e imaginaria.

Se denota por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (5)$$

Geométricamente , el módulo de un número complejo representa la magnitud del radio vector r del afijo correspondiente , al origen.

Por ejemplo , si $z = 4 - 3i$, se sigue de la fórmula (5) que

$$|z| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} \Rightarrow r = \sqrt{16 + 9} = 5$$

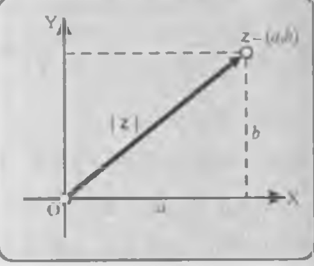


FIGURA 7.5

7.5.1 PROPIEDADES DEL MODULO DE UN NUMERO COMPLEJO

Para todo z , w ∈ $\mathbb{C}$ se cumple las siguientes propiedades

VA.1 : El módulo de todo número complejo es mayor o igual que cero

$$|z| \geq 0 \ , \ |z| = 0 \Leftrightarrow z = z_0 = (0 , 0)$$

VA.2 : El módulo de todo número complejo es mayor o igual que su parte real y su parte imaginaria

$$|z| \geq \text{Re}(z) \ \text{ y } \ |z| \geq \text{Im}(z)$$

Demostración. En efecto

(1) Sea $z = a + bi \Rightarrow |z|^2 = a^2 + b^2$

(2) Pero , $|a|^2 = a^2 \Rightarrow |a|^2 \leq a^2 + b^2$

(3) Por el paso (2) : $|a|^2 \leq |z|^2 \Rightarrow |a| \leq |z|$

(4) Dado que $a \in \mathbf{R} \Rightarrow a \leq |a|$, y por (3) : $a \leq |z|$

(5) De donde se tiene : $|z| \geq \text{Re}(z)$

Análogamente se demuestra que : $|z| \geq \text{Im}(z)$

VA.3 : El módulo de un complejo es igual al módulo de su conjugado y de su inverso aditivo

$$|z| = |\overline{z}| = |-z|$$

VA.4 : El producto de cualquier complejo por su conjugado es igual al cuadrado del módulo

$$z\overline{z} = |z|^2$$

VA.5 : El módulo de un producto de complejos es igual al producto de los módulos

$$|zw| = |z|\,|w|$$

VA.6 : El módulo de la suma de dos complejos es menor o igual que la suma de los módulos

$$|z + w| \leq |z| + |w| \qquad \textit{(Desigualdad triangular).}$$

Demostración. En efecto

(1) $|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w})$ (VA.4)

(2) $= (z + w)(\overline{z} + \overline{w})$ (CC.3)

(3) $= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w}$ (Prop. Distributiva)

(4) $= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w + |w|^2$ (VA.4 y M.2)

(5) $= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2$ $(\overline{z\overline{w}} = \overline{z}\,\overline{\overline{w}} = \overline{z}w)$

(6) Como los términos centrales son complejos conjugados , entonces
$|z + w|^2 = |z|^2 + 2\,\text{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$ (CC.6)

(7) $\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2$ (VA.2)

(8) $\leq |z|^2 + 2|z||\overline{w}| + |w|^2$ (VA.5)

(9) $\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2$ (VA.3)

(10) Luego : $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$ (Propiedad en **R**)

(11) $\therefore |z + w| \leq |z| + |w|$

VA.7 : El módulo de un cociente es igual al cociente de los módulos

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}, \text{ siempre que } w \neq w_0 = (0, 0)$$

Demostración. En efecto : (1) $\left|\left(\frac{z}{w}\right) w\right| = |z|$

(2) Aplicando VA.5 se tiene : $\left|\frac{z}{w}\right| |w| = |z|$

(3) Por lo tanto : $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

OBSERVACION. Geométricamente, el módulo o valor absoluto de un número complejo significa la distancia entre el origen y el afijo correspondiente al complejo. Aplicaremos esta propiedad para hallar la distancia entre dos puntos.

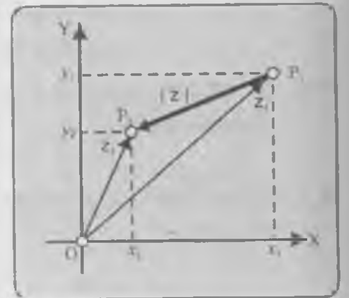


FIGURA 7.6

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ los afijos de los complejos z_1 y z_2 respectivamente (Figura 7.6)

Por definición de módulo, $d(P_1, P_2) = |z|$

Dado que $z = z_1 - z_2 \Rightarrow |z| = |z_1 - z_2|$

$$\Rightarrow d(P_1, P_2) = |z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)|$$

$$\therefore d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Por ejemplo, si $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 5 - i$, la distancia entre sus afijos $P_1(2, 3)$ y $P_2(5, -1)$ es :

$$|z_1 - z_2| = d(P_1, P_2) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (3 + 1)^2} = 5$$

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Simplificar la expresión : $E = (|z + 2i| + |2 - iz|)(|\overline{z} - 2i|)$

Solución.

$E = (|z + 2i| + |i(-2i - z)|)(|\overline{z - 2i}|)$ $\quad (|\overline{z}| = |z|)$

$= (|z + 2i| + |i||-z - 2i|)(|z + 2i|)$ (CC.5 y VA.5)

$= (|z + 2i| + |z + 2i|)(|z + 2i|)$ $\quad (|i| = 1$ y VA.3)

$= (2|z + 2i|)(|z + 2i|)$

$= 2|z + 2i|^2$ ■

Ejemplo 2 Si $z, w \in \mathbb{C}$, demostrar que : $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$
Qué significado geométrico tiene esta identidad?

Demostración. Apoyándonos en la propiedad VA.4 : $|z|^2 = z\overline{z}$, se tiene

$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\overline{z} + \overline{w})$

$= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w}$ (1)

$|z - w|^2 = (z - w)(\overline{z - w}) = (z - w)(\overline{z} - \overline{w})$

$= z\overline{z} - z\overline{w} - w\overline{z} + w\overline{w}$ (2)

Luego, sumando (1) + (2), obtenemos

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(z\overline{z} + w\overline{w}) = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

El significado geométrico de la identidad es el del teorema siguiente : " La suma de los cuadrados de las diagonales del paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados".

En efecto, si P y Q son los afijos de z y w respectivamente, entonces

$$\overline{OP} = |z| \text{ y } \overline{OQ} = |w|$$

FIGURA 7.7

Además, R es el afijo de $z + w \Rightarrow \overline{OR} = |z + w|$

Q también es el afijo de $z - w \Rightarrow \overline{PQ} = |z - w|$

Luego : $\overline{OR}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{PR}^2 + \overline{OP}^2 + \overline{QR}^2$

Como $\overline{OQ} = \overline{PR}$ y $\overline{OP} = \overline{QR}$ (Lados opuestos de un paralelogramo)

$$\Rightarrow \overline{OR}^2 + \overline{PQ}^2 = 2(\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2) \Leftrightarrow |z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$ ■

Ejemplo 3 Si $z = \frac{i - r}{1 + 2ir}$, $r \in \mathbf{R}$, demostrar que $\left|z - \frac{3}{4}i\right| = \frac{1}{4}$

Demostración. Efectivamente : $\left|z - \frac{3}{4}i\right| = \frac{1}{4}|4z - 3i|$ (1)

$$|4z - 3i| = \left|\frac{4i - 4r}{1 + 2ir} - 3i\right| = \left|\frac{4i - 4r - 3i - 6i^2r}{1 + 2ir}\right| = \left|\frac{i + 2r}{1 + 2ir}\right|$$

$$= \left|\frac{i\,\overline{(1-2ir)}}{1+2ir}\right| = \frac{|i|\,|\overline{1-2ir}|}{|1+2ir|} \qquad \text{(VA.7 , VA.5 y VA.3)}$$

$$\Rightarrow\ |4z-3i| = \frac{1\,|1+2ir|}{|1+2ir|} = 1\ .\ \text{Por tanto , en (1) : } \left|z-\frac{3}{4}i\right| = \frac{1}{4}$$ ■

Ejemplo 4 Si w y z son dos números complejos y $u = \sqrt{wz}$, demostrar que

$$\left|\frac{z+w}{2}-u\right| + \left|\frac{z+w}{2}+u\right| = |w| + |z|$$

Demostración. Sea $E = \left|\frac{z+w}{2}-u\right| + \left|\frac{z+w}{2}+u\right|$

$$\Rightarrow\ E = \left|\frac{z+w-2\sqrt{wz}}{2}\right| + \left|\frac{z+w+2\sqrt{wz}}{2}\right| = \frac{1}{2}|\sqrt{z}-\sqrt{w}|^2 + \frac{1}{2}|\sqrt{z}+\sqrt{w}|^2$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{z}-\sqrt{w})\,(\overline{\sqrt{z}-\sqrt{w}}) + \frac{1}{2}(\sqrt{z}+\sqrt{w})\,(\overline{\sqrt{z}+\sqrt{w}}) \qquad \text{(VA.4)}$$

$$= \frac{1}{2}[\,(\sqrt{z}-\sqrt{w})\,(\overline{\sqrt{z}}-\overline{\sqrt{w}}) + (\sqrt{z}+\sqrt{w})\,(\overline{\sqrt{z}}+\overline{\sqrt{w}})] \qquad \text{(CC.3)}$$

Efectuando las operaciones indicadas obtenemos

$$E = \frac{1}{2}[\,2\sqrt{w}\,\overline{\sqrt{w}} + 2\sqrt{z}\,\overline{\sqrt{z}}\,] = |\sqrt{w}|^2 + |\sqrt{z}|^2 \Rightarrow E = |w| + |z|$$ ■

Ejemplo 5 Demostrar que $\forall z \in \mathbb{C}$: a) $|z|^2 \geq 2\,|\text{Re}(z)|\,|\text{Im}(z)|$

b) $\sqrt{2}\,|z| \geq |\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)|$

Demostración. En efecto :

a) (1) Sea $z = (x , y)$, donde $x = \text{Re}(z)$, $y = \text{Im}(z)$

(2) Como $(|x| - |y|)^2 \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x|^2 + |y|^2 \geq 2|x|\,|y|$

(3) $\Rightarrow |z|^2 \geq 2|x|\,|y|$

(4) $\Rightarrow |z|^2 \geq 2\,|\text{Re}(z)|\,|\text{Im}(z)|$

b) Si $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |z|^2 = x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2$

(5) De (3) : $\Rightarrow |z|^2 \geq 2|x|\,|y| \Rightarrow 2|z|^2 \geq |z|^2 + 2|x|\,|y|$

(6) Luego : $2|z|^2 \geq (|x| + |y|)^2 \Rightarrow \sqrt{2}\,|z| \geq |x| + |y|$

(7) Por lo tanto : $\sqrt{2}\,|z| \geq |\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)|$ ■

Ejemplo 6 Dados $z , w \in \mathbb{C}$, demostrar que : $|z-w| \geq \big|\,|z| - |w|\,\big|$

En qué condiciones se cumple la igualdad?

Demostración. En efecto :

(1) $|z-w|^2 = (z-w)\,(\overline{z-w}) = (z-w)\,(\bar{z}-\bar{w})$ (VA.4 y CC.3)

(2) $= z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 - z\bar{w} - w\bar{z} + |w|^2$ (VA.4)

(3) $= |z|^2 + |w|^2 - (z\bar{w} + w\bar{z})$

(4) $= |z|^2 + |w|^2 - 2\,\text{Re}(z\bar{w})$ (CC.6)

(5) Pero por VA.2 : $\text{Re}(z) \leq |z| \Rightarrow \text{Re}(z\bar{w}) \leq |z\bar{w}| \Rightarrow -2\,\text{Re}(z\bar{w}) \geq -2|z\bar{w}|$

(6) Luego , en (4) : $|z-w|^2 \geq |z|^2 + |w|^2 - 2|z|\,|\bar{w}|$

(7) Como $|w| = |\bar{w}| \Rightarrow |z-w|^2 \geq (|z| - |w|)^2 \Rightarrow |z-w| \geq \big||z| - |w|\big|$

Veamos ahora en que condiciones se cumple la igualdad.

Sean : $z = (a , b)$ y $w = (c , d) \Rightarrow |z-w| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $|w| = \sqrt{c^2+d^2}$

Entonces si : $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$

Elevando al cuadrado y luego simplificando términos se llega a la expresión

$$(ad-bc)^2 = 0 \Rightarrow ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

Por lo tanto , la igualdad se cumple , si y sólo si , las partes reales y las partes imaginarias de los complejos son proporcionales. ■

Ejemplo 7 Un triángulo rectángulo tiene por vértices los afijos de los complejos $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 5 - i$. Si la hipotenusa mide 5 unidades , hallar el complejo z_3 cuyo afijo representa al tercer vértice ubicado en el primer cuadrante.

Solución. Sean A(1 , 1) , B(5 , -1) y C(x , y) los afijos de los complejos z_1 , z_2 y z_3 respectivamente. Entonces

$$\bar{AB} = B - A = z_2 - z_1 = \langle 4 , -2\rangle = 2\langle 2 , -1\rangle$$

Luego , $|z_2 - z_1| = 2\sqrt{4+1} = 2\sqrt{5}$

Por el teorema de Pitágoras :

$$\|\bar{CA}\| = |z_1 - z_3| = \sqrt{(5)^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}$$

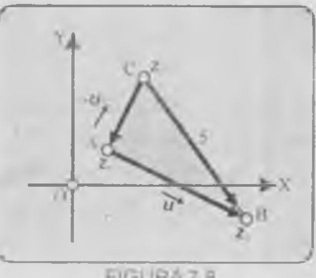


FIGURA 7.8

Un vector unitario en la dirección de $\bar{AB}$ es :

$$\boldsymbol{u} = \frac{\bar{AB}}{|z_2 - z_1|} = \frac{\langle 2 , -1\rangle}{\sqrt{5}}$$

entonces un vector unitario en la dirección de $\bar{CA}$ es : $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{u}^{\perp} = -\frac{\langle 1 , 2\rangle}{\sqrt{5}}$

Ahora , $\overline{CA} = ||\overline{CA}||\, \mathbf{v} = \sqrt{5}\left(-\frac{\langle 1, 2\rangle}{\sqrt{5}}\right) = -\langle 1, 2\rangle$

y si $\mathbf{A} - \mathbf{C} = -\langle 1, 2\rangle \Rightarrow \mathbf{C} = \langle 1, 1\rangle + \langle 1, 2\rangle = \langle 2, 3\rangle \Leftrightarrow z_1 = 2 + 3i$ ■

Ejemplo 8 Resolver la ecuación : $|z| - z = 1 + 2i$, $z \in \mathbb{C}$

Solución. Sea $z = (x, y)$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - (x, y) = (1, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - x = 1 \\ -y = 2 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

Sustituyendo en la primera ecuación se tiene $x = 3/2 \Rightarrow z = (3/2, -2)$ ■

7.6 LA RAIZ CUADRADA DE UN NUMERO COMPLEJO

Sea el complejo : $z = a + bi$

cuya raíz cuadrada es el complejo : $w = \sqrt{z}$, tal que , $w = x + yi$

Entonces , si $\quad w^2 = z \Leftrightarrow (x + yi)^2 = a + bi$ (1)

Aplicando módulos : $|(x + yi)^2| = |a + bi| \Rightarrow |x + yi|^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ (2)

Desarrollando (1) se tiene : $x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (3) \\ 2xy = b & (4) \end{cases}$

Sumando y luego restando (2) y (3) obtenemos :

$$2x^2 = |z| + a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{|z| + a}{2}}$$

$$2y^2 = |z| - a \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{|z| - a}{2}}$$

Se obtiene cuatro pares de valores reales , de los cuales se seleccionan dos de acuerdo con la condición (4)

i) Si $b > 0$, entonces x e y se eligen con el mismo signo

ii) Si $b < 0$, entonces x e y se eligen con distinto signo.

Ejemplo 1 Hallar las raíces cuadradas de los siguientes complejos

$z = 5 - 12i$, $z = 8i$, $z = -9$

Solución. 1. Si $z = 5 - 12i \Rightarrow a = 5$, $b = -12$ y $|z| = \sqrt{(5)^2 + (-12)^2} = 13$

$$x = \pm\sqrt{\frac{13 + 5}{2}} = \pm 3 \;,\; y = \pm\sqrt{\frac{13 - 5}{2}} = \pm 2$$

Dado que $b = -12 < 0$, x e y se eligen con distinto signo , esto es

$x = 3$, $y = -2$ ó $x = -3$, $y = 2$

Luego si $w = \sqrt{5 - 12i} \Rightarrow w_0 = 3 - 2i$, $w_1 = -3 + 2i$ (Note que $w_1 = -w_0$)

2. $z = 8i \Rightarrow a = 0$, $b = 8$ y $|z| = 8$

Como $a = 0 \Rightarrow x = y = \pm\sqrt{\frac{|z|}{2}} = \pm\sqrt{\frac{8}{2}} = \pm 2$

$b = 2 > 0$, x e y se eligen con el mismo signo. Entonces las soluciones son (2 , 2) y (-2 , -2). Por lo que si $w = \sqrt{8i} \Rightarrow w_0 = 2 + 2i$ ó $w_1 = -2 - 2i$

3. $z = -9 \Rightarrow a = -9$, $b = 0$ y $|z| = 9$

Entonces : $x = \pm\sqrt{\frac{9 - 9}{2}} = 0$, $y = \pm\sqrt{\frac{9 + 9}{2}} = \pm 3$

Como $b = 0$, en este caso , los cuatro pares se reducen a dos : (0 , 3) y (0 , -3)

Luego , si $w = \sqrt{-9} \Rightarrow w_0 = 3i$ ó $w_1 = -3i$ ■

Ejemplo 2 Determinar algebraicamente las raíces cuadras de $z = 8 + 4\sqrt{5}\,i$

Solución. Si $z = a + bi \Rightarrow a = 8$, $b = 4\sqrt{5}$ y $|z| = \sqrt{(8)^2 + (4\sqrt{5})^2} = 12$

Si $w = \sqrt{z} = x + yi \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{12 + 8}{2}} = \pm\sqrt{10}$, $y = \pm\sqrt{\frac{12 - 8}{2}} = \pm\sqrt{2}$

Como $b > 0$, x e y deben tener el mismo signo. Luego , si $w = x + yi$, entonces

$w_0 = \sqrt{10} + i\sqrt{2}$, $w_1 = -\sqrt{10} - i\sqrt{2}$

son las raíces del complejo dado. ■

Ejemplo 3 Resolver la ecuación en $\mathbb{C}$: $x^2 + (-2 - 2i)x = 3 - 6i$

Solución. $x^2 - 2(1 + i)x - (3 - 6i) = 0 \Leftrightarrow x = (1 + i) \pm \sqrt{(1 + i)^2 + (3 - 6i)}$

$= (1 + i) \pm \sqrt{3 - 4i}$ (1)

Sea : $\sqrt{3 - 4i} = c + di \Rightarrow c = \pm\sqrt{\frac{|z| + a}{2}}$, $d = \pm\sqrt{\frac{|z| - a}{2}}$

Si $a = 3$, $b = -4$ y $z = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5 \Rightarrow c = \pm 2$ y $d = \pm 1$

Como $b < 0$, entonces c y d se eligen de distinto signo , esto es ,

$$\sqrt{3-4i} = \pm(2-i)$$

Sustituyendo en (1) se tiene : $x = (1+i) \pm (2-i) \Leftrightarrow x_1 = 3$ ó $x_2 = -1 + 2i$

$\therefore$ C.S = $\{(3, 0), (-1, 2)\}$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 37*

1. Si $w = \frac{2+i}{3-i}$ y $z = \frac{1-i}{2+1}$, hallar $|w+z|$

2. Si $z = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)(-3+3i)}{(1-i)(3i)(1-i\sqrt{3})}$, hallar $|z|$

3. Calcular z^2, sabiendo que $z = -|-1+i| + i\sqrt{2}$

4. Sean $z = 2(1-i) + 3(i-2)$ y $w = \frac{i}{1+2i}$, hallar $|w+z|$

5. Sean $z = -2+4i$ y $w = 1-i$, hállese el valor de $\left|\frac{w+z+1}{w-z+i}\right|$

6. Hallar w y z tales que, $w+z = 4+i$, $wz = 5+5i$, $\frac{w}{z} = \frac{1}{10}(1-i)$, $|z|^2 = 10$.

7. Resolver la ecuación : $|z| + z = 2 + i$, $z \in \mathbb{C}$

8. Dados $z_1 = 4+6i$ y $z_2 = (1-i)z_1$, sabiendo que z_1, z_2 y z_3 son vértices de un triángulo equilátero, hallar z_3.

9. Dados $z_1 = 8+5i$ y $z_2 = (5, 0)$, calcular el complejo $z = (3, y)$ que forma con los anteriores un triángulo isósceles, de vértice de lados iguales, el z_1.

10. Determinar el complejo cuyo afijo equidista de los afijos de $z_1 = (-2, 0)$, $z_2 = (3, 3)$ y $z_3 = (0, -2)$

11. Si $z \in \mathbb{C}$, resolver la ecuación : $|z+i|^2 - z + 1 = 4 - 2i$, $\text{Re}(z) \geq 0$

12. Un triángulo rectángulo tiene por vértices los afijos de los complejos $z_1 = 1+3i$ y $z_2 = 5-7i$. Si la hipotenusa mide $\sqrt{145}$ unidades, hallar el complejo z_3 cuyo afijo representa al tercer vértice y que unido al afijo de z_2 forma la hipotenusa de dicho triángulo.

13. Dados w_1 y w_2 tales que $|w_1| = |w_2| = 1$, $w_2 = iw_1$, demostrar que $\forall \in \mathbb{C}$, se cumple : $z = \text{Re}\left(\frac{z}{w_1}\right)w_1 + \text{Re}\left(\frac{z}{w_2}\right)w_2$

14. Si w y z $\in \mathbb{C}$, demostrar que : $|z-w|^2 \leq (1+|z|^2)(1+|w|^2)$

15. Si w y z $\in \mathbb{C}$, demostrar que
$$|z-w|^4 + |z+w|^4 + 2|z^2-w^2|^2 = 4[(z\bar{z})^2 + (w\bar{w})^2 + 2zw\bar{z}\bar{w}]$$

16. Dados $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, demostrar que
$$|z_1\bar{w}_2 - z_2\bar{w}_1|^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)(|w_1|^2 + |w_2|^2) - |z_1w_1 + z_2w_2|^2$$

17. Si w , z $\in \mathbb{C}$, demostrar que : $|1-\bar{w}z|^2 - |w-z|^2 = (1-|w|^2)(1-|z|^2)$

18. Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, tales que, $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = 1$. Demostrar que
$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n}\right|$$

19. Sea $z \in \mathbb{C}$, si se cumple, $(z + \frac{1}{z}) \in \mathbb{R}$, demostrar que : $\text{Im}(z) = 0$ ó $|z| = 1$

20. Sean w , z , $\in \mathbb{C}$ y sean $v^2 = wz$. Demostrar que
$$|w| + |z| = \left|\frac{w+z}{2} - v\right| + \left|\frac{w+z}{2} + v\right|$$

21. Demostrar que si para $i = 1, 2, \ldots, n$, cada z_i es un número complejo, entonces
$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$$

22. Sabiendo que z y w son números complejos tales que $|z| = |w| = 1$, demostrar que $\frac{z-w}{z+w}$, $(z \neq -w)$, es un imaginario puro.

23. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

 a) Si $w = \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1z_2}$, demostrar que : $w\bar{w} = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1)}{1 + |z_1|^2|z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1)}$

 b) En el caso a) : si $|z_1| \leq 1$, demostrar que $|w| \leq 1$

24. Hallar $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tales que $|z_1| = |z_2| = |z_1 + z_2| = 1$, z_1z_2 es un imaginario puro.

25. Sean z_1 y z_2 dos números complejos tales que $|z_1| = 2$, $|z_2| = \sqrt{3}$ y $z_1\bar{z}_2 = 2i$. Hallar el valor de $|z_1 + iz_2|$.

26. Determinar algebraicamente las raíces cuadradas de los siguientes complejos

a) $z = -15 - 8i$	d) $z = -8 + 6i$	g) $z = -2\sqrt{3} + 2i$
b) $z = 3 - 4i$	e) $z = 5 - 12i$	h) $z = 7 + 24i$
c) $z = -11 + 60i$	f) $z = -8 - 6i$	i) $z = -1 + 4\sqrt{3}i$

27. Resolver las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$

a) $z^2 - (2+i)z + (3+i) = 0$	c) $z^2 - (3-2i)z + (5-5i) = 0$
b) $z^2 - (2+i)z + (-1+7i) = 0$	d) $(2+i)z^2 - (5-i)z + (2-2i) = 0$

28. Resolver en $\mathbb{C}$: $|\bar{z} + 2i| - |iz - 2| = 0$

7.7 LUGARES GEOMETRICOS EN $\mathbb{C}$

El término lugar geométrico se aplica normalmente al conjunto de todos los puntos que tienen una característica geométrica común. Así por ejemplo, son lugares geométricos : la recta , la circunferencia , la parábola , la elipse , etc. Haciendo uso de la notación de módulo , a continuación describimos analítica y geométricamente algunos de estos lugares geométricos.

7.7.1 LA LINEA RECTA

Ejemplo 1 Representar en el plano complejo las siguientes relaciones

a) $\text{Re}(z) = 3$ c) $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = 1$

b) $\text{Im}(z) = 2$ d) $\text{Re}(z) - \text{Im}(z) = z_0$

Solución.

a) $\text{Re}(z) = 3$, es el conjunto de todos los pares ordenados para los cuales $x = 3$, es decir , es el lugar geométrico de los afijos de la forma $z = (3 , y)$. La ecuación $x = 3$ corresponde a la recta paralela al eje imaginario que pasa por el punto de abscisa 3 (Figura 7.9)

b) $\text{Im}(z) = 2$, es el lugar geométrico de todos los afijos para los cuales $y = 2$, es decir , $LG = \{z \mid z = (x , 2)\}$. Su gráfica corresponde a la recta paralela al eje real que pasa por el punto de ordenada 2 (Figura 7.10)

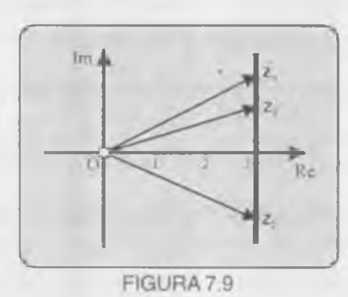


FIGURA 7.9

FIGURA 7.10

c) $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = 1$, es el lugar geométrico de todos los puntos tales que

$$(x , 0) + (0 , y) = 1 \Leftrightarrow x(1 , 0) + y(0 , 1) = (1 , 0) \Rightarrow \mathscr{L} : x + y = 1$$

Es una recta que pasa por los puntos (1 , 0) y (0 , 1). (Figura 7.11)

d) $\text{Re}(z) - \text{Im}(z) = z_0$, está representado en el plano complejo por todos los puntos tales que

$$(x , 0) - (0 , y) = (0 , 0) \Leftrightarrow x(1 , 0) - y(0 , 1) = (0 , 0) \Rightarrow \mathscr{L} : x - y = 0$$

Es una recta que pasa por el origen de coordenadas y biseca al primer y tercer cuadrantes (Figura 7.12)

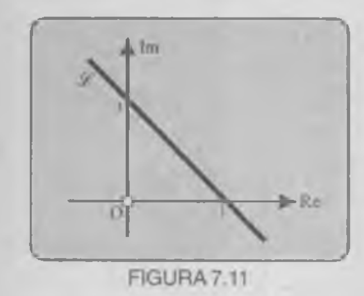


FIGURA 7.11

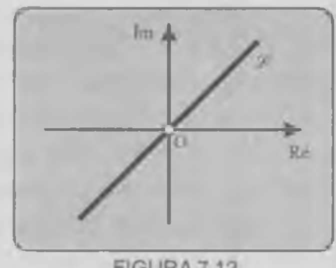


FIGURA 7.12

Ejemplo 2 Determinar la ecuación de la recta cuyos puntos equidistan de dos puntos dados.

Solución. Sean $P_1(x_1 , y_1)$ y $P_2(x_2 , y_2)$ los afijos de los complejos z_1 y z_2 respectivamente , y sea $z = P(x , y)$ un punto del lugar geométrico. En cualquier posición de P se debe cumplir que

$$d(P_1 , P) = d(P_2 , P) \Rightarrow |z - z_1| = |z - z_2|$$

$$\therefore |z - (x_1 , y_1)| = |z - (x_2 , y_2)|$$

Esta ecuación nos describe el lugar geométrico de todos los afijos de z que equidistan de los afijos de z_1 y z_2 , y que es la mediatriz del segmento que une P_1 y P_2.

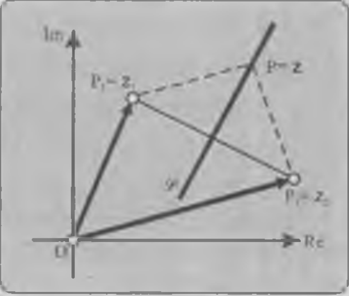


FIGURA 7.13

Por ejemplo , si $z_1 = (-1 , 3)$ y $z_2 = (3 , 5)$ $\Rightarrow |z - (-1 , 3)| = |z - (3 , 5)|$

$$\Rightarrow |(x + 1 , y - 3)| = |(x - 3 , y - 5)|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 5)^2}$$

de donde obtenemos la ecuación de la mediatriz $\mathscr{L} : 2x + y - 6 = 0$ ■

7.7.2 LA CIRCUNFERENCIA

La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.

Sean $Q(x_0 , y_0)$ el afijo del complejo w y P(x , y) el afijo generatriz del complejo z. Por definición

$$d(Q , P) = r \Rightarrow |z - w| = r$$

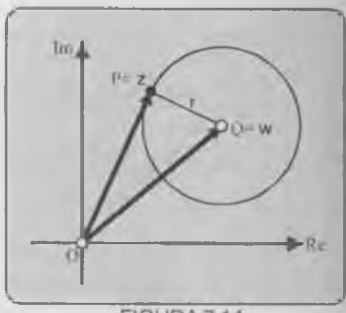


FIGURA 7.14

Entonces el conjunto

$$A = \{z \mid |z - w| = r \ , \ r > 0 \ , \ w \text{ fijo}\}$$

nos describe el lugar geométrico de todos los afijos de z a una distancia r del punto fijo w. Es decir , A es una circunferencia de centro w y radio r. Si $w = z_0 = (0 , 0)$, entonces la ecuación compleja $|z - w| = r$ representa una circunferencia con centro en el origen y radio r. En efecto

$$|(x , y) - (0 , 0)| = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = r \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

Ejemplo 3 Sea A = L.G. de los afijos de z , tales que : $|\bar{z} - 5 + 7i| = |iz - 1 + 3i|$ y sea B = L.G. de los afijos de z , tales que : $|z + 1 + 2i| = 5$.

a) Graficar $A \cup B$, b) Hallar $A \cap B$.

Solución. Por la propiedad VA.3 :

$$\Rightarrow |\overline{z - (5 - 7i)}| = |i(z + 3 + i)|$$

$$\Rightarrow |z - (5 + 7i)| = |i| \, |z - (-3 - i)|$$

$$\Leftrightarrow |z - (5 , 7)| = |z - (-3 , -1)|$$

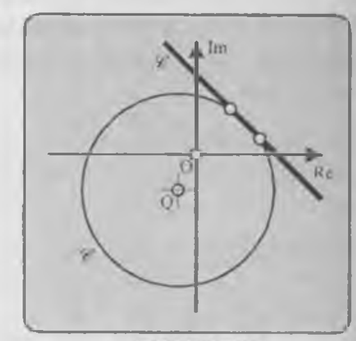


FIGURA 7.15

La ecuación compleja representa la mediatriz del segmento que une los puntos (5 , 7) y (-3 , -1)

$$\Rightarrow \sqrt{(x - 5)^2 + (y - 7)^2} = \sqrt{(x + 3)^2 + (y + 1)^2}$$

de donde obtenemos la mediatriz $\mathscr{L} : x + y = 4$

En B : $|z - (-1 , -2)| = 5$

Circunferencia de centro Q(-1 , -2) y radio r = 5

$$\Rightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 2)^2} = 5 \Leftrightarrow \mathscr{C} : (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

La gráfica de $A \cup B$ se muestra en la Figura 7.15

b) De A : y = 4 - x , sustituyendo en B : $(x + 1)^2 + (4 - x + 2)^2 = 25$

de donde : $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3$ ó $x = 2$; $\Leftrightarrow y_1 = 1$ ó $y = 2$ $\;\therefore A \cap B = \{(3 , 1) , (2 , 2)\}$ ■

7.7.3 LA PARABOLA

La parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un

punto fijo llamado *foco* y de una recta llamada *directriz*.

Caso 1. El eje de la parábola coincide o es paralelo con el eje real.

Sean : P(x , y) el afijo genérico del complejo z ; el foco F(p , 0) , afijo del complejo z_1 y $\mathscr{L} : x + p = 0$, la directriz; donde p es la distancia del vértice al foco de la parábola.

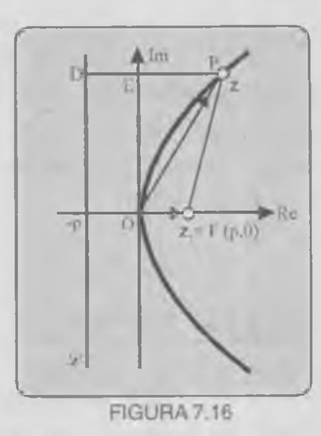


FIGURA 7.16

Por definición : $d(P , F) = d(P, D)$

$$\Rightarrow |z - z_1| = |\overline{PE} + \overline{ED}| = |\text{Re}(z) + p|$$

$$\Rightarrow |z - (p , 0)| = |x + p|$$

Es la ecuación compleja de la parábola con vértice en el origen y eje de simetría coincidente con el eje real.

En efecto , $\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = |x + p|$

Elevando al cuadrado : $(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2$

de donde obtenemos : $y^2 = 4px$

Si el vértice coincide con el punto V(h , k) la ecuación toma la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$. Cuando p > 0 , la curva se abre hacia la derecha y cuando p < 0 , hacia la izquierda.

Caso 2. El eje de la parábola es coincidente o paralelo al eje imaginario.

Como en el caso 1 tenemos :

$z = P(x , y)$, $z_1 = F(0 , p)$, $\mathscr{L} : y + p = 0$

Luego , si $d(P , F) = d(P , D) \Rightarrow |z - z_1| = |\overline{PE} + \overline{ED}|$

$$\Rightarrow |z - (0 , p)| = |\text{Im}(z) + p|$$

$$\Rightarrow |z - (0 , p)| = |y + p|$$

Es la ecuación compleja de la parábola con vértice en el origen y eje coincidente con el eje imaginario.

FIGURA 7.17

En efecto : $\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$

$$\Rightarrow x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2 \Leftrightarrow x^2 = 4py$$

Si el vértice coincide con el punto V(h , k) , la ecuación toma la forma

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

cuando p > 0 , la curva se abre hacia arriba y cuando p < 0 , hacia abajo.

Ejemplo 4 Graficar el siguiente lugar geométrico

$$|iz + 3 - 2i| = |\text{Re}(z) - 4|$$

Solución. $|i(z - 2 - 3i)| = |x - 4| \Rightarrow |i| \, |z - (2 , 3)| = |x - 4|$

$$\Rightarrow |z - (2 , 3)| = |x - 4|$$

Foco de la parábola , F(2 , 3) ; directriz , $\mathscr{L}$: x - 4 = 0

Forma analítica : $\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = |x-4|$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2 = (x-4)^2$

$\Rightarrow (y-3)^2 = -4(x-3)$

El lugar geométrico es una parábola con vértice en V(3 , 3)

Como $4p = -4 \Rightarrow p = -1 < 0$

La curva se abre hacia la izquierda , tal como se muestra en la Figura 7.18

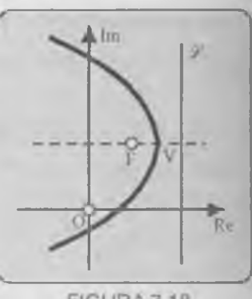


FIGURA 7.18

7.7.4 LA ELIPSE

La elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de las distancias a dos puntos fijos es una constante $2a$

En una elipse se tiene los siguientes elementos :

Eje mayor : $A_1A_2 = 2a$

Eje menor : $B_1B_2 = 2b$

Distancia focal : $F_1F_2 = 2c$, donde F_1 y F_2 son los focos de la elipse ; de modo que se cumple la relación

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Q es el centro de la elipse $\Rightarrow Q = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$

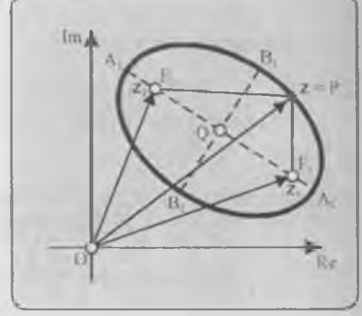


FIGURA 7.19

Determinación de la ecuación compleja :

Sean $F_1(x_1 , y_1)$ y $F_2(x_2 , y_2)$ los afijos de los complejos z_1 y z_2 respectivamente.

Por definición : $d(P , F_1) + d(P , F_2) = 2a \Rightarrow |z - z_1| + |z - z_2| = 2a$

$\Rightarrow |z - (x_1 , y_1)| + |z - (x_2 , y_2)| = 2a$

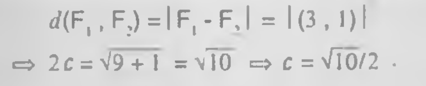
es la ecuación compleja de la elipse.

Ejemplo 5 Graficar el lugar geométrico : $|z - 1 - 3i| + |z + 2 - 2i| = 4$

Solución. $|z - (1 + 3i)| + |z - (-2 + 2i)| = 4$

$\Rightarrow |z - (1 , 3)| + |z - (-2 , 2)| = 4$

Luego , $2a = 4 \Rightarrow a = 2$; $F_1(1 , 3)$ y $F_2(-2 , 2)$


$d(F_1 , F_2) = |F_1 - F_2| = |(3 , 1)|$

$\Rightarrow 2c = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \Rightarrow c = \sqrt{10}/2$.

Como $c < a$, el lugar geométrico es una elipse con centro en $Q = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = (-1/2 , 5/2)$, cuya gráfica se muestra en la Figura 7.20

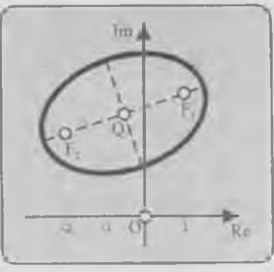


FIGURA 7.20

7.7.5 LA HIPERBOLA

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de las distancias a dos puntos fijos, llamados focos , es constante e igual a $2a$.

Una hipérbola tiene los siguientes elementos

Focos : $F_1(x_1 , y_1)$ y $F_2(x_2 , y_2)$

Eje transverso : $A_1A_2 = 2a$

Eje conjugado : $B_1B_2 = 2b$

Distancia focal : $F_1F_2 = 2c$

Dado que $c > a \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

Centro de la hipérbola : $Q = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$

FIGURA 7.21

Determinación de su ecuación compleja.

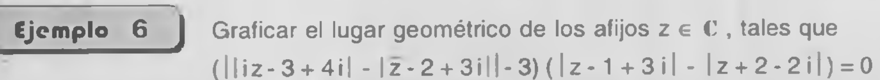
Sea P(x , y) el afijo genérico del complejo z , y sean F_1 y F_2 los afijos de los complejos z_1 y z_2 respectivamente.

Por definición : $|d(P , F_1) - d(P , F_2)| = 2a$

$\Rightarrow ||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a \Leftrightarrow ||z - (x_1 , y_1)| - |z - (x_2 , y_2)|| = 2a$

es la ecuación compleja de una hipérbola.

Ejemplo 6 Graficar el lugar geométrico de los afijos $z \in \mathbb{C}$, tales que


$(||iz - 3 + 4i| - |\bar{z} - 2 + 3i|| - 3)(|z - 1 + 3i| - |z + 2 - 2i|) = 0$

Solución. Sea A el L.G. de los afijos de z tales que $||iz - 3 + 4i| - |\bar{z} - 2 + 3i|| - 3 = 0$

B el L.G. de los afijos de z tales que $|z - 1 + 3i| - |z + 2 - 2i| = 0$

En A : $||i(z + 3i + 4)| - |\overline{z - (2 - 3i)}|| = 3$

$\Rightarrow \; ||i|\,|z - (-4 - 3i)| - |z - (2 + 3i)|| = 3$

$\Rightarrow \; ||z - (-4 , -3)| - |z - (2 , 3)|| = 3$

de donde : $a = 3/2$, $F_1(2 , 3)$ y $F_2(-4 , -3)$

$d(F_1 , F_2) = |F_1 - F_2| = |(6 , 6)|$

$2c = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} \Rightarrow c = 3\sqrt{2}$

Como $c > a$, el lugar geométrico es una hipérbola con centro en $Q = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = (-1 , 0)$

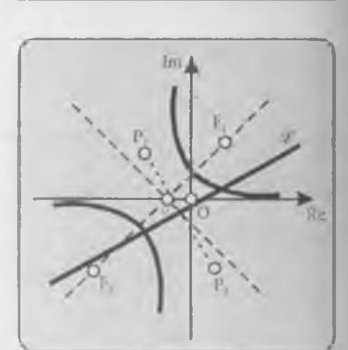
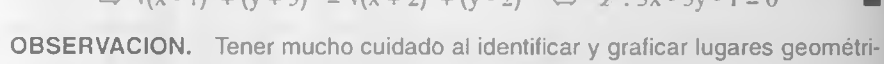


FIGURA 7.22

En B : $|z - (1 , -3)| = |z - (-2 , 2)|$

Es la ecuación compleja de la mediatriz del segmento que une a $P_1(1 , -3)$ y $P_2(-2 , 2)$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} \Leftrightarrow \mathcal{L} : 3x - 5y - 1 = 0$$ ■



OBSERVACION. Tener mucho cuidado al identificar y graficar lugares geométricos cuyas ecuaciones tienen la forma $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$, pues éstas representan solamente una de las dos ramas de la hipérbola.

Ejemplo 7 Identificar y construir la gráfica del L.G. : $|z + 3| - |z - 3| = 4$

Solución. Podemos escribir : $|z - (-3 , 0)| - |z - (3 , 0)| = 4$

Aparéntemente se trata de una hipérbola con focos en $F_1(3 , 0)$ y $F_2(-3 , 0)$, y con centro Q(0 , 0). Además : $2a = 4 \Rightarrow a = 2$; $2c = 6 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 5$

Ecuación de la hipérbola : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

Este mismo resultado lo obtenemos partiendo de la ecuación compleja dada.

$|z + 3| = 4 - |z - 3| \Rightarrow \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 4 + \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$

Elevando al cuadrado obtenemos :

$$2\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 3x - 4$$

Dado que , $\sqrt{a} \geq 0$, $\forall a \geq 0$, entonces

$$(2\sqrt{(x-3)^2 + y^2})^2 = (3x - 4)^2 \wedge 3x - 4 \geq 0$$

de donde se tiene : $5x^2 - 4y^2 = 20$, para $x \geq 4/3$

Por lo que la ecuación del lugar geométrico representa solamente la rama derecha de la hipérbola (Figura 7.23) ■

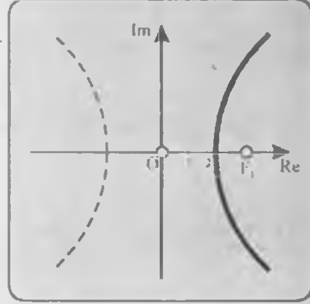


FIGURA 7.23

Nota. Asociadas a las gráficas de los lugares geométricos de ecuaciones complejas estudiadas , están las gráficas de relaciones que involucran desigualdades. Sus representaciones en el plano complejo se hacen en idéntica forma tal como se hizo para las gráficas de relaciones en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 8 Representar en el plano complejo los conjuntos de puntos que satisfacen a las siguientes relaciones

(1) $R_1 = \{ z \mid -2 \leq \text{Im}(z) < 3 \}$

(2) $R_2 = \{ z \mid 2\,\text{Re}(z) - 3\,\text{Im}(z) \leq 6 \}$

(3) $R_3 = \{ z \mid 2 < |z - 1| \leq 4 \}$

(4) $R_4 = \{ z \mid |z + 1| \leq 4 - |z - 1| \}$

Solución.

(1) La gráfica de R_1 es la intersección de las gráficas de : $\text{Im}(z) \geq -2$ y $\text{Im}(z) < 3$; es decir , R_1 es el conjunto de puntos para los cuales $(y \geq -2) \wedge (y < 3)$, que corresponde al semiplano que contiene al origen cuyos bordes inferior y superior son las rectas $y = -2$, $y = 3$. No se incluye la frontera $y = 3$ (Figura 7.24).

(2) La gráfica de R_2 es el conjunto de puntos $z = (x , y)$, tales que

$$2x - 3y \leq 6 \Leftrightarrow y \geq \frac{2}{3}x - 2$$

Es decir , es el conjunto de puntos situados en el semiplano superior de la recta $\mathcal{L} : 2x - 3y = 6$, incluida la frontera $\mathcal{L}$. (Figura 7.25)

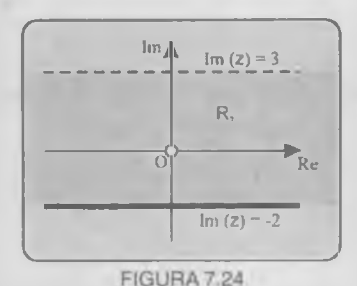


FIGURA 7.24

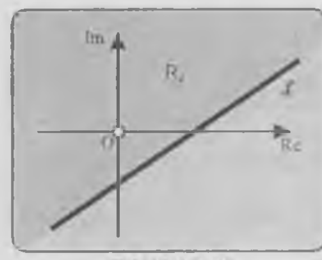


FIGURA 7.25

(3) Las gráficas de $|z - 1| = 2$ y $|z - 1| = 4$ son dos circunferencias concéntricas de radios 2 y 4 y centro común en Q(1 , 0).

En efecto , si $|z - 1| = 2 \Rightarrow |(x - 1 , y)| = 2 \Leftrightarrow \mathcal{C}_1 : (x - 1)^2 + y^2 = 4$

$|z - 1| = 4 \Rightarrow |(x - 1 , y)| = 4 \Leftrightarrow \mathcal{C}_2 : (x - 1)^2 + y^2 = 16$

Por lo tanto , la gráfica de R_3 es el anillo circular comprendido entre las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, incluyendo los bordes (Figura 7.26)

(4) Si $|z - (-1 , 0)| + |z - (1 , 0)| \leq 4 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$; $F_1(-1 , 0)$ y $F_2(1 , 0)$

$d(F_1 , F_2) = |F_2 - F_1| = |(2 , 0)| \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1$

Como $a > c$, la gráfica de $|z+1| + |z-1| = 4$ es una elipse cuyo centro está en $Q = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = (0, 0)$. Además, $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = 4 - 1 = 3$

Ecuación de la elipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \mathcal{E} : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

Por lo que la gráfica de R_1 es el conjunto de puntos que están en el interior de la elipse $\mathcal{E}$, incluyendo la frontera (Figura 7.27)

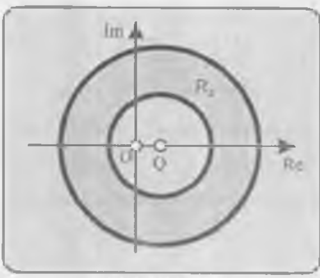


FIGURA 7.26

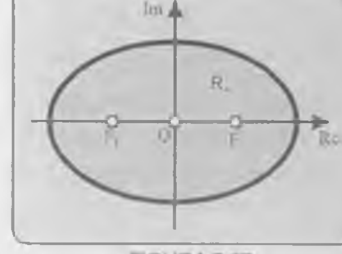


FIGURA 7.27

MISCELANEA DE EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Determinar los conjuntos de puntos del plano complejo que verifican $(z + z^{-1}) \in R$

Solución. Sea $z = (x, y)$, tal que : $z \neq z_0 = (0, 0)$ y $|z| \neq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \neq 0$

$$\text{Luego, } z + z^{-1} = z + \frac{1}{z} = x + yi + \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$$

$$= \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)i$$

Si $(z + z^{-1}) \in \mathbf{R} \Rightarrow \text{Im}(z + z^{-1}) = 0$, esto es : $y - \frac{y}{x^2 + y^2} = 0$

de donde obtenemos : $y(x^2 + y^2 - 1) = 0 \wedge x^2 + y^2 \neq 0$

$\Rightarrow (y = 0 \text{ ó } x^2 + y^2 = 1) \wedge (x^2 + y^2 \neq 0)$

$\Rightarrow (y = 0 \wedge x^2 + y^2 \neq 0) \vee (x^2 + y^2 = 1 \wedge x^2 + y^2 \neq 0)$

La gráfica de $(z + z^{-1}) \in \mathbf{R}$ es la unión de la gráfica de la circunferencia de radio $r = 1$ y centro $z_0 = (0, 0)$, con la gráfica del eje real $y = 0$, exceptuando el origen. ■

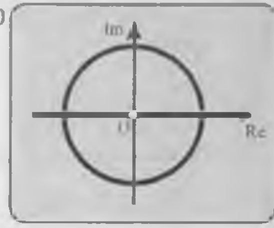


FIGURA 7.28

Ejemplo 2 Demostrar que si c es una constante real positiva, entonces los afijos de $z \in \mathbf{C}$, tales que $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = c$ representa una circunferencia si $c \neq 1$, y una recta si $c = 1$.

Demostración. En efecto, sea $z = (x, y)$

$$\text{Si } \left|\frac{z+1}{z-1}\right| = c \Rightarrow |z+1|^2 = c^2|z-1|^2$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = c^2[(x-1)^2 + y^2] \Leftrightarrow (c^2-1)x^2 + (c^2-1)y^2 - 2(c^2+1)x + c^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

Haciendo $a = c^2 - 1$, se tiene : $a x^2 + a y^2 - 2(a+2)x + a = 0$

Completando el cuadrado para x resulta : $\left(x - \frac{a+2}{a}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a+2}{a}\right)^2 - 1$

Tenemos una circunferencia de centro $\left(\frac{a+2}{a}, 0\right)$ y radio $r = \sqrt{\left(\frac{a+2}{a}\right)^2 - 1}$, si $a \neq 0$

Luego, $c^2 \neq 1 \Rightarrow c \neq 1$

En (1), si $c = 1 \Rightarrow -2(1+1)x = 0 \Rightarrow x = 0$, es una recta. ■

Ejemplo 3 Analizar que lugar geométrico representa los afijos de los $z \in \mathbf{C} \mid a z\bar{z} + c z + c\bar{z} + b = 0$, donde $a, b \in \mathbf{R}$ y $c \in \mathbf{C}$

Solución. Sea $z = x + yi \Rightarrow |z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$; $x = \text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

$$\text{Luego, si } a|z|^2 + c(z + \bar{z}) + b = 0 \Rightarrow a(x^2 + y^2) + 2cx + b = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2\left(\frac{c}{a}\right)x + y^2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow \left(x + \frac{c}{a}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2 - ab}{a^2}$$

El lugar geométrico es una circunferencia de centro $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ y radio $r = \frac{\sqrt{c^2 - ab}}{a}$

Ejemplo 4 Hallar el lugar geométrico que describe el afijo z cuando

$$z = 1 + i + \frac{1}{1 + ri}, \ r \in \mathbf{R}$$

Solución. $z = 1 + i + \frac{1 - ri}{(1 + ri)(1 - ri)} \Rightarrow z = \left(1 + \frac{1}{1 + r^2}, 1 - \frac{r}{1 + r^2}\right)$

Luego, si $x = 1 + \frac{1}{1 + r^2} \Rightarrow r^2 = \frac{2 - x}{x - 1}$

$$y = 1 - \frac{r}{1 + r^2} = 1 - r\left(\frac{1}{1 + r^2}\right) \Rightarrow y = 1 - r(x - 1)$$

$$y - 1 = -r(x-1) \Rightarrow (y-1)^2 = r^2(x-1)^2 = \left(\frac{2-x}{x-1}\right)(x-1)^2$$

de donde obtenemos : $(y-1)^2 = -(x^2 - 3x + 2) \Rightarrow (y-1)^2 = -(x-3/2)^2 + 1/4$

$$\therefore\ (x-3/2)^2 + (y-1)^2 = 1/4$$

El lugar geométrico es una circunferencia de centro (3/2 , 1) y radio r = 1/2 ■

Ejemplo 5 Esbozar la gráfica de la relación

$$R = \{z \mid \,||z+4+3i| - |iz-2i+5|| \le 8\}$$

Solución. $||z+4+3i| - |iz-2i+5|| = ||z+4+3i| - |i(z-2-5i)||$

$$= ||z-(-4,-3)| - |z-(2,5)|| = 8$$

de donde : $2a = 8 \Rightarrow a = 4$, $F_1(2,5)$, $F_2(-4,-3)$

$d(F_1, F_2) = |F_1 - F_2| = |(6,8)|$

$\Rightarrow 2c = \sqrt{36+64} = 10 \Rightarrow c = 5$

Como $c > a$, el lugar geométrico es una hipérbola con centro en $Q = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = (-1, 1)$

Gráfica del conjunto R

Si $||z-(-4,-3)| - |z-(2,5)|| \le 8$

$\Rightarrow \sqrt{(x+4)^2 + (y+3)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2} \le 8$

Veamos si $(0, 0) \in \mathbf{R}$

$\sqrt{4^2 + 3^2} - \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} \le 8$

$\Rightarrow \sqrt{25} - \sqrt{29} \le 8$, se cumple.

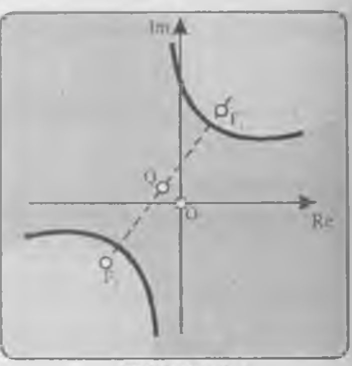


FIGURA 7.29

Luego , la gráfica de R es el conjunto de puntos ubicados entre dos ramas de la hipérbola , incluidos los bordes (Figura 7.29) ■

Ejemplo 6 Dados : $R_1 = \{z \mid |z+1-2i| + |iz+2-3i| \le 6\}$ y $R_2 = \{z \mid |z+2-i| \le |iz+5-4i|\}$; construir la gráfica de $R_1 \cap R_2$

Solución. (1) Construcción de las gráficas de los lugares geométricos

$$A: |z+1-2i| + |iz+2-3i| = 6 \;\; \text{y} \;\; B: |z+2-i| = |iz+5-4i|$$

(2) En A : $|z+1-2i| + |i(z-3-2i)| = 6 \Rightarrow |z-(-1,2)| + |z-(3,2)| = 6$

de donde se tiene : $2a = 6 \Rightarrow a = 3$, $F_1(3,2)$, $F_2(-1,2)$

$$\Rightarrow 2c = d(F_1, F_2) = |F_1 - F_2| = |(4,0)| = 4 \Rightarrow c = 2$$

Como $c < a$, A es una elipse con centro en $Q = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = (1, 2)$

Además : $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 4 = 9 - b^2 \Rightarrow b = \sqrt{5}$

(3) En B : $|z+2-i| = |i(z-4-5i)| \Rightarrow |z-(-2,-1)| = |z-(4,5)|$

Luego , B es la mediatriz del segmento que une los puntos (-2 , -1) y (4 , 5).

En efecto , si $|(x+2), (y+1)| = |(x-4), (y-5)|$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} \Leftrightarrow \mathscr{L}: x + y = 3$$

(4) Gráfica de R_1

$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} \le 6$

Veamos si $(0, 0) \in R_1 \Rightarrow \sqrt{1+4} + \sqrt{9+4} \le 6$

$\Rightarrow 2.24 + 3.6 \le 6$

Se cumple , luego R_1 es la totalidad de puntos en el interior de la elipse , incluyendo el borde.

(5) Gráfica de R_2 : $x + y \le 3 \Rightarrow y \le 3 - x$

R_2 es el conjunto de puntos ubicados en el semiplano inferior de la recta $\mathscr{L}$, incluyendo el borde.

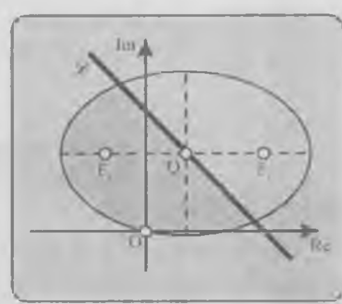


FIGURA 7.30

(6) La gráfica de $R_1 \cap R_2$ se muestra en la Figura 7.30. ■

Ejemplo 7 Sean , $R_1 = \{z \mid |iz+3i+2| + |z-5-6i| \le 12\}$ y $R_2 = \{z \mid |iz-i+4| \ge 3\}$ Hallar el área de $R_1 \cap R_2$.

Solución. (1) Construcción de las gráficas de los conjuntos

$$A: |iz+3i+2| + |z-5-6i| = 12 \;\; \text{y} \;\; B: |iz-i+4| = 3$$

(2) En A : $|i(z+3-2i)| + |z-5-6i| = 12 \Rightarrow |z-(-3,2)| + |z-(5,6)| = 12$

de donde se tiene : $2a = 12 \Rightarrow a = 6$, $F_1(5,6)$, $F_2(-3,2)$

$$2c = d(F_2, F_1) = |F_1 - F_2| = |(8,4)| = \sqrt{64+16} = 4\sqrt{5} \Rightarrow z = 2\sqrt{5}$$

Como $c < a$, A es una elipse con centro en $Q = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = (1, 4)$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 20 = 36 - b^2 \Rightarrow b = 4$$

(3) En B : $|i(z-1-4i)| = 3 \Rightarrow |z-(1,4)| = 3$

Luego B es una circunferencia de centro Q(1 , 4) y radio r = 3

(4) Gráfica de R_1 : $|z-(-3,2)| + |z-(5,6)| \le 12$

$\Rightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-6)^2} \le 12$

Es $(0, 0) \in R_1$? $\Rightarrow \sqrt{9+4} + \sqrt{25+36} \le 12$

$\Rightarrow \sqrt{13} + \sqrt{61} \le 12$, se cumple

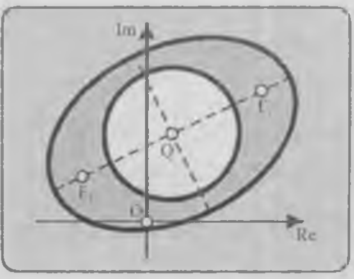


FIGURA 7.31

Luego, R_1 es el conjunto de puntos en el interior de la elipse, incluyendo el borde.

(5) Gráfica de R_2 : $|z-(1,4)| \geq 3 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-4)^2 \geq 9$

Es $(0,0) \in R_2 \Rightarrow (1)^2+(4)^2 \geq 9$, se cumple

Entonces, la gráfica de R_2 es la totalidad de puntos ubicados en la parte exterior a la circunferencia, incluyendo el borde. Por lo tanto :

$$a(R_1 \cap R_2) = a(\text{elipse}) - a(\text{círculo}) = \pi ab - \pi r^2 = 15\pi u^2$$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 38*

En los ejercicios 1 al 12, identificar el lugar geométrico de los puntos que representan los números complejos $z = x + yi$, tales que

1. $|z| + Im(z) = 0$
2. $|z| - Re(z) = 2$
3. $\bar{z} + z = |z|^2$
4. $|z-2| = 2|z+1|$
5. $|z-2+i| = 2$
6. $|z-z_1| = |z-z_2|$
7. $|z-i| = |z+2|$
8. $Im(z^2) = 4$
9. $|z| = Im(z) + 1$
10. $|z+1-2i| + |z-1-2i| = 8$
11. $2z\bar{z} + (2+i)z + (2-i)\bar{z} = 2$
12. $|z+i| + |z-i| = 4$

13. a) Si $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ y $z = x + yi$, hallar Re (w) e Im (w)

b) Graficar el siguiente conjunto : $A = \left\{z \in \mathbb{C} \mid Re\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = 1\right\}$

14. Demostrar que la ecuación de la mediatriz del segmento de recta que determinan z_1 y z_2 está dada por

$$(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z + (z_2 - z_1)\bar{z} = |z_2|^2 - |z_1|^2$$

Aplicación : Verificar la fórmula para $z_1 = (-3 . 4)$ y $z_2 = (1, -2)$

En los ejercicios 15 al 26, hallar el lugar geométrico de los afijos que representan a los números complejos $z = x + yi$, que satisfacen a las desigualdades dadas.

15. $|z-i| \leq 1$
16. $|z-i-1| < 1$
17. $|z-2| + |z+4| \leq 10$
18. $0 < Re(iz) < 1$
19. $|z-2| - |z+2| > 3$
20. $|2z| > |1+z^2|$
21. $1 < |z+2| \leq 2$
22. $|z| > 1 - Re(z)$
23. $||z-4i| - |z+2i|| \geq 4$
24. $||z-5-i| - |iz+3i+5|| > 8$
25. $|z+1-5i| \geq |iz+3-i|$
26. $\dfrac{1}{4} \leq Re\left(\dfrac{1}{z}\right) + Im\left(\dfrac{1}{z}\right) < \dfrac{1}{2}$

En los ejercicios 27 al 30 se dan los conjuntos R_1 y R_2, construir las gráficas

de $R_1 \cap R_2$.

27. $R_1 = \{z \mid |Im(z) - 5| \geq |z+1-3i|\}$; $R_2 = \{z \mid |z-3+2i| \leq |iz+3i-4|\}$
28. $R_1 = \{z \mid ||z+4i-3| - |z+5+2i|| \leq 8\}$; $R_2 = \{z \mid |iz-1+i| \leq 5\}$
29. $R_1 = \{z \mid |z-1-2i| + |iz+6-3i| \geq 6\}$; $R_2 = \{z \mid |z-2+4i| \leq 3\}$
30. $R_1 = \{z \mid |iz-2-i| \geq |Re(z)-3|\}$; $R_2 = \{z \mid |z-2-2i| \leq 3\}$
31. Donde se halla el afijo de z si : $\text{Log}_3\left(\dfrac{|z|^2 - |z| + 1}{|z|+2}\right) < 2$
32. Si el afijo del complejo z describe $|z| = 1$, qué lugar describe el afijo del complejo $w = x + yi$, sabiendo además que $w(z+1)^2 = 4$

7.8 FORMA POLAR DE UN NUMERO COMPLEJO

Sea el número complejo no nulo $z = x + yi$. Como ya se ha visto, este número se puede representar en un plano complejo por la pareja (x, y). Si trazamos la recta desde el origen al punto (x, y), habremos determinado una distancia r y un ángulo θ en posición normal (medido en sentido antihorario). Esto es, el punto (x, y) ha sido representado en términos de las coordenadas polares r y θ mediante las relaciones

$$x = r\,\text{Cos}\,\theta \ , \ y = r\,\text{Sen}\,\theta$$

de modo que si, $z = x + yi$, entonces

$$\boxed{z = r\,(\text{Cos}\,\theta + i\,\text{Sen}\,\theta)} \qquad (6)$$

Esta representación del complejo z se llama *forma polar o trigonométrica* de z, donde r es el módulo, radio vector o norma, y θ el argumento o amplitud.

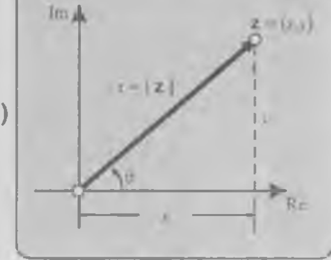


FIGURA 7.32

OBSERVACIONES

1. El número complejo $z = r(\text{Cos}\theta + i\,\text{Sen}\theta)$ puede ser representada en su forma simplificada por : $z = r\,\text{Cis}\theta$
2. Los valores de r y θ se pueden hallar por las relaciones

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \ , \ \text{Tg}\theta = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \theta = \text{arc Tg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

3. El argumento de un número complejo no es único, pero se tomará como argumento principal : $0 \leq \theta \leq 2\pi$

4. La relación $\text{Tg}\theta = \frac{y}{x}$ da dos valores para θ y el ángulo que se eligirá será el que se determine por los signos de x e y

5. Dados dos complejo en su forma polar : $z = r\,\text{Cis}\theta$ y $z_1 = r_1\,\text{Cis}\,\theta_1$, entonces si :

$$z = z_1 \Leftrightarrow r = r_1 \wedge \theta_1 = \theta + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 1 Determinar la forma polar de los siguientes complejos

a) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ c) $z = 1 + \sqrt{3}i$ e) $z = 3 - 3\sqrt{3}i$

b) $z = -\sqrt{3} - i$ d) $z = -5 + 0i$ f) $z = 0 - 2i$

Solución.

a) $z = -2 + 2\sqrt{3}i \Rightarrow r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

Para el argumento principal tenemos ; x = -2 (negativo) , $y = 2\sqrt{3}$ (positivo) , entonces θ termina en el II cuadrante.

Luego , si $\text{Tg}\,\theta = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \text{arcTg}(-\sqrt{3}) = 180° - 60° = 120° = 2\pi/3$

$$\therefore\ z = 4\,\text{Cis}(2\pi/3)$$

b) $z = -\sqrt{3} - i \Rightarrow r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$

Como x e y son ambos negativos , el argumento principal termina en el III cuadrante. Entonces si $\text{Tg}\,\theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 180° + 30° = 210° = 7\pi/6$

$$\therefore\ z = 2\,\text{Cis}\,(7\pi/6)$$

c) $z = 1 + \sqrt{3}i \Rightarrow r = |z| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$; $\text{Tg}\theta = \frac{y}{x} = \sqrt{3}$

Como x e y son ambos positivos , el argumento figura en el I cuadrante.

Luego , si $\theta = 60° = \pi/3 \Rightarrow z = \text{Cis}\,(\pi/3)$

d) $z = -5 + 0i \Rightarrow r = |z| = \sqrt{(-5)^2 + (0)^2} = 5$

Como x = -5 (semieje real negativo) e $y = 0 \Rightarrow \text{Tg}\,\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{-5} = 0 \Leftrightarrow \theta = \pi$

$$\therefore\ z = 5\,\text{Cis}\,\pi$$

e) $z = 3 - 3\sqrt{3}i \Rightarrow r = |z| = \sqrt{(3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = 6$

Dado que x = 3 (positivo) e $y = -3\sqrt{3}$ (negativo) , el argumento θ termina en el IV cuadrante. Luego , $\text{Tg}\theta = \frac{y}{x} = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = 360 - 60 = 300° = 5\pi/3$

$$\therefore\ z = 6\,\text{Cis}\,(5\pi/3)$$

f) $z = 0 - 3i \Rightarrow z = |z| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$

Como x = 0 e y = -3 (semieje imaginario negativo) $\Rightarrow \text{Tg}\theta = \frac{y}{x} = \infty \Rightarrow \theta = 270°$

$$\therefore\ z = 3\,\text{Cis}\,(3\pi/2)$$ ■

Ejemplo 2 Si $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \le |z| \le 4\ ,\ \frac{\pi}{4} \le \arg(z) \le \pi\}$; graficar e identificar el conjunto A.

Solución. $1 \le |z| \le 4$ es un anillo circular formado por las circunferencias $|z| = 1$ y $|z| = 4$. Entonces , A es un segmento de dicho anillo que parte de $\theta = \pi/4$ y termina en $\theta = \pi$. Su gráfica se ilustra en la Figura 7.33 ■

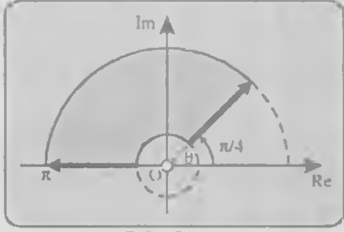


FIGURA 7.33

El siguiente teorema muestra como determinar el producto y el cociente de dos números complejos cuando éstos se expresan en forma polar.

TEOREMA 7.4 *Multiplicación y división de números complejos en la forma polar*

Si $z_1 = r_1(\text{Cos}\,\theta_1 + i\,\text{Sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\text{Cos}\,\theta_2 + i\,\text{Sen}\,\theta_2)$, donde $r_1 = |z_1|$ y $r_2 = |z_2|$, entonces

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2\,[\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2)]$

2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,[\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{Sen}(\theta_1 - \theta_2)]$

Demostración de 1.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\text{Cos}\theta_1 + i\,\text{Sen}\theta_1)(\text{Cos}\theta_2 + i\,\text{Sen}\theta_2)$$
$$= r_1 r_2 [(\text{Cos}\theta_1 \text{Cos}\theta_2 - \text{Sen}\theta_1 \text{Sen}\theta_2) + i\,(\text{Sen}\theta_1 \text{Cos}\theta_2 + \text{Cos}\theta_1 \text{Sen}\theta_2)]$$
$$= r_1 r_2 [\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

Así tenemos que : $z_1 z_2 = r_1 r_2\,\text{Cis}(\theta_1 + \theta_2)$

La demostración de la parte (2) es similar y se deja como ejercicio.

OBSERVACIONES

1. El argumento del producto de dos números complejos es igual a la *suma* de los argumentos de cada complejo.

$$\text{Arg}\,(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$$

2. El argumento del cociente de dos números complejos es igual a la *diferencia* de los argumentos de cada complejo.

$$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)$$

Ejemplo 3 Sean : $z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ y $z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$; efectuar en la forma polar las siguientes operaciones : a) $z_1 z_2$, b) $\frac{z_1}{z_2}$

Solución. En z_1 : $r_1 = |z_1| = 3$ y $\text{Tg}\,\theta_1 = \frac{y}{x} = \frac{-3/2}{3\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Como x es positivo e y negativo , el argumento principal termina en el IV cuadrante. Entonces : $\theta_1 = \text{arc Tg}(-1/\sqrt{3}) = 360° - 30° = 330° = 11\pi/6$

Por lo que : $z_1 = 3\,\text{Cis}(11\pi/6)$

En z_2 : $r_2 = |z_2| = 4$ y $\text{Tg}\,\theta_2 = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$

Como x es negativo e y positivo , el argumento principal termina en el II cuadrante.
Entonces : $\theta_2 = \text{arc Tg}(-\sqrt{3}) = 180° - 60° = 120° = (2\pi/3)$

Por lo tanto : $z_2 = 4\,\text{Cis}\,(2\pi/3)$.

a) $z_1 z_2 = (3)(4)\,\text{Cis}\left(\frac{11}{6}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) = 12\,\text{Cis}\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 12\,\text{Cis}\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 12\,\text{Cis}\,(\pi/2)$

$$\therefore\ z_1 z_2 = 12(\text{Cos}90° + i\,\text{Sen}90°) = 12\,i$$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{4}\text{Cis}\left(\frac{11}{6}\pi - \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{3}{4}\text{Cis}\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \frac{3}{4}\,\text{Cis}(180° + 30°) = \frac{3}{4}(-\text{Cos}30° - i\,\text{Sen}30°)$

$$\therefore\ \frac{z_1}{z_2} = -\frac{3}{8}(\sqrt{3} + i)$$ ■

Ejemplo 4 Efectuar : $z = \frac{(1 - i\sqrt{3})(\text{Cos}\theta + i\,\text{Sen}\theta)}{2(1 - i)(\text{Cos}\theta - i\,\text{Sen}\theta)}$

Solución. Sean : $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ y $z_2 = 1 - i$. Expresando ambos complejos en la forma polar y teniendo en cuenta que sus argumentos principales terminan en el IV cuadrante , se tiene.

Para z_1 : $r_1 = 2$ y $\text{Tg}\theta_1 = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \theta_1 = 360° - 60° = 300° \Rightarrow z_1 = 2\,\text{Cis}\,300°$

z_2 : $r_2 = \sqrt{2}$ y $\text{Tg}\theta_2 = -1 \Leftrightarrow \theta_2 = 360° - 45° = 315° \Rightarrow z_2 = \sqrt{2}\,\text{Cis}\,315°$

Luego , $z = \frac{2\,\text{Cis}\,300°\,(\text{Cis}\theta)}{2\sqrt{2}\,\text{Cis}\,315°\,\text{Cis}(-\theta)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{Cis}(300° - 315°)\,\text{Cis}(\theta + \theta)$

$$\Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2}[\text{Cos}\,(2\theta - 15°) + i\,\text{Sen}(2\theta - 15°)] = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{Cis}\left(2\theta - \frac{7\pi}{12}\right)$$ ■

Ejemplo 5 Representar gráficamente el lugar geométrico de los afijos de los complejos que cumplen con la relación $\text{Arg}\left(\frac{z - z_1}{z_1 - z_2}\right) = 0$, donde $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = -1 + 2i$.

Solución. Sean : $z = (x , y)$ y $w = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2}$

$$\Rightarrow w = \frac{(x - 1) + (y - 1)\,i}{2 - i}$$

$$= \frac{1}{5}[(2x - y - 1) + (x + 2y - 3)i]$$

Si $\text{Arg}(w) = \text{arc Tg}\left(\frac{x + 2y - 3}{2x - y - 1}\right) = 0$

$$\Rightarrow (x + 2y - 3 = 0) \wedge (2x - y - 1 > 0)$$

$$\Rightarrow (x + 2y - 3 = 0) \wedge (y < 2x - 1)$$

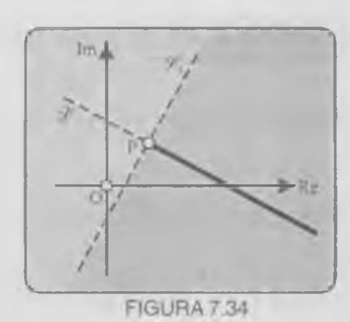


FIGURA 7.34

Si $\mathscr{L} : x + 2y - 3 = 0$ y $\mathscr{L}_1 : y = 2x - 1$, entonces los afijos del lugar geométrico que cumplen con la relación dada se encuentran sobre la recta $\mathscr{L}$, en la región del semiplano inferior de la recta $\mathscr{L}_1$, pues $y < 2x - 1$. Es de suponer que el punto $P(1 , 1) \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}$ no pertenece al lugar geométrico (Figura 7.34). ■

Ejemplo 6 Si $z \in \mathbb{C}\ |\ |z - 1| = 1$, $0 < \text{Arg}(z - 1) < \pi$; determinar $\text{Arg}(z^2 - z)$ en función de Arg(z).

Solución. El lugar geométrico $|z - 1| = 1$ es una circunferencia concentro en Q(1 , 0) y radio r = 1.
Entonces , sean : $\theta = \text{Arg}(z)$ y $\alpha = \text{Arg}(z - 1)$.
El ΔOQP es isósceles , pues $\overline{OQ} = \overline{QP} = r$; luego

$$m(\measuredangle QOP) = m(\measuredangle OPQ) = \theta$$

Además , como $\alpha = m(\measuredangle QOP) + m(\measuredangle OPQ) \Rightarrow \alpha = 2\theta$

Si $\text{Arg}(z^2 - z) = \text{Arg}(z)\,(z - 1) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z - 1)$

$$\Rightarrow \text{Arg}(z^2 - z) = \theta + \alpha = \theta + 2\theta = 3\theta$$

$$\therefore\ \text{Arg}(z^2 - z) = 3\,\text{Arg}(z)$$ ■

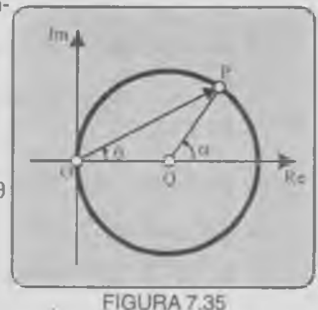


FIGURA 7.35

Ejemplo 7 Si $|\bar{z}i| = 8$ y $\text{Arg}[\,z(1 + i)] = \pi/6$, hallar el número complejo z en su forma polar.

Solución. Si $|\bar{z}i| = 8 \Rightarrow |\bar{z}|\,|i| = |\bar{z}| = 8$, esto es , $|z| = 8$

y si $\text{Arg}[z(1 + i)] = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{Arg}(z) + \text{Arg}(1 + i) = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \text{Arg}(z) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{12}$$

Por consiguiente : $z = 8\text{ Cis }(-\pi/12)$ o $z = 8\text{ Cis}(11\pi/12)$ ■

Ejemplo 8 Hallar la forma polar de cada número complejo z tal que

$$\bar{z}^2 - 2 + i = (1 - i)^3$$

Solución. Si $(\bar{z})^2 = 2 - i + (1 + i)^2(1 - i) = 2 - i + (-2i)(1 - i) \Rightarrow (\bar{z})^2 = -3i$

$$\Rightarrow \bar{z} = \pm\sqrt{-3i} \qquad (1)$$

Sean $w = -3i$ y $\sqrt{-3i} = c + di \Rightarrow c = \pm\sqrt{\frac{|w| + a}{2}}$ y $d = \pm\sqrt{\frac{|w| - a}{2}}$

Dado que $a = 0$, $b = -3$ y $|w| = 3 \Rightarrow c = d = \pm\sqrt{3/2}$

y como $b < 0$, entonces c y d se eligen de distinto signo , esto es

$$\sqrt{-3i} = \pm(\sqrt{3/2} - i\sqrt{3/2})$$

Luego , en (1) : $\bar{z} = \pm(\sqrt{3/2} - i\sqrt{3/2}) \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \sqrt{3/2} - i\sqrt{3/2}$ ó $\bar{z}_2 = -\sqrt{3/2} + i\sqrt{3/2}$

$\Leftrightarrow z_1 = \sqrt{3/2} + i\sqrt{3/2}$ ó $z_2 = -\sqrt{3/2} - i\sqrt{3/2}$

La forma polar de cada complejo es

$$z_1 = \sqrt{3}\text{ Cis }(\pi/4) \text{ ó } z_2 = \sqrt{3}\text{ Cis }(5\pi/4)$$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 39*

En los ejercicios 1 al 6 , expresar los números complejos dados en su forma polar

1. $z = 6\sqrt{3} + 6i$
2. $z = 3 - 3\sqrt{3}i$
3. $z = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i)$
4. $z = -5\sqrt{3} - 5i$
5. $z = -4 + 4\sqrt{3}i$
6. $z = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

En los ejercicios 7 al 10 , realizar la operación indicada y expresar el resultado en su forma rectangular.

7. $\dfrac{(\sqrt{2}\text{ Cis } 22°)(3\text{ Cis } 84°)(2\text{ Cis } 27°)}{(6\text{ Cis } 35°)(\text{Cis } 183°)}$

8. $\dfrac{(\text{Cos } 133° + i\text{ Sen } 767°)(\text{Cos } 317° + i\text{ Sen } 223°)}{\text{Cos } 30° - i\text{ Sen } 30°}$

9. $\dfrac{(\text{Cos } 171° + i\text{ Sen } 729°)(\text{Cos } 284° + i\text{ Sen } 1336°)}{\text{Cos } 330° - i\text{ Sen } 330°}$

10. $\dfrac{(\text{Cos } 295° + i\text{ Sen } 655°)[\text{Cos } (-20) + i\text{ Sen } 700°]}{\text{Cos } 415° - i\text{ Sen } 125°}$

11. Si $z_1 = 6\text{ Cis } 30°$, $z_2 = 2\text{ Cis } 10°$ y $z_3 = 3(\text{Cos } 20° - i\text{ Sen } 20°)$, hallar $z_1 z_2 / z_3$.

12. Hallar la forma polar de : a) $z = i\text{ Cis }(\pi/3) + 1$
    b) $z = 1 + i\text{ Cotg }\theta$, $\pi < \theta < 3\pi/2$

13. Escribir en la forma polar el resultado de : $(6 + 2i\sqrt{3})(7 + 7i)(4\sqrt{3} + 12i)$

14. Si $z = r\text{ Cis }\theta$, representar en forma polar : $\dfrac{2z}{1 - z^2}$

15. Si $|\bar{z}i| = 4$ y $\text{Arg}[z(1 + i\sqrt{3})] = \pi/4$, hallar el número complejo z en su forma polar.

16. Si $z_1 = 1 - 2i$ y $z_2 = 2 + i$, graficar el lugar geométrico de los afijos de números complejos que satisfacen la relación : $\text{Arg}\left(\dfrac{z - z_1}{z_1 - z_2}\right) = 0$

17. Localizar en un plano complejo los afijos que representan a los números complejos $z = x + yi$, tales que :
    a) $\pi/6 < \text{Arg}(z) \leq 2\pi/3$
    b) $\pi/3 \leq \text{Arg}(z + i) \leq \pi$
    c) $\pi/8 \leq \text{Arg}(z) \leq \pi/2 \wedge |z| \leq 3$
    d) $\pi/4 \leq \text{Arg}(z) < 3\pi/4 \wedge |z| > 2 \wedge |z| \leq 4$

18. Graficar los conjuntos
    a) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z = iw^2$, donde $|w| = 1$ y $\text{Arg}(w) \in [\pi/6, \pi/4]\}$
    b) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z = (i/w^2)$, $|w| \geq 1$ y $\text{Arg}(w) \in [\pi/6, \pi/3]\}$

7.9 POTENCIACION DE NUMEROS COMPLEJOS

TEOREMA 7.5 *El Teorema de De Moivre*

La potencia n-ésima de un número complejo en su forma polar tiene por módulo la potencia n-ésima de su módulo , y por argumento el producto de su argumento por n. Esto es , si

$$z = r\text{ Cis }\theta \Rightarrow z^n = r^n(\text{Cos } n\theta + i\text{ Sen } n\theta) \qquad (7)$$

Demostración. Por inducción completa , sea la proposición

$$P(n) = \{n \mid z^n = r^n\text{ Cis } n\theta\}$$

(1) Para $n = 1 \Rightarrow P(1) : z^1 = r^1\text{Cis }\theta \Rightarrow z = r\text{ Cis }\theta$, es verdadera

(2) Supongamos que para n = h , la proposición

$$P(h) : z^h = r^h \text{ Cis } h\,\theta \text{ , es verdadera} \qquad \text{(Hip. inductiva)}$$

Demostraremos que para $n = h + 1$, la proposición

$$P(h+1) : z^{h+1} = r^{h+1} \text{ Cis } (h+1)\,\theta \text{ , es verdadera}$$

En efecto

$$z^{h+1} = z^h \,.\, z = (r \text{ Cis } \theta)^h (r \text{ Cis } \theta) = (r^h \text{ Cis } h\theta)(r \text{ Cis } \theta) \qquad \text{(Hip. ind.)}$$

$$= r^h r \,[\text{Cis } (h\theta + \theta)] = r^{h+1} [\text{Cis } (h+1)\,\theta]$$

(3) Conclusión : Se ha probado que , $P(1)$ es V $\wedge$ $P(h)$ es V $\Rightarrow$ $P(h+1)$ es V.

Ejemplo 1 Si $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, hallar $\text{Re}(z^{20})$.

Solución. Expresamos z en su forma polar

$$|z| = r = \sqrt{(-\sqrt{3}/2)^2 + (1/2)^2} = 1 \text{ , } \text{Tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{1/2}{-\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Como $x < 0$, $y > 0$, el argumento principal termina en el II cuadrante

$$\Rightarrow \theta = \text{arc Tg } (-1/\sqrt{3}) = 180° - 30° = 150° = 5\pi/6$$

Luego , si $z = \text{Cis}\theta \Rightarrow z = 1 \text{ Cis}(5\pi/6) \Rightarrow z^{20} = 1^{20} \text{ Cis } 20(5\pi/6)$ (De Moivre)

$$\Rightarrow z^{20} = \text{Cis}(8 \times 2\pi + \tfrac{2}{3}\pi) = \text{Cos}(2\pi/3) + i\,\text{Sen}(2\pi/3)$$

$$\therefore \quad \text{Re}(z^{20}) = \text{Cos}(2\pi/3) = \text{Cos}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\text{Cos}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \qquad ■$$

Ejemplo 2 Usando el Teorema de De Moivre , demostrar las siguientes identidades :

$$\text{Sen } 3\theta = 3 \text{ Sen}\theta - 4 \text{ Sen}^3\theta$$
$$\text{Cos } 3\theta = 4 \text{ Cos}^3\theta - 3 \text{ Cos}\theta$$

Demostración. Sea el complejo unitario : $z = \text{Cos } \theta + i \text{ Sen } \theta$ $(|z| = 1)$

Elevando al cubo obtenemos :

$$z^3 = \text{Cos}^3\theta + \text{Cos}^2\theta \text{ Sen}\theta + 3i^2 \text{ Cos } \theta \text{ Sen}^2\theta + i^3 \text{ Sen}^3\theta$$
$$= (\text{Cos}^3\theta - 3 \text{ Cos } \theta \text{ Sen}^2\theta) + (3 \text{ Cos}^2\theta \text{ Sen}\theta - \text{Sen}^3\theta)i$$

Por el Teorema de De Moivre : $z^3 = (\text{Cos } \theta + i \text{ Sen } \theta)^3 = \text{Cos } 3\theta + i \text{ Sen } 3\theta$

Luego : $\text{Cos } 3\theta + i \text{ Sen } 3\theta = (\text{Cos}^3\theta - 3 \text{ Cos } \theta \text{ Sen}^2\theta) + (3 \text{ Cos}^2\theta \text{ Sen } \theta - \text{Sen}^3\theta)\, i$

Igualando las partes reales y las partes imaginarias se tiene :

$$\text{Cos } 3\theta = \text{Cos}^3\theta - 3 \text{ Cos } \theta(1 - \text{Cos}^2\theta) \Rightarrow \text{Cos } 3\theta = 4 \text{ Cos}^3\theta - 3 \text{ Cos } \theta$$
$$\text{Sen } 3\theta = 3(1 - \text{Sen}^2\theta) \text{ Sen } \theta - \text{Sen}^3\theta \Rightarrow \text{Sen } 3\theta = 3 \text{ Sen } \theta - 4 \text{ Sen}^3\theta \qquad ■$$

OBSERVACION. Dado un complejo $z = r \text{ Cis } \theta$ y un entero positivo n , se cumple

$$z^{-n} = r^{-n} \text{ Cis}(-n\,\theta) \qquad (8)$$

es decir , el Teorema de De Moivre es válido para potencias enteras negativas.

Ejemplo 3 Dado $z = 1 - i$, hallar z^{-3}

Solución. El complejo z en su forma polar es $z = \sqrt{2} \text{ Cis}(7\pi/4)$

$$\Rightarrow z^{-3} = (\sqrt{2})^{-3} \text{ Cis}(-21\pi/4) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\text{Cos}\left(\frac{21}{4}\pi\right) - i \text{ Sen}\left(\frac{21}{4}\pi\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\text{Cos}\left(4\pi + \frac{5}{4}\pi\right) - i \text{ Sen}\left(4\pi + \frac{5}{4}\pi\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\text{Cos}\left(\frac{5}{4}\pi\right) - i \text{ Sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\text{Cos}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) - i \text{ Sen}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[-\text{Cos}\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \text{ Sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \qquad ■$$

OBSERVACION. Si para un complejo unitario $z = \text{Cis } \theta$ aplicamos el Teorema de De Moivre , se cumplen las siguientes relaciones :

$$z^n = \text{Cos } n\theta + i \text{ Sen } n\theta \quad \text{y} \quad z^{-n} = \text{Cos } n\theta - i \text{ Sen } n\theta \text{ , } n \in \mathbb{Z}$$

de donde se obtienen

$$\text{Cos } n\theta = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n}) \qquad \text{Sen } n\theta = \frac{1}{2i}(z^n - z^{-n}) \qquad (9)$$

Estas dos fórmulas se utilizan para expresar potencias de Seno y Coseno en función de ángulos múltiples.

Ejemplo 4 Hallar $\text{Sen}^5\theta$ y $\text{Cos}^5\theta$ en términos de $\text{Sen } k\theta$ y $\text{Cos } k\theta$, respectivamente.

Solución. En las fórmulas (9) , para $n = 1$ se tiene :

$$2 \text{ Cos } \theta = \left(z + \frac{1}{z}\right) \Rightarrow (2 \text{ Cos}\theta)^5 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^5$$

$$\Rightarrow 32 \text{ Cos}^5\theta = z^5 + 5z^4\left(\frac{1}{z}\right) + 10z^3\left(\frac{1}{z}\right)^2 + 10z^2\left(\frac{1}{z}\right)^3 + 5z\left(\frac{1}{z}\right)^4 + \left(\frac{1}{z}\right)^5$$

$$= \left(z^5 + \frac{1}{z^5}\right) + 5\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + 10\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$= (2 \text{ Cos } 5\theta) + 5(2 \text{ Cos } 3\theta) + 10(2 \text{ Cos } \theta)$$

$$\therefore \quad \text{Cos}^5\theta = \frac{1}{16}(\text{Cos } 5\theta + 5 \text{ Cos } 3\theta + 10 \text{ Cos } \theta)$$

Análogamente : $2i\,\text{Sen}\,\theta = z - \frac{1}{z} \Rightarrow (2i\,\text{Sen}\,\theta)^5 = \left(z - \frac{1}{z}\right)^5$

$$\Rightarrow 32i^5\,\text{Sen}^5\theta = z^5 - 5z^3 + 10z - \frac{10}{z} + \frac{5}{z^3} - \frac{1}{z^5}$$

$$= \left(z^5 - \frac{1}{z^5}\right) - 5\left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) + 10\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$\Rightarrow 32i\,\text{Sen}^5\theta = (2i\,\text{Sen}\,5\theta) - 5(2i\,\text{Sen}\,3\theta) + 10(2i\,\text{Sen}\,\theta)$$

$$\therefore \text{Sen}^5\theta = \frac{1}{16}(\text{Sen}\,5\theta - 5\,\text{Sen}\,3\theta + 10\,\text{Sen}\,\theta)$$ ■

EJERCICIOS : Grupo 40

En los ejercicios 1 al 12 , utilice el Teorema de De Moivre para hallar la potencia indicada. Expresar el resultado en forma cartesiana.

1. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{60}$
2. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{100}$
3. $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$
4. $\left(1 - \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{24}$
5. $(2 - 2i)^{10} - (2 + 2i)^{10}$
6. $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-50}$
7. $\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^6$
8. $\frac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}} + \frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}$
9. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100}$
10. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{-8}$
11. $(-3\sqrt{3} + 3i)^{30}$
12. $(4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i)^{40}$

En los ejercicios 13 a 16 , efectuar y expresar el resultado en la forma $a + bi$

13. $\frac{(2\text{ Cis } 225°)^2 (3\text{ Cis } 140°)^3}{(\sqrt{3}\text{ Cis } 25°)^4 (\sqrt{2}\text{ Cis } 60°)^2}$
14. $\frac{12\text{ Cis}(-30°)\,(\sqrt{6}\text{ Cis } 135°)^2}{24\text{ Cis}(-150°)\,(\sqrt{3}\text{ Cis } 105°)^2}$
15. $\frac{(\sqrt{2}\text{ Cis } 445°)^2 (\sqrt{6}\text{ Cis } 140°)^4}{[2\text{ Cis }(-130°)]^2 (3\text{ Cis } 345°)^2}$
16. $\frac{(1 - \sqrt{3}i)^{27}}{(2 + 2i)^{18}} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-3}$

17. Si $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, hallar Re (z^{20})
18. Simplificar $(1 + w)^n$, donde $w = \text{Cis}(2\pi/3)$
19. Simplificar : $\left(\frac{1 + \text{Sen}\,x + i\,\text{Cos}\,x}{1 + \text{Sen}\,x - i\,\text{Cos}\,x}\right)^6$
20. Representar mediante un polinomio de primer grado en términos de ángulos

múltiplos de x , lo siguiente

a) Sen^4x b) Cos^6x c) Sen^7x d) Cos^7x

21. Expresar mediante las potencias de Sen x y Cos x las siguientes funciones de ángulos múltiplos de x

a) Cos 5x b) Cos 8x c) Sen 5x d) Sen 7x

22. Dado $n \in \mathbb{Z}^+$, demostrar que $\left(\frac{\text{Cotg}\,\theta + i}{\text{Cotg}\,\theta - i}\right)^n = \text{Cos}\,2n\theta + i\,\text{Sen}\,2n\theta$
23. Si $z = \text{Cis}\theta$, hallar todos los valores de θ para los cuales $(z + 1)^2$ es imaginario puro.
24. Resolver : $[(1 + i\sqrt{3})^4 z]^2 = (1 - i\sqrt{3})^3 z$
25. Calcular z^4 en los siguientes casos

a) $z = (-\sqrt{3} + i)^{-1}$ b) $z = \frac{1 + i}{\sqrt{3} - i}$ c) $z = \frac{a}{\text{Sen}\,\alpha + i\,\text{Sen}\,\alpha}$, $a \in \mathbb{R} \wedge 0 < \alpha < 2\pi$

7.10 RADICACION DE NUMEROS COMPLEJOS

Por definición , dado un número complejo z y un entero positivo n , se dice que el complejo w es raíz n-ésima de z si y sólo si , $w^n = z$, se escribe

$$w = \sqrt[n]{z}\text{ , o bien , } w = z^{1/n}$$

El problema de calcular w se resuelve fácilmente escribiendo z y w en forma polar , esto es , si

$$z = r(\text{Cos}\,\theta + i\,\text{Sen}\,\theta) \quad y \quad w = R(\text{Cos}\,\psi + i\,\text{Sen}\,\psi) \qquad (1)$$

entonces por definición de raíz : $w^n = z$

Por la fórmula de De Moivre :

$$R^n(\text{Cos}\,n\psi + i\,\text{Sen}\,n\psi) = r(\text{Cos}\,\theta + i\,\text{Sen}\,\theta)$$

y por la igualdad de números complejos

$$R^n = r \wedge n\psi = \theta + 2k\pi \Rightarrow R = \sqrt[n]{r} \wedge \psi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Luego , en (1) :

$$w = \sqrt[n]{r}\left[\text{Cos}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{Sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] \qquad (10)$$

donde , para k = 0 , 1 , 2 , ... , n - 1 , obtenemos los n valores de w , que lo designaremos por w_k , k = 0 , 1 , 2 , ... , n - 1 , respectivamente.

En resumen , se ha demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 7.6 *Radicación de números complejos*

Todo complejo no nulo admite n raíces n-ésimas distintas dadas por

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\text{Cos}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{Sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

donde k es 0 , 1 , 2 , ... , n - 1 , r = | z | y θ = Arg(z)

Dado que todas las raíces tienen el mismo módulo , éstas se encuentran sobre una circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt[n]{r}$, y difieren en el argumento en múltiplos de 2π/n. Por esta razón , las distintas n raíces de un complejo no nulo . se identifican geométricamente con los vértices de un polígono regular inscrito en la circunferencia mencionada.

Ejemplo 1 Determinar y representar en un plano complejo las raíces quintas de $z = -16 - 16\sqrt{3}\,i$

Solución. $r = |z| = 16\sqrt{1+3} = 32$, $\text{Tg}\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 180° + 60° = 240°$

De modo que si : $-16 - 16\sqrt{3}\,i = 32(\text{Cos } 240° + i\text{ Sen } 240°)$

del Teorema 7.6 , las cinco raíces quintas están dadas por

$$w_k = \sqrt[5]{32}\left[\text{Cis}\left(\frac{240° + 2k\pi}{5}\right)\right] \text{ , para } k = 0 , 1 , 2 , 3 , 4$$

Para $k = 0 \Rightarrow w_0 = 2\text{ Cis }(48°)$
$k = 1 \Rightarrow w_1 = 2\text{ Cis }(120°)$
$k = 2 \Rightarrow w_2 = 2\text{ Cis }(192°)$
$k = 3 \Rightarrow w_3 = 2\text{ Cis }(264°)$
$k = 4 \Rightarrow w_4 = 2\text{ Cis }(336°)$

En la Figura 7.36 se muestra los afijos de las raíces quintas de z , que son vértices del pentágono regular inscrito en la circunferencia de radio r = 2 Nótese que la diferencia entre los argumentos de cada raíz es

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} = \frac{360}{5} = 72°$$ ■

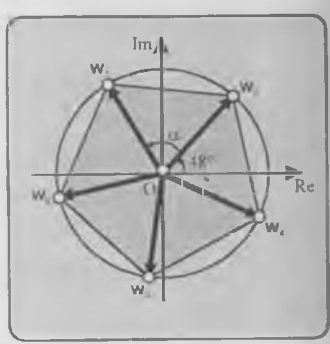


FIGURA 7.36

Ejemplo 2 Determinar las raíces cúbicas de la unidad.

Solución. Si $z = 1 \Rightarrow |z| = 1$ y $\theta = \text{Arg}(z) = 0 \Rightarrow w_k = \sqrt[3]{1}\left[\text{Cis}\left(\frac{0 + 2k\pi}{3}\right)\right]$

$$\Rightarrow w_k = \text{Cos}\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\,\text{Sen}\left(\frac{2k\pi}{3}\right) \text{ , para } k = 0 , 1 , 2$$

Reemplazando a k sucesivamente por 0 , 1 y 2 se obtiene

$$w_0 = \text{Cos } 0° + i\text{ Sen } 0° = 1$$

$$w_1 = \text{Cos}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{Sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

$$w_2 = \text{Cos}\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\text{Sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

FIGURA 7.37

OBSERVACIONES

(1) Los afijos de las raíces cúbicas de la unidad son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia de radio | z | = 1

(2) Las raíces cúbicas de la unidad se encuentran igualmente espaciadas con una de ellas un ángulo igual a α = 2π/3

(3) $w_1 = \overline{w_2} \Rightarrow w_0 + w_1 + w_2 = 0$ ■

7.10.1 ECUACIONES CUADRATICAS CON COEFICIENTES COMPLEJOS

Sabemos que una ecuación cuadrática con coeficientes reales $ax^2 + bx + c = 0$, tiene por raíces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En esta sección y , en idéntica forma , trataremos de hallar un proceso que nos permita resolver una ecuación de la forma

$$Az^2 + Bz + C = 0 \text{ , } A , B , C \in \mathbb{C} \text{ y } A \neq 0 \qquad (1)$$

Completando el cuadrado se tiene

$$A\left(z^2 + \frac{B}{A}z + \frac{B^2}{4A^2}\right) = -C + \frac{B^2}{4A^2} \Rightarrow \left(z + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2} \qquad (2)$$

Supongamos que : $w = z + \frac{B}{2A}$ y $u = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}$

de modo que en (2) tendremos : $w^2 = u$ (3)

Puede ocurrir entonces que

I. Si $B^2 - 4AC = 0$, entonces $u = 0$ y la ecuación (3) tendrá por solución el conjunto $\{-B/2A\}$, esto es , si $w^2 = 0 \Leftrightarrow z = -B/2A$
En consecuencia , la ecuación (1) tendrá por C.S. = $\{-B/2A\}$

II. Si $B^2 - 4AC \neq 0$, la ecuación $w^2 = u$ tiene dos soluciones denotados por w_0 y w_1.
Como $w = z + \frac{B}{2A}$, entonces las soluciones de la ecuación (1) serán :

$$z_1 = w_0 - \frac{B}{2A} \quad y \quad z_2 = w_1 - \frac{B}{2A}$$

Pero en la Sección 7.6 vimos que $w_1 = -w_0$, por tanto , el conjunto solución es

$S = \left\{w_0 - \frac{B}{2A} , -w_0 - \frac{B}{2A}\right\}$, donde w_0 es cualquiera de las dos soluciones de $w^2 = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}$

En resumen , hemos demostrado el siguiente teorema.

> ***TEOREMA 7.7*** El conjunto solución de la ecuación
> $$Az^2 + Bz + C = 0 \ , \ A, B, C \in \mathbb{C} \ y \ A \neq 0 \ es$$
> I. $\left\{-\frac{B}{2A}\right\}$, si $B^2 - 4AC > 0$
>
> II. $\left\{-\frac{B}{2A} + w_0 , -\frac{B}{2A} - w_0\right\}$, si $B^2 - 4AC \neq 0$
>
> donde w_0 es una de las soluciones de la ecuación : $w^2 = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}$

Ejemplo 3 Resolver la ecuación : $z^2 - (3 + 2i)z + (5 + 5i) = 0$

Solución. Si $A = 1$, $B = -(3 + 2i)$ y $C = 5 + 5i$, entonces

(1) $B^2 - 4AC = (3 + 2i)^2 - 4(1)(5 + 5i) = -15 - 8i \neq 0$

(2) Resolvemos la ecuación : $w^2 = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2} = \frac{-15 - 8i}{4} = -\frac{15}{4} - 2i$

$$\Leftrightarrow w_0 = \frac{1}{2} - 2i \quad ó \quad w_1 = -\frac{1}{2} + 2i$$

(3) Elegimos una de sus raíces cuadradas : $w_0 = \frac{1}{2} - 2i$

(4) Luego : $-\frac{B}{2A} + w_0 = \left(\frac{3 + 2i}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - 2i\right) = 2 - i$

$$-\frac{B}{2A} - w_0 = \left(\frac{3 + 2i}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2i\right) = 1 + 3i$$

(5) Por lo tanto , el conjunto solución es : $\{2 - i \ , \ 1 + 3i\}$ ■

7.10.2 RAICES PRIMITIVAS DE LA UNIDAD

Si $z = \sqrt[n]{1} = 1$ y $1 = \text{Cos } 0 + i \text{ Sen } 0$, entonces las n-ésinas raíces de la unidad , según el Teorema de De Moivre , están dadas por

$$w_k = \text{Cos}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \text{ Sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) , \ k = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n - 1 \qquad (1)$$

Si $k = 1 \Rightarrow w_1 = \text{Cos}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \text{ Sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \Rightarrow (w_1)^k = \text{Cos}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \text{ Sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

Se observa que : $(w_1)^k = w_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n - 1$

Esto significa que todas las raíces de la unidad son expresadas como potencias de w_1 , es decir , w_1 genera todas las n-ésimas raíces de la unidad , de aquí que w_1 recibe el nombre de ***raíz primitiva*** de la unidad de orden n.

En general , si w es la raíz n-ésima de la unidad tal que sus potencias
w^k para $k = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n - 1$, son diferentes
entonces se dice que w es una raíz primitiva de la unidad de orden n.

En el Ejemplo 2 determinamos las raíces cúbicas de la unidad

$$w_0 = 1 \ , \ w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \ , \ w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

de las cuales w_1 y w_2 son raíces primitivas de la unidad de orden 3 , por que para $k = n - 1 \Rightarrow k = 2$, se tiene

$(w_1)^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = w_2$, es diferente a w_1

$(w_2)^2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = w_1$, es diferente a w_2

$(w_0)^2 = (1)^2 = 1$, es igual

entonces w_0 no es raíz primitiva de la unidad de orden 3

Nótese que $n = 3$ y $k = 2$ son primos entre si , es decir , m c d $(2, 3) = 1$

En consecuencia , el número de raíces primitivas de la unidad de orden n se deducen del siguiente teorema.

TEOREMA 7.8 *Raíces primitivas de la unidad*

Sea $0 \leq k < n$. Entonces w_k es una raíz primitiva de la unidad de orden n , si y sólo si , n y k son coprimos (primos entre si).

Ejemplo 4 Determinar todas las raíces de la unidad de orden 6

Solución. Las raices sextas de la unidad están dadas por (I) para n = 6 . estas son:

$$w_k = \text{Cos}\left(\frac{2k\pi}{6}\right) + i\,\text{Sen}\left(\frac{2k\pi}{6}\right),\ k = 0, 1, 3, 4, 5$$

Por el Teorema 7.8 , elegimos k de modo que m c d (k , 6) = 1 , esto ocurre para k = 1 y k = 5 , entonces

$$w_1 = \text{Cos}\left(\frac{2\pi}{6}\right) + i\,\text{Sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \text{Cos } 60° + i\,\text{Sen } 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_5 = \text{Cos}\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\,\text{Sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \text{Cos } 300° + i\,\text{Sen } 300° = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad ■$$

Ejemplo 5 Demostrar que si ω es raíz cúbica primitiva de 1 , entonces

$$(1 - \omega)(1 - \omega^2) = 3$$

Demostración. En efecto , si ω es raíz cúbica primitiva de 1 , entonces ω^2 también lo es , pues el mcd(2 , 3) = 1

Luego , $(1 - \omega)(1 - \omega^2) = 1 - \omega^2 - \omega + \omega^3$

$= 1 - (\omega^2 + \omega) + \omega^3$ (1)

Pero , $1 + \omega + \omega^2 = 0$ (Ver Ejemplo 2) $\Rightarrow$ $\omega^2 + \omega = -1$

Por lo que , en (1) obtenemos : $(1 - \omega)(1 - \omega^2) = 1 - (-1) + 1 = 3$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 10*

En los ejercicios 1 al 6 , halle todas las raíces que se indican

1. Las raices de $z = -8 + 8\sqrt{3}i$
2. Las raíces cúbicas de $z = -8i$
3. Las raíces quintas de $z = 16 - 16\sqrt{3}i$
4. Las raíces cúbicas de $z = 4 - 4\sqrt{3}i$
5. Las raíces cuartas de $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
6. Las raíces quintas de $z = -16\sqrt{3} - 16i$

En los ejercicios 7 a 10 , hállese las raíces indicadas

7. $\sqrt[6]{\frac{1 - i}{\sqrt{3} + i}}$ 8. $\sqrt[8]{\frac{1 + i}{\sqrt{3} - i}}$ 9. $\sqrt[6]{\frac{1 - i}{1 + i\sqrt{3}}}$ 10. $\sqrt[4]{\frac{1 + i}{\sqrt{3} + i}}$

11. Si ω_0 , ω_1 y ω_2 son todas las raíces de la ecuación $x^3 = 1$, hallar el valor de

 a) $\omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_3^2$ b) $\omega_0\,\omega_1 + \omega_0\omega_2 + \omega_1\omega_2$

12. Demostrar que si z_1 es una raíz cúbica de z y si 1 , ω y ω^2 son las raíces cúbicas de la unidad , entonces z_1 , $z_1\omega$, $z_1\omega^2$ son las tres raíces cúbicas de z.

En los ejercicios 13 al 16 , halle el conjunto solución de la ecuación dada

13. $z^2 + (1 - 5i)z - (12 + 5i) = 0$
14. $z^2 - (3 + 2i)z + (1 + 3i) = 0$
15. $(z^3 - iz^2) - (2+2i)(z^2 - iz) + 2(iz - 1) = 0$
16. $z^2 + (4 + 3i)z + (7 + i) = 0$

En los ejercicios 17 al 28 , resuelva la ecuación para todas las raíces complejas

17. $z^4 + 8 + 8i\sqrt{3} = 0$
18. $z^3 + 4 = -4i\sqrt{3}$
19. $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$
20. $z^3 + 6 + 6i\sqrt{3} = 0$
21. $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$
22. $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$
23. $z^4 + (2i - 3)z^2 + 5 - i = 0$
24. $16z^4 = (z + 1)^4$
25. $z^8 - 35z^4 - 36 = 0$
26. $(z + 3)^4 = 16i$
27. $z^3 + 2z^2 - z + 6 = 0$
28. $2iz^2 - 5z + 7i = 0$

29. Si ω es una raíz cúbica de la unidad , demostrar que :

 a) $(1 + \omega^2)^4 = \omega$
 b) $(1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega^4)(1 - \omega^5) = 9$
 c) $(1 - \omega + \omega^2)(1 + \omega - \omega^2) = 4$

30. Si ω es una raíz n-ésima de la unidad , hallar el valor de

 a) $S = 1 + 2\omega + 3\omega^2 + \ldots\ldots\ldots + n\omega^{n-1}$
 b) $S = 1 + 4\omega + 9\omega^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2\omega^{n-1}$

7.11 LA EXPONENCIAL COMPLEJA

Si z = x + y i , se define exponencial de z como

$$\exp(z) = e^z = e^x(\text{Cos } y + i\,\text{Sen } y)$$

donde e^x es la función exponencial real y e es la base de los logaritmos neperianos (e = 2.71828 . . . . . .)

Si z es un imaginario puro , esto es , si x = 0 $\Rightarrow$ z = y i , luego en la exponencial compleja se tiene :

$$\exp(y\,i) = e^{yi} = \text{Cos } y + i\,\text{Sen } y$$

Como $e^z = (e^x\text{Cos } y + i\,e^x\text{Sen } y) \Rightarrow \theta = \text{arc Tg}\left(\frac{e^x\,\text{Sen } y}{e^x\,\text{Cos } y}\right) = \text{arc Tg}(\text{Tg } y)$

$$\Rightarrow \theta = y$$

luego , la relación : **$\exp(i\theta) = e^{i\theta} = \text{Cos}\,\theta + i\,\text{Sen}\,\theta$** (11)

es la llamada *fórmula de Euler o exponencial compleja*

Siendo la representación de un número complejo

$$z = r\,(\text{Cos}\,\theta + i\,\text{Sen}\,\theta)$$

la fórmula de Euler da lugar a una representación alternativa de los números complejos en la forma exponencial

$$z = r\,e^{i\theta} \qquad (12)$$

donde , $r = |z|$ y $\theta = \text{Arg}(z)$

Ejemplos : $z = i = \text{Cos}\,(\pi/2) + i\,\text{Sen}\,(\pi/2) \Rightarrow z = e^{i(\pi/2)}$

$z = -1 = \text{Cos}\,\pi + i\,\text{Sen}\,\pi \Rightarrow z = e^{i\pi}$

$z = 1 = \text{Cos}\,0 + i\,\text{Sen}\,0 \Rightarrow z = e^{i0} = e^{i2\pi}$

$z = -i = \text{Cos}(3\pi/2) + i\,\text{Sen}(3\pi/2) \Rightarrow z = e^{i(3\pi/2)} = e^{-i(\pi/2)}$

$z = -4 + 4\sqrt{3}\,i = 8\,\text{Cis}(2\pi/3) \Rightarrow z = 8\,e^{i2\pi/3}$

OBSERVACION. Si en la fórmula de Euler : $e^{i\theta} = \text{Cos}\,\theta + i\,\text{Sen}\,\theta$
se sustituye θ por $(-\theta)$ se obtiene : $e^{-i\theta} = \text{Cos}\,\theta - i\,\text{Sen}\,\theta$

De estas dos ecuaciones resultan las identidades

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{1}{2}\,(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad ; \quad \text{Sen}\,\theta = \frac{1}{2}\,(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \qquad (13)$$

que son de mucha utilidad en demostraciones de identidades trigonométricas.

EJEMPLO. Hallar $\text{Cos}^3\theta$ en función de $\text{Cos}\,k\theta$

Solución. Si $\text{Cos}\,\theta = \frac{1}{2}\,(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \Rightarrow \text{Cos}^3\theta = \frac{1}{8}\,(e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta})$

Agrupando términos convenientemente obtenemos

$$\text{Cos}^3\theta = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\,(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + \frac{3}{2}\,(e^{i\theta} + e^{-i\theta})\right] = \frac{1}{4}\,(\text{Cos}\,3\theta + 3\,\text{Cos}\,\theta)$$ ■

PROPIEDADES DE LA EXPONENCIAL COMPLEJA

EC. 1 : $e^z e^w = e^{z+w}$

EC. 2 : $\dfrac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$

EC. 3 : $e^z \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$

EC. 4 : $|e^z|\ e^x$, $y = \text{Arg}(z)$, $z = x + yi$

EC. 5 : Si y es real $\Rightarrow |e^{iy}| = 1$

EC. 6 : $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2n\pi i$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

EC. 7 : $e^z = e^w \Leftrightarrow z = w + 2k\pi i$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

EC. 8 : $(e^z)^n = e^{nz}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

Demostración de EC . 1 : $e^z e^w = e^{z+w}$

(1) Sean : $z = x + yi$, $w = a + bi \Rightarrow e^z = e^x(\text{Cos}\,y + i\,\text{Sen}\,y)$, $e^w = e^a(\text{Cos}\,b + i\,\text{Sen}\,b)$

(2) $\Rightarrow e^z e^w = [e^x(\text{Cos}\,y + i\,\text{Sen}\,y)]\,[e^a(\text{Cos}\,b + i\,\text{Sen}\,b)]$

$= e^{x+a}\,[(\text{Cos}\,y\,\text{Cos}\,b - \text{Sen}\,y\,\text{Sen}\,b) + i\,(\text{Cos}\,y\,\text{Sen}\,b + \text{Sen}\,y\,\text{Cos}\,b)]$

$= e^{x+a}\,[\text{Cos}(y + b) + i\,\text{Sen}(y + b)] = e^{x+a}\,e^{i(y+b)}$

(5) $e^z e^w = e^{(x+a)+i(y+b)} = e^{z+w}$

Demostración de EC. 4 : $|e^z| = e^x$, $y = \text{Arg}(z)$, donde $z = x + yi$

En efecto , por definición : $e^z = e^x(\text{Cos}\,y + i\,\text{Sen}\,y)$

$$\Rightarrow |e^z| = e^x\sqrt{(\text{Cos}\,y)^2 + (\text{Sen}\,y)^2} = e^x$$

Si $e^z = e^x\,\text{Cos}\,y + i\,e^x\,\text{Sen}\,y \Rightarrow \theta = \text{Arg}(z) = \text{ArgTg}\left(\dfrac{e^x\,\text{Sen}\,y}{e^x\,\text{Cos}\,y}\right) = \text{arc Tg}\,(\text{Tg}\,y)$

$$\Rightarrow \theta = \text{Arg}(z) = y$$

Demostración de EC. 6 : $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2n\pi i$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

(1) Sea $z = x + yi \Rightarrow e^z = e^{x+yi} = e^x e^{iy} = e^x(\text{Cos}\,y + i\,\text{Sen}\,y) = e^x\,\text{Cos}\,y + i\,e^x\text{Sen}\,y$

(2) Si $e^z = 1 \Rightarrow e^x\,\text{Cos}\,y + ie^x\,\text{Sen}\,y = 1$

(3) Por igualdad de complejos : $e^x\,\text{Cos}\,y = 1 \ \wedge\ e^x\,\text{Sen}\,y = 0$

(4) Como $e^x \neq 0$, entonces , $\text{Sen}\,y = 0 \Leftrightarrow y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(5) Ahora , si $y = k\pi \Rightarrow \text{Cos}\,y = \text{Cos}\,k\pi = (-1)^k$

(6) Luego , en la primera igualdad de (3) : $e^x(-1)^k = 1 = (-1)^{2k} \Rightarrow e^x = (-1)^k$

(7) Pero $e^x > 0 \Rightarrow k = 2n \Rightarrow \begin{cases} e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \\ y = 2n\pi \end{cases}$

(8) Por lo tanto , $z = x + yi = 2n\pi i$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

(9) Recíprocamente , si $z = 2n\pi i \Rightarrow e^z = e^{2n\pi i} = \text{Cos}\,2n\pi + i\,\text{Sen}\,2n\pi = 1 + 0i = 1$

OPERACIONES EN LA FORMA EXPONENCIAL

Las fórmulas relativas al producto , cociente , potenciación y radicación de números complejos en la forma polar son similares para dichas operaciones en la forma exponencial. Esto es :

1. $z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})\,(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2\,e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

3. $z^n = (r\,e^{i\theta})^n = r^n\,e^{in\theta}$

4. $z^{1/n} = (r\,e^{i\theta})^{1/n} = r^{1/n}\,e^{i(\theta + 2k\pi)/n}$, $n \in \mathbb{Z}$ y $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

MISCELANEA DE EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $w = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, hallar $z^n + w^n$, donde n es un número entero.

Solución. Expresando z y w en su forma polar obtenemos

$$z = Cis(2\pi/3) \quad y \quad w = Cis(4\pi/3)$$

Entonces : $z^n + w^n = Cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + i\,Sen\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + Cos\left(\frac{4n\pi}{3}\right) + i\,Sen\left(\frac{4n\pi}{3}\right)$ (1)

Dado que :

$$Cos\,120° = -Cos\,60° \text{ y } Cos\,240° = -Cos\,60° \Rightarrow Cos\left(\frac{4n\pi}{3}\right) = Cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

$$Sen\,120° = Sen\,60° \text{ y } Sen\,240° = -Sen\,60° \Rightarrow Sen\left(\frac{4n\pi}{3}\right) = -Sen\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

Por lo tanto , en (1) :

$$z^n + w^n = 2\,Cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$ ■

Ejemplo 2 Aplicar la potenciación de números complejos para expresar $Tg6\theta$ en términos de $Tg\theta$.

Solución. Por el Teorema de De Moivre : $Cos6\theta + i\,Sen6\theta = (Cos\theta + i\,Sen\theta)^6$

Desarrollando la potencia y luego ordenando las partes reales y las partes imaginarias , obtenemos

$$Cos6\theta + i\,Sen6\theta = (Cos^6\theta - 15\,Cos^4\theta\,Sen^2\theta + 15\,Cos^2\theta\,Sen^4\theta - Sen^6\theta) +$$
$$+ i\,(6\,Cos^5\theta\,Sen\theta - 20\,Sen^3\theta\,Cos^3\theta + 6\,Cos\theta\,Sen^5\theta)$$

De la igualdad de números complejos se sigue que :

$$\left.\begin{array}{l} Cos6\theta = Cos^6\theta - 15\,Cos^4\theta\,Sen^2\theta + 15\,Cos^2\theta\,Sen^4\theta - Sen^6\theta \\ Sen6\theta = 6\,Cos^5\theta\,Sen\theta - 20\,Sen^3\theta\,Cos^3\theta + 6\,Cos\theta\,Sen^5\theta \end{array}\right\} \Rightarrow Tg6\theta = \frac{Sen6\theta}{Cos6\theta}$$

Ahora , dividiendo cada término del numerador y denominador de $Tg6\theta$ entre $Cos^6\theta$, se tiene

$$Tg6\theta = \frac{6\,Tg\theta - 20\,Tg^3\theta + 6\,Tg^5\theta}{1 - 15\,Tg^2\theta + 15\,Tg^4\theta - Tg^6\theta}$$ ■

Ejemplo 3 Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq z_0$, demostrar que : $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$

Demostración. Si $z = r\,e^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = r\,e^{-i\theta}$

Luego : $z^n = r^n e^{in\theta} \Rightarrow \overline{(z^n)} = r^n e^{-in\theta}$ (1)

$\bar{z} = r\,e^{-i\theta} \Rightarrow (\bar{z})^n = r^n e^{-in\theta}$ (2)

Por lo tanto , de (1) y (2) se tiene : $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$ ■

Ejemplo 4 Sean z_1 , $z_2 \in \mathbb{C}$. demostrar que $Cos\,\psi = \frac{Re(z_1\,\bar{z}_2)}{|z_1|\,|z_2|}$, donde ψ es el ángulo comprendido entre los radios vectores que representan a z_1 y z_2

Demostración. Sean los complejos :

$$z_1 = r_1 e^{i\alpha} \quad y \quad z_2 = r_2 e^{i\beta}$$

Luego : $z_1\,\bar{z}_2 = r_1\,r_2\,e^{i(\alpha-\beta)} = r_1 r_2\,Cis(\alpha - \beta)$

Entonces : $Re(z_1\,\bar{z}_2) = r_1\,r_2\,Cos(\alpha - \beta)$

$= |z_1|\,|z_2|\,Cos(\alpha - \beta)$

de donde se obtiene : $Cos\,\psi = \frac{Re(z_1\,\bar{z}_2)}{|z_1|\,|z_2|}$ ■

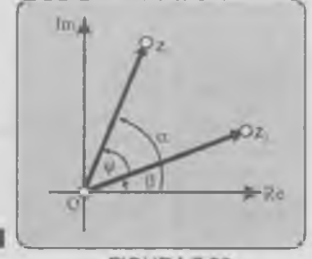


FIGURA 7.38

Ejemplo 5 Sea $z = x + yi$ tal que $z^{39} = 1$ y $z = 1$; hallar :

$$Re(z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{37})$$

Solución. Sea $S = z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{37} = z(1 + z + z^2 + \ldots + z^{36})$

Entonces : $S = z\left(\frac{1 - z^{37}}{1 - z}\right)$. Pero $z^{39} = z^{37}z^2 \Rightarrow 1 = z^{37}z^2 \Leftrightarrow z^{37} = 1/z^2$

Luego :

$$S = z\left(\frac{1 - 1/z^2}{1 - z}\right) = -\left(\frac{z+1}{z}\right) = -\left[\frac{(x+1\,,\,y)}{(x\,,\,y)}\right] = -\left[\left(\frac{(x+1)\,x + y^2}{x^2+y^2}\,,\,\frac{x\,y - y(x+1)}{x^2+y^2}\right)\right]$$

$$= \left(-\frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}\,,\,\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \Rightarrow Re(S) = -\frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}$$ ■

Ejemplo 6 Uno de los vértices de un octógono regular coincide con el afijo del complejo $z = 2\,Cos\,15° - 2\,i\,Sen\,15°$. Hallar los vértices restantes (o una fórmula que permita calcularlos).

Solución. Un octógono regular es descrito por los afijos de la raíz octava de un determinado complejo. Ahora bien , sabemos que los argumentos de cada raíz están igualmente espaciadas un ángulo $\alpha = \frac{2\pi}{n} = \frac{360}{8} = 45°$

Entonces , si $z = [Cos(-15°) + i\ Sen(-15°)]$, una fórmula que permite calcular los afijos de cada uno de los vértices del octógono es

$$z = 2[Cos(-15° + 45°k) + i\ Sen(-15° + 45°k)]\ ,\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

Si $k = 0 \Rightarrow w_0 = 2\ Cis(-15°)$, $k = 4 \Rightarrow w_4 = 2\ Cis(165°)$

$k = 1 \Rightarrow w_1 = 2\ Cis(30°)$, $k = 5 \Rightarrow w_5 = 2\ Cis(210°)$

$k = 2 \Rightarrow w_2\ Cis(75°)$, $k = 6 \Rightarrow w_6 = 2\ Cis(255°)$

$k = 3 \Rightarrow w_3 = 2\ Cis(120°)$, $k = 7 \Rightarrow w_7 = 2\ Cis(300°)$ ■

Ejemplo 7 Determinar el total de números enteros positivos n de tres cifras que verifican la igualdad : $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Solución. El complejo $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, en su forma polar es $z = Cis(\pi/3) = e^{i\pi/3}$

Luego , si $(e^{i\pi/3})^n = e^{i\pi/3} \Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ (Igualdad de complejos)

de donde se obtiene : $n = 6k + 1$; como n es de tres cifras $\Rightarrow 100 < n \leq 999$

esto es : $100 < 6k + 1 \leq 999 \Rightarrow 16.5 < k \leq 166.3 \Rightarrow 17 \leq k \leq 166$, $k \in \mathbb{Z}^+$

Dado que , por cada k existe un n $\Rightarrow n = (166 - 17) + 1 = 150$ ■

Ejemplo 8 Demostrar que para $\theta \in [0, 2\pi]$ y n número natural

$$\left(\frac{1 + Sen\ \theta + i\ Cos\ \theta}{1 + Sen\ \theta - i\ Cos\ \theta}\right)^n = Cos\left[n(\frac{\pi}{2} - \theta)\right] + i\ Sen\left[n(\frac{\pi}{2} - \theta)\right]$$

Demostración. Sean : $z = 1 + Sen\theta + i\ Cos\theta$ y $w = 1 + Sen\theta - Cos\theta$

$$\Rightarrow z = Sen\frac{\pi}{2} + Sen\theta + i\ Sen\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$$

$$= 2\ Sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)Cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + 2i\ Sen\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)Cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

Por ser complementarios : $Cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = Sen\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$

$$\Rightarrow z = 2\ Sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)Cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + 2\ i\ Sen\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)Sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2\ Sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\left[Cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + i\ Sen\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right] = 2\ Sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\left[e^{i(\pi/4 - \theta/2)}\right]$$

Por un razonamiento similar se demuestra que

$$w = 2\ Sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\left[Cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) - i\ Sen\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right] = 2\ Sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\left[e^{-i(\pi/4 - \theta/2)}\right]$$

Por lo que : $\left(\frac{z}{w}\right)^n = e^{in(\pi/2 - \theta)} = Cos\ n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\ Sen\ n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ ■

Ejemplo 9 Dado $\theta \in \mathbf{R}$, demostrar que si $z + \frac{1}{z} = 2\ Cos\theta$, entonces

a) $z^m + \frac{1}{z^m} = 2\ Cos\ m\theta$, $m \in \mathbb{Z}^+$

b) $z^m - \frac{1}{z^m} = 2i\ Sen\ m\theta$, $m \in \mathbb{Z}^+$

Demostración. Sea $z = r(Cos\theta + i\ Sen\theta) \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{r}(Cos\theta - i\ Sen\theta)$

Luego : $z + \frac{1}{z} = (r + \frac{1}{r})Cos\theta + i\ (r - \frac{1}{r})Sen\theta$

Dado que $z + \frac{1}{z}$ es real $\Rightarrow Im(z + \frac{1}{z}) = 0$

Esto es , si : $(r - \frac{1}{r})Sen\theta = 0 \Leftrightarrow (r - \frac{1}{r} = 0) \vee (Sen\theta = 0)$

$$\Leftrightarrow r = 1 \vee \theta = 2k\pi$$

Para r = 1 se tiene : $z = Cos\theta + i\ Sen\theta$ y $z^{-1} = Cos\theta - i\ Sen\theta$

$$\Rightarrow z^m = Cos\ m\theta + i\ Sen\ m\theta \quad y \quad z^{-m} = Cos\ m\theta - i\ Sen\ m\theta$$

Por lo tanto , sumando y luego restando los extremos de ambas ecuaciones obtenemos

a) $z^m + \frac{1}{z^m} = 2\ Cos\ m\theta$ b) $z^m - \frac{1}{z^m} = 2i\ Sen\ m\theta$ ■

Ejemplo 10 Si $Sen\,a + Sen\,b + Sen\,c = 0$ y $Cos\,a + Cos\,b + Cos\,c = 0$, demostrar que $Sen3a + Sen3b + Sen3c = 3\ Sen(a + b + c)$

Solución. Sean : $A = Cos\,a + i\ Sen\,a$, $B = Cos\,b + i\ Sen\,b$, $C = Cos\,c + i\ Sen\,c$

$$\Rightarrow A + B + C = Cos\,a + Cos\,b + Cos\,c + i\ (Sen\,a + Sen\,b + Sen\,c)$$

Luego, si $A + B + C = 0 \Rightarrow [(A + B) + C]^3 = 0 \Rightarrow (A + B)^3 + 3(A + B)^2C + 3(A + B)C^2 + C^3 = 0$

de donde : $(A + B)^3 + C^3 + 3C(A + B)(A + B + C) = 0 \Rightarrow (A + B)^3 + C^3 + 3C(A + B)(0) = 0$

De modo que : $(A + B)^3 + C^3 = 0 \Rightarrow A^3 + B^3 + C^3 + 3AB(A + B) = 0 \qquad (A + B = -C)$

$$\Rightarrow A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC$$

Del Teorema de De Moivre y del producto de complejos si sigue que

$(\text{Cos}3a + \text{Cos}3b + \text{Cos}3c) + i(\text{Sen}3a + \text{Sen}3b + \text{Sen}3c) = 3[\text{Cos}(a + b + c) + i\,\text{Sen}(a + b + c)]$

Por igualdad de complejos , tomando la parte imaginaria obtenemos

$$\text{Sen}3a + \text{Sen}3b + \text{Sen}3c = 3\,\text{Sen}(a + b + c)$$ ■

Ejemplo 11 Para $z = \text{Cis}(\pi/4)$, hallar : a) El módulo y el argumento de $(1 + iz)^6$

b) $\text{Im}(1 + iz)^6$ en sumas, usando el Teorema del binomio de Newton.

Solución. a) Sea $\theta = \pi/4 \Rightarrow iz = i(\text{Cos}\theta + i\,\text{Sen}\theta) = -\text{Sen}\theta + i\,\text{Cos}\theta$

$$\Rightarrow 1 + iz = (1 - \text{Sen}\theta) + i\,\text{Cos}\theta = (\text{Sen}\pi/2 - \text{Sen}\theta) + i\,\text{Sen}(\pi/2 - \theta)$$

$$= 2\,\text{Cos}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\text{Sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + 2i\,\text{Sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

Por ser complementarios : $\text{Cos}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \text{Sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$

$$\Rightarrow 1 + iz = 2\,\text{Sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\left[\text{Cos}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + i\,\text{Sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right]$$

Para $\theta = \pi/4$ se tiene : $1 + iz = 2\,\text{Sen}(\pi/8)\,[\text{Cos}(3\pi/8 + i\,\text{Sen}(3\pi/8)]$

$$\Rightarrow (1 + iz)^6 = 2^6\,\text{Sen}^6(\pi/8)\,[\text{Cis}(9\pi/4)]$$

Por lo que : $\text{Mod}(1 + iz)^6 = 2^6\left(\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}\right)^6 = (2 - \sqrt{2})^3 = 20 - 14\sqrt{2}$

$\text{Arg}(1 + iz)^6 = 9\pi/4 = 225°$

b) $(1 + iz)^6 = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(1)^k(iz)^{6-k} = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(e^{i\pi/2}e^{i\theta})^{6-k}$

$$= \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(e^{i(\pi/2+\theta)})^{6-k} = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}e^{i(6-k)(\pi/2+\theta)}$$

$$\therefore\ \text{Im}(r + iz)^6 = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\text{Sen}(6 - k)(\pi/2 + \theta) = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\text{Cos}(6 - k)\theta$$ ■

Ejemplo 12 Demostrar que si $\omega^{19} = 1$ y $\omega \neq 1$, entonces

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \ldots\ldots + 19\omega^{18} = \frac{19}{\omega - 1}$$

Demostración. Si $\omega^{19} = 1 \Rightarrow \omega^{19} - 1 = 0$

$$\Rightarrow (\omega - 1)(\omega^{18} + \omega^{17} + \ldots\ldots + \omega + 1) = 0$$

Por hipótesis $\omega \neq 1 \Rightarrow \omega - 1 \neq 0$, luego : $\omega^{18} + \omega^{17} + \ldots\ldots + \omega + 1 = 0$ (1)

Representemos por : $S = 1 + 2\omega + 3\omega^2 + \ldots\ldots 19\omega^{18}$

$\Rightarrow \omega S = \qquad \omega + 2\omega^2 + \ldots\ldots 18\omega^{18} + 19\omega^{19}$

Restando se tiene : $S - \omega S = (1 + \omega + \omega^2 + \ldots\ldots + \omega^{17} + \omega^{18}) - 19\omega^{19}$

Por (1) , la expresión entre paréntesis es igual a cero , por lo que :

$$S(1 - \omega) = -19\omega^{19} \Leftrightarrow S = \frac{19\,\omega^{19}}{\omega - 1} = \frac{19}{\omega - 1}$$ ■

Ejemplo 13 Simplificar : $2 + 3(2)\text{Cos}\theta + (4)(3)\text{Cos}2\theta + \ldots\ldots + (20)(19)\text{Cos}18\theta$ sabiendo que $e^{19i\theta} = 1$ y $e^{i\theta} \neq 1$

Solución. Sean : $A = 2 + (3)(2)\text{Cos}\theta + (4)(3)\text{Cos}2\theta + \ldots\ldots + (20)(19)\text{Cos}18\theta$

$B = \qquad (3)(2)\text{Sen}\theta + (4)(3)\text{Sen}2\theta + \ldots\ldots + (20)(19)\text{Sen}18\theta$

$\Rightarrow A + Bi = 2 + (3)(2)(\text{Cos}\theta + i\,\text{Sen}\theta) + (4)(3)(\text{Cos}2\theta + i\,\text{Sen}2\theta) + \ldots\ldots + (20)(19)(\text{Cos}18\theta + i\,\text{Sen}18\theta)$

Tomando el complejo unitario $\omega = \text{Cos}\theta + i\,\text{Sen}\theta$, podemos escribir

$$A + Bi = 2 + (3)(3)\omega + (4)(3)\omega^2 + \ldots\ldots + (20)(19)\omega 18$$

Llamando $z = A + Bi$, debemos simplificar la parte $\text{Re}(z) = A$

Esto es , si $z = 2 + (3)(2)\omega + (\omega + (4)(3)\omega^2 + \ldots\ldots + (20)(19)\omega^{18}$

$\Rightarrow \omega z = \qquad 2\omega + \qquad (3)(2)\omega^2 + \ldots\ldots + (19)(18)\omega^{18} + (20)(19)\omega^{19}$

$\Rightarrow z - \omega z = 2 + 2(2)\omega + 3(2)\omega^2 + \ldots\ldots + 19(2)\omega^{18} - (20)(19)\omega^{19}$

$= 2(1 + 2\omega + 3\omega^2 + \ldots\ldots + 19\omega^{18}) - (20)(19)\omega 19$

Por el Ejemplo 12 , la suma entre paréntesis es $S = \frac{19}{\pi - 1}$, y $\omega^{19} = e^{19i\theta} = 1$

$$\Rightarrow (1 - \omega)z = 2\left(\frac{19}{\omega - 1}\right) - (20)(19) = -38\left(\frac{10\omega - 1}{\omega - 1}\right) \Leftrightarrow z = \frac{380}{\omega - 1} - \frac{38}{(\omega - 1)^2} \qquad (1)$$

$\omega - 1 = \text{Cos}\theta - 1 + i\,\text{Sen}\theta = -2\,\text{Sen}^2\frac{\theta}{2} + 2i\,\text{Sen}\frac{\theta}{2}\text{Cos}\frac{\theta}{2} = 2i\,\text{Sen}\frac{\theta}{2}\left(\text{Cos}\frac{\theta}{2} + i\,\text{Sen}\frac{\theta}{2}\right)$

$$= 2e^{i\pi/2}\,\text{Sen}\frac{\theta}{2}(e^{i\pi/2}) = 2\left(\text{Sen}\frac{\theta}{2}\right)e^{i(\pi/2+\theta/2)} \Rightarrow \frac{1}{\omega - 1} = \frac{e^{-i(\pi/2+\theta/2)}}{2\,\text{Sen}(\theta/2)}$$

Luego , en (1) : $z = \frac{380\,e^{-i(\pi/2+\theta/2)}}{2\,\text{Sen}(\theta/2)} - \frac{38\,e^{i(\pi+\theta)}}{4\,\text{Sen}^2(\theta/2)}$

Por lo que :

$$A = \text{Re}(z) = \frac{380\,\text{Cos}(\pi/2 + \theta/2)}{2\,\text{Sen}(\theta/2)} - \frac{38\text{Cos}(\pi + \theta)}{4\,\text{Sen}^2(\theta/2)} = -\frac{380\,\text{Sen}(\theta/2)}{2\,\text{Sen}(\theta/2)} + \frac{38\text{Cos}\theta}{2(1 - \text{Cos}\theta)}$$

de donde obtenemos $A = 19\left(\frac{11\,\text{Cos}\theta - 1}{1 - \text{Cos}\theta}\right)$ ■

Ejemplo 14 Dado $n \in \mathbb{Z}^+$, convertir a producto las sumas

a) $\binom{n}{0}\text{Cos}n\theta + \binom{n}{1}\text{Cos}(n-1)\theta + \binom{n}{2}\text{Cos}(n-2)\theta + \ldots + \binom{n}{n}$

b) $\binom{n}{0}\text{Sen}n\theta + \binom{n}{1}\text{Sen}(n-1)\theta + \binom{n}{2}\text{Sen}(n-2)\theta + \ldots + \binom{n}{n}$

Solución. Sean : $A = \binom{n}{0}\text{Cos}n\theta + \binom{n}{1}\text{Cos}(n-2)\theta + \binom{n}{2}\text{Cos}(n-2)\theta + \ldots + \binom{n}{n}$

$iB = i\binom{n}{0}\text{Sen}n\theta + i\binom{n}{1}\text{Cos}(n-1)\theta + i\binom{n}{2}\text{Sen}(n-2)\theta + \ldots i\binom{n}{n}$

$$\Rightarrow A + iB = \binom{n}{0}(\text{Cos}n\theta + i\,\text{Sen}n\theta) + \binom{n}{1}[\text{Cos}(n-1)\theta + i\,\text{Sen}(n-1)\theta] +$$

$$\binom{n}{2}[\text{Cos}(n-2)\theta + i\,\text{Sen}(n-2)\theta] + \ldots + \binom{n}{n}(1+i)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[\text{Cos}(n-k)\theta + i\,\text{Sen}(n-k)\theta]$$

Tomando el complejo unitario $z = \text{Cos}\theta + i\,\text{Sen}\theta \Rightarrow z^{n-k} = \text{Cos}(n-k) + i\,\text{Sen}(n-k)$

Entonces : $A + iB = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{n-k}$

Por el binomio de Newton : $(z+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{n-k}(1)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{n-k}$

Esto es : $A + iB = (z+1)^n = [(1 + \text{Cos}\theta) + i\,\text{Sen}\,\theta]^n$

$$= \left[2\,\text{Cos}^2\frac{\theta}{2} + 2i\,\text{Sen}\frac{\theta}{2}\text{Cos}\frac{\theta}{2}\right]^n = \left[2\,\text{Cos}\frac{\theta}{2}\left(\text{Cos}\frac{\theta}{2} + i\,\text{Sen}\frac{\theta}{2}\right)\right]^n$$

$$= 2^n\text{Cos}^n(\theta/2)\,[\text{Cos}(n\theta/2) + i\,\text{Sen}(n\theta/2)]$$

Por lo tanto : a) $A = \text{Re}(z+1)^n = 2^n\text{Cos}^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{n\theta}{2}\right)$

b) $B = \text{Im}(z+1)^n = 2^n\text{Cos}^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\text{Sen}\left(\frac{n\theta}{2}\right)$ ■

Ejemplo 15 Convertir a producto la suma

$\text{Cos}x + \binom{n}{1}\text{Cos}2x + \binom{n}{2}\text{Cos}3x + \ldots + \binom{n}{n}\text{Cos}(n+1)x$

Solución. Sean : $A = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\text{Cos}(k-1)x$ y $B = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\text{Sen}(k+1)x$

$$\Rightarrow A + Bi = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[\text{Cos}(k+1)x + i\,\text{Sen}(k+1)x] \qquad (1)$$

Consideremos el complejo $z = \text{Cos}x + i\,\text{Sen}x \Rightarrow z^{k+1} = \text{Cos}(k+1)x + i\,\text{Sen}(k+1)x$

Luego , en (1) : $A + Bi = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{k+1} = z\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1)^{n-k}z^k$

Por el binomio de Newton : $A + Bi = z(1+z)^n$

En el Ejemplo 14 obtuvimos :

$$(1+z)^n = 2^n\text{Cos}^n\left(\frac{x}{2}\right)\left[\text{Cos}\left(\frac{nx}{2}\right) + i\,\text{Sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\right] = 2^n\text{Cos}^n\left(\frac{x}{2}\right)(e^{inx/2})$$

$$\Rightarrow z(1+z)^n = (e^{ix})2^n\text{Cos}^n\left(\frac{x}{2}\right)(e^{inx/2}) = 2^n\text{Cos}^n\left(\frac{x}{2}\right)(e^{i(n+2)x/2})$$

$$\therefore A = \text{Re}[z(1+z)^n] = 2^n\text{Cos}^n\left(\frac{x}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{n+2}{2}\right)x$$ ■

Ejemplo 16 Dado $n \in \mathbb{Z}^+$, convertir a producto la suma

$\text{Cos}^2x + \text{Cos}^2 3x + \text{Cos}^2 5x + \ldots + \text{Cos}^2(2n-1)x - \frac{n}{2}$

Solución. Basándonos en la identidad : $\text{Cos}^2 x = \frac{1}{2}(1 + \text{Cos}\,2x)$, la suma dada se puede escribir

$$\sum_{k=1}^{n}\text{Cos}^2(2k-1)x - \frac{n}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[1 + \text{Cos}(2k-1)2x] - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\text{Cos}(2k-1)2x - \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\text{Cos}^2(2k-1)x - \frac{n}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\text{Cos}(2k-1)2x \qquad (1)$$

Consideremos el complejo unitario $z = \text{Cos}\,2x + i\,\text{Sen}\,2x = e^{i2x}$

y sean : $A = \sum_{k=1}^{n}\text{Cos}(2k-1)2x$ y $B = \sum_{k=1}^{n}\text{Sen}(2k-1)2x$

$$\Rightarrow A + iB = \sum_{k=1}^{n}[\text{Cos}(2k-1)2x + i\,\text{Sen}(2k-1)2x] = \sum_{k=1}^{n}z^{2k-1} = z\sum_{k=1}^{n}z^{2(k-1)}$$

Tenemos una serie geométrica de razón z^2 , luego :

$$A + iB = z\left(\frac{1 - z^{2n}}{1 - z^2}\right) = z\left[\frac{1 - \text{Cos}2n(2x) - i\,\text{Sen}2n(2x)}{1 - \text{Cos}2(2x) - i\,\text{Sen}2(2x)}\right]$$

$$= z\left[\frac{2\,\text{Sen}^2(2nx) - 2i\,\text{Sen}(2nx)\text{Cos}(2nx)}{2\,\text{Sen}^2 2x - 2i\,\text{Sen}\,2x\,\text{Cos}\,2x}\right]$$

$$= z\left[\frac{-2i\,\text{Sen}2nx(\text{Cos}2nx + i\,\text{Sen}2nx)}{-2i\,\text{Sen}2x\,(\text{Cos}2x + i\,\text{Sen}2x)}\right] = \left(\frac{\text{Sen}2nx}{\text{Sen}2x}\right)(\text{Cos}2nx + i\,\text{Sen}2nx)$$

Entonces : $A = \text{Re}(A + iB) = \left(\frac{\text{Sen}2nx}{\text{Sen}2x}\right)\text{Cos}2nx = \frac{\text{Sen}4x}{2\,\text{Sen}2x}$

Luego , en (1) : $\sum_{k=1}^{n} \text{Cos}^2(2k-1) - \frac{n}{2} = \frac{\text{Sen}4x}{4\,\text{Sen}2x}$ ■

Ejemplo 17 Convertir a productos

$$1 - \binom{n}{1}\text{Cos}2x + \binom{n}{2}\text{Cos}4x - \binom{n}{3}\text{Cos}6x + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}\text{Cos}2nx$$

Solución. Sean: $A = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\text{Cos}2kx$, la suma dada, y $B = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\text{Sen}2kx$

de modo que $A + iB = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(\text{Cos }2kx + i\,\text{Sen }2kx)$ (1)

Considerando el complejo

$z = \text{Cos }2x + i\,\text{Sen }2x$, se tiene que : $z^k = \text{Cos }2kx + i\,\text{Sen }2kx$

Luego , en (1) : $A + iB = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}z^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-z)^k(1)^{n-k}$

y por el binomio de Newton : $A + iB = (-z+1)^n$ (2)

Ahora , $1 - z = 1 - \text{Cos}2x - i\text{Sen}2x = 2\text{Sen}^2x - 2i\text{Senx Cosx} = -2i\text{Senx}(\text{Cosx} + i\,\text{Senx})$

$\Rightarrow 1 - z = 2(e^{-i\pi/2})\,\text{Sen x}\,(e^{ix}) = 2\,\text{Sen x}\,(e^{i(x-\pi/2)})$

Por lo que , en (2) : $A + iB = 2^n\,\text{Sen}^n x\,(e^{in(x-\pi/2)})$

$\therefore A = \text{Re}(1-z)^n = 2^n\,\text{Sen}^n x\,\text{Cos}\,n(x - \pi/2)$ ■

Ejemplo 18 Demostrar que si $(n+1)x = \pi$, con n entero mayor que uno , entonces $\text{Sen}^2x + \text{Sen}^2 2x + \text{Sen}^2 3x + \ldots + \text{Sen}^2 nx = \frac{n+1}{2}$

Demostración. Según la identidad , $\text{Sen}^2x = \frac{1}{2}(1 - \text{Cos}2x)$, la suma dada se puede escribir

$$\sum_{k=1}^{n}\text{Sen}^2kx = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(1 - \text{Cos }2kx) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\text{Cos }2kx \quad (1)$$

Sean : $A = \sum_{k=1}^{n}\text{Cos}2kx$, $B = \sum_{k=1}^{n}\text{Sen}2kx$ y el complejo unitario $z = \text{Cos}2x + i\,\text{Sen}2x$

$$\Rightarrow A + iB = \sum_{k=1}^{n}(\text{Cos}2ki + i\,\text{Sen}2kx) = \sum_{k=1}^{n}(z)^k = z\sum_{k=1}^{n}z^{k-1} = z\left(\frac{1+z^n}{1-z}\right)$$

$$= z\left(\frac{1 - \text{Cos }2nx - i\,\text{Sen }2nx}{1 - \text{Cos }2x - i\,\text{Sen }2x}\right) = z\left(\frac{2\,\text{Sen}^2nx - 2i\,\text{Sen }nx\,\text{Cos }nx}{2\,\text{Sen}^2x - 2i\,\text{Sen x Cos x}}\right)$$

$$= z\left[\frac{-2i\,\text{Sen }nx\,(\text{Cos }nx + i\,\text{Sen }nx)}{-2i\,\text{Sen x}\,(\text{Cos x} + i\,\text{Sen x})}\right] = e^{2ix}\left[\frac{\text{Sen }nx\,(e^{nix})}{\text{Sen x}\,(e^{ix})}\right]$$

$$= \left(\frac{\text{Sen }nx}{\text{Sen x}}\right)e^{i(n+1)x} \Rightarrow A = \text{Re}(A + iB) = \left(\frac{\text{Sen }nx}{\text{Sen x}}\right)\text{Cos}(n+1)x \quad (2)$$

Por hipótesis : $(n+1)x = \pi \Leftrightarrow nx = \pi - x \Rightarrow \text{Sen }nx = \text{Sen}(\pi - x) = \text{Sen x}$

Luego , en (2) : $A = \left(\frac{\text{Sen }nx}{\text{Sen x}}\right)\text{Cos }\pi = -1$

Por lo tanto , en (1) : $\sum_{k=1}^{n}\text{Sen}^2kx = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}(-1) = \frac{n+1}{2}$ ■

Ejemplo 19 Calcular : $\text{Cos}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + 2\,\text{Cos}\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \ldots\ldots + (n-1)\,\text{Cos}\,\frac{2(n-1)\pi}{n}$

Solución. Sea el complejo unitario $z = \text{Cos x} + i\,\text{Sen x}$, donde $x = 2\pi/n$

Formemos el complejo A + i B en función del complejo z , de modo tal que si :

$A = \text{Cos x} + 2\,\text{Cos }2x + 3\,\text{Cos }3x + \ldots\ldots + (n-1)\text{Cos}(n-1)x$

$B = \text{Sen x} + 2\,\text{Sen }2x + 3\,\text{Sen }3x + \ldots\ldots + (n-1)\,\text{Sen}(n-1)x$

$\Rightarrow A + iB = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots\ldots + (n-1)z^{n-1}$

$z(A + iB) = z^2 + 2z^3 + \ldots\ldots + (n-2)z^{n-1} + (n-1)z^n$

Restando ambos extremos de las dos igualdades obtenemos

$(1-z)(A + iB) = z + z^2 + z^3 + \ldots\ldots + z^{n-1} - (n-1)z^n$

$$= z(1 + z + z^2 + \ldots\ldots + z^{n-2}) - (n-1)z^n = z\left(\frac{1 - z^{n-1}}{1-z}\right) - (n-1)z^n$$

de donde : $A + iB = \frac{z - z^n}{(1-z)^2} - \frac{(n-1)z^n}{1-z}$ (1)

Para $x = 2\pi/n$ se tiene que , $z^n = 1$. Luego , en (1) : $A + iB = \frac{n}{z-1}$ (2)

$z - 1 = \text{Cosx} - 1 + i\,\text{Sen x} = -2\,\text{Sen}^2(x/2) + z\,i\,\text{Sen}(x/2)\,\text{Cos}(x/2) =$

$$2i\,\text{Sen}\,\frac{x}{2}\left[\text{Cos}\,\frac{x}{2} + i\,\text{Sen}\,\frac{x}{2}\right]$$

$$= 2\,(e^{i\pi/2})\,\text{Sen}\,\frac{x}{2}\,[e^{ix/2}] = 2\left(\text{Sen}\,\frac{x}{2}\right)e^{i(\pi/2 + x/2)}$$

Luego , en (2) : $A + iB = \left(\frac{n}{2\,\text{Sen}(x/2)}\right)e^{-i(\pi/2 + x/2)}$

$$\therefore A = \text{Re}(A + iB) = \left(\frac{n}{2\,\text{Sen}(x/2)}\right)\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(\frac{n}{2\,\text{Sen}(x/2)}\right)\left(-\text{Sen}\,\frac{x}{2}\right) = -\frac{n}{2}$$ ■

Ejemplo 20 Hallar las sumas : a) $1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+.\,.\,.\,.\,.$

b) $\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+.\,.\,.\,.$

Solución. Sea el número complejo : $z = 1 + i = \sqrt{2}\,\text{Cis}\,(\pi/4)$

Por el teorema del binomio : $(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,(1)^{n-k}\,(i)^n$

$\Rightarrow (1+i)^n = \binom{n}{0}i^0+\binom{n}{1}i+\binom{n}{2}i^2+\binom{n}{3}i^3+\binom{n}{4}i^4+\binom{n}{5}i^5+\binom{n}{6}i^6+\binom{n}{7}i^7+.\,.\,.\,.$

$= \binom{n}{0}+i\binom{n}{1}-\binom{n}{2}-i\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+i\binom{n}{5}-\binom{n}{6}-i\binom{n}{7}+.\,.\,.\,.\,.$

$\Rightarrow \text{Re}(1+i)^n = \binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+.\,.\,.\,;\ \text{Im}\,(1+i)^n = \binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+.\,.\,.$

Pero: $\text{Re}(1+i) = \sqrt{2}\,\text{Cos}(\pi/4) \Rightarrow \text{Re}(1+i)^n = 2^{n/2}\,\text{Cos}\,(n\pi/4)$

$\text{Im}(1+i) = \sqrt{2}\,\text{Sen}(\pi/4) \Rightarrow \text{Im}(1+i)^n = 2^{n/2}\,\text{Sen}(n\pi/4)$

Por lo tanto : a) $1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+.\,.\,.\,.\,. = 2^{n/2}\,\text{Cos}\,(n\pi/4)$

b) $\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+.\,.\,.\,. = 2^{n/2}\,\text{Sen}\,(n\pi/4)$ ■

EJERCICIOS : *Grupo 42*

1. Escribir en forma exponencial : $z = \dfrac{(11\sqrt{3}-11i)\,(9+9i)}{(-1+i\sqrt{3})\,(4-4i)}$

2. Calcular y expresar el resultado en la forma $a + bi$ de $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{-46}$

3. Expresar Cos^4x en términos de Cos4x y Cos2x

4. Expresar $\dfrac{\text{Sen}\,5x}{\text{Sen}\,x}$ en términos sólo de potencias de Cosx

5. Resolver las ecuaciones :

a) $z^3 - \dfrac{\sqrt{3}-i}{i\sqrt{3}-1} = 0$

b) $(z+1-i)^3 = 1$

c) $\dfrac{(-4\sqrt{3}-4)+i\,(4\sqrt{3}-4)}{z^3} = -1-i$

d) $(iz-1)^2 - z^2 = 0$

6. Si $z = r\,e^{i\theta}$, demostrar que la parte real de $\sqrt[n]{z}+\sqrt[n]{z}$ es $2\sqrt[n]{r}\,\text{Cos}\left(\dfrac{\theta}{n}+\dfrac{2k\pi}{n}\right)$, $k = 0, 1, 2, .\,.\,.\,.\,, n-1$. Además , hallar la parte real de $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}} + \sqrt[3]{1-i\sqrt{3}}$

7. Demostrar que cualquiera que sea el complejo unitario z , entonces

$$|z-z^2| = 2\left|\text{Sen}\left(\frac{\text{Arg}\,z}{2}\right)\right|$$

8. Demostrar que : $\overline{e^{i\theta}(1-e^{i\alpha})} = e^{-i\theta}(1-e^{-i\alpha})$

9. Si ψ es el ángulo comprendido entre dos vectores que representan a los complejos z y w , demostrar que : $z\overline{w}+\overline{z}w = 2|zw|\,\text{Cos}\,\psi$

10. Sea $z = x + yi$ un número complejo

a) Si $z = -1$, demostrar que no existe un número real t tal que $z = \dfrac{1+ti}{1-ti}$

b) Si $z \neq -1$ y $|z| = 1$, hallar el número real t tal que $z = \dfrac{1+ti}{1-ti}$

11. Si $z = 3 + 4i$ y $w = 2 + 6i$, hallar el coseno del ángulo comprendido entre (z - w) y z

12. Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $a \in \mathbb{R}$; demostrar que

$$(1+\text{Cos}\,a+i\,\text{Sen}\,a)^n = 2^n\,\text{Cos}^n\left(\frac{a}{2}\right)\left[\text{Cos}\left(\frac{na}{2}\right)+i\,\text{Sen}\left(\frac{na}{2}\right)\right]$$

13. Analizar la verdad o falsedad de

a) Si $\omega^3 = 1$, $\omega \neq 1$, $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \omega^{3n}+\omega^{3n+1}+\omega^{3n+2} = 0$

b) Si $\omega \neq 1$, $\omega^5 = -1 \Rightarrow \omega^4-\omega^3+\omega^2-\omega+1 = 0$

14. Si $z = 1 + i\sqrt{3}$, hallar $\text{Re}(z^{20})$

15. Si $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+2-2\sqrt{3}\,i| \leq \sqrt{2}\}$; hallar $z_1 \in A$ de módulo máximo , $z_2 \in A$ de argumento máximo.

16. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1/5 \leq |z| \leq 1,\ \pi/8 \leq \text{Arg}(z) \leq \pi/3\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} \in A\}$. Graficar $D = \{iz \in \mathbb{C} \mid z \in B\}$, y determinar la forma polar de $z \in$ **D** de módulo máximo y argumento mínimo.

17. Hallar Re(z) , Im(z) , tal que : $(z+i)^n = i\,z^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$

18. Simplificar : $(1+i\,\text{Tg}x)^n + (1-i\,\text{Tg}x)^n$

19. Demostrar que todas las raíces de la ecuación $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \dfrac{1+i}{1-i}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ son reales y distintas.

20. Si $z + \dfrac{1}{z} = 2\,\text{Cos}\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$, calcular : $z^9 + \dfrac{1}{z^9}$

21. En base a las expresiones de $(1 + i)^n$
   a) Demostrar que
   $$\binom{n}{0} + i\binom{n}{1} - \binom{n}{2} - i\binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \ldots i^n\binom{n}{n} = 2^{n/2}\left[\text{Cos}\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\,\text{Sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$
   b) Usando lo anterior , calcular : $\binom{10}{1} - \binom{10}{3} + \binom{10}{5} - \binom{10}{7} + \binom{10}{9}$

22. Demostrar que :
   a) $\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \ldots = \frac{1}{2}\left[2^{n-1} + 2^{n/2}\,\text{Sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]$
   b) $\binom{n}{2} + \binom{n}{6} + \binom{n}{10} + \ldots = \frac{1}{2}\left[2^{n-1} - 2^{n/2}\,\text{Cos}\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]$
   c) $\binom{n}{3} + \binom{n}{7} + \binom{n}{11} + \ldots = \frac{1}{2}\left[2^{n-1} - 2^{n/2}\,\text{Sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]$

23. Hallar la suma : $\binom{n}{1} - \frac{1}{3}\binom{n}{3} + \frac{1}{9}\binom{n}{5} - \frac{1}{27} + \binom{n}{7} + \ldots$

24. Demostrar que :
   a) $1 + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \binom{n}{9} + \ldots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\,\text{Cos}\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right]$
   b) $\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \binom{n}{10} + \ldots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\,\text{Cos}\left(\frac{n-2}{3}\right)\pi\right]$
   c) $\binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \binom{n}{11} + \ldots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\,\text{Cos}\left(\frac{n-4}{3}\right)\pi\right]$

25. Demostrar que :
   $$\text{Sen}x + \text{Sen}2x + \text{Sen}3x + \ldots + \text{Sen}nx = \frac{\text{Sen}\left(\frac{n+1}{2}\right)x\ \text{Sen}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\text{Sen}(x/2)}$$

26. Demostrar que :
   $$\frac{1}{2} + \text{Cos}x + \text{Cos}2x + \text{Cos}3x + \ldots + \text{Cos}nx = \frac{\text{Sen}\left(\frac{2n+1}{2}\right)x}{\text{Sen}(x/2)}$$

27. Hallar la suma
   $\text{Sen}a - \text{Sen}(a + x) + \text{Sen}(a + 2x) - \ldots + (-1)^{n-1}\,\text{Sen}[a + (n-1)x]$

28. Hallar la suma
   $\text{Sen}x + \binom{n}{1}\text{Sen}2x + \binom{n}{2}\text{Sen}3x + \ldots + \binom{n}{n}\text{Sen}(n+1)x$

29. Hallar las sumas :

   a) $\text{Cos}x - \binom{n}{1}\text{Cos}2x + \binom{n}{2}\text{Cos}3x - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}\text{Cos}(n+1)x$
   b) $\text{Sen}x - \binom{n}{1}\text{Sen}2x + \binom{n}{2}\text{Sen}3x - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}\text{Sen}(n+1)x$

30. Hallar la suma : $\text{Sen}^2x + \text{Sen}^23x + \text{Sen}^25x + \ldots + \text{Sen}^2(2n-1)x$

31. Demostrar que :
   a) $\text{Cos}^2x + \text{Cos}^22x + \ldots + \text{Cos}^2nx = \frac{n}{2} + \frac{\text{Cos}(n+1)x\ \text{Sen}\,nx}{2\,\text{Sen}\,x}$
   b) $\text{Sen}^2x + \text{Sen}^22x + \ldots + \text{Sen}^2nx = \frac{n}{2} - \frac{\text{Cos}(n+1)x\ \text{Sen}\,nx}{2\,\text{Sen}\,x}$

32. Demostrar que :
   a) $\text{Cos}^3x + \text{Cos}^32x + \ldots + \text{Cos}^3nx =$
   $$\frac{3\,\text{Cos}\left(\frac{n+1}{2}\right)x\ \text{Sen}\left(\frac{nx}{2}\right)}{4\,\text{Sen}(x/2)} + \frac{\text{Cos}\left(\frac{3n+3}{2}\right)x\ \text{Sen}\left(\frac{3nx}{2}\right)}{4\,\text{Sen}(3x/2)}$$
   b) $\text{Sen}^3x + \text{Sen}^32x + \ldots + \text{Sen}^3nx =$
   $$\frac{3\,\text{Cos}\left(\frac{n+1}{2}\right)x\ \text{Sen}\left(\frac{nx}{2}\right)}{4\,\text{Sen}(x/2)} - \frac{\text{Cos}\left(\frac{3n+3}{2}\right)x\ \text{Sen}\left(\frac{3nx}{2}\right)}{4\,\text{Sen}(3x/2)}$$

33. Demostrar que :
   a) $\text{Cos}x + 2\,\text{Cos}2x + 3\,\text{Cos}3x + \ldots + n\,\text{Cos}nx =$
   $$\frac{(n+1)\,\text{Cos}\,nx - n\,\text{Cos}(n+1)x - 1}{4\,\text{Sen}^2(x/2)}$$
   b) $\text{Sen}x + 2\,\text{Sen}2x + 3\,\text{Sen}3x + \ldots + n\,\text{Sen}nx =$
   $$\frac{(n+1)\,\text{Cos}\,nx - n\,\text{Sen}(n+1)}{4\,\text{Sen}^2(x/2)}$$

34. Hallar la suma : $\text{Sen}\,x - \text{Sen}\,2x + \ldots + (-1)^{n-1}\,\text{Sen}nx$

35. Demostrar que :
   a) $\text{Cos}\,a + \text{Cos}(a + b) + \ldots + \text{Cos}(a + nb) = \frac{\text{Sen}\left(\frac{n+1}{2}\right)b}{\text{Sen}(b/2)}\ \text{Cos}\left(a + \frac{nb}{2}\right)$
   b) $\text{Sen}\,a + \text{Sen}(a + b) + \ldots + \text{Sen}(a + nb) = \frac{\text{Sen}\left(\frac{n+1}{2}\right)b}{\text{Sen}(b/2)}\ \text{Sen}\left(a + \frac{nb}{2}\right)$

36. Dado $n \in \mathbb{Z}^+$, demostrar que : $1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\text{Cos}\,kx}{\text{Cos}^k x}\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\,\text{Cos}\left(\frac{k\pi}{2}\right)\text{Tg}^k x$

[Sugerencia : Desarrollar $\left(1 + \dfrac{e^{i\theta}}{\text{Cos}\,\theta}\right)^n$]

37. Hallar el valor de la suma : $S = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\dfrac{\text{Cos}\,kx}{\text{Cos}^k x}\right)$

[Sugerencia : $e^{ix} = \text{Cos}x(1 + i\,\text{Tg}x)$]

38. Usando números complejos , convertir a producto : $\sum_{k=1}^{n} \text{Sen}\left(\dfrac{n-2k}{n-2}\right)x$

39. Calcular : $\sum_{k=1}^{n} \text{Cos}\left(\dfrac{2k\pi}{2n+1}\right)x$. (Sugerencia : Hacer $u = \dfrac{2\pi}{2n+1}$)

40. Resolver la ecuación en $\mathbb{C}$: $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^n + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^n = 2\,\text{Cos}\,\alpha$, y mostrar que todas las raíces son imaginarias puras. (Sugerencia : Hacer $u = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^n$)

41. Resolver la ecuación : $(1 + z)^5 = (1 - z)^5$

42. Desarrollar en sumas y productos : $Re(e^{i\theta} - i)^n$

43. Hallar el valor de la suma : $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\text{Cos}^3\left(\dfrac{4k\pi}{51}\right)$

44. Hallar el valor exacto de

$$(\sqrt{3})^{99}\binom{100}{1} - (\sqrt{3})^{97}\binom{100}{3} + (\sqrt{3})^{95}\binom{100}{5} - (\sqrt{3})^{93}\binom{100}{7} + \dots$$

[Sugerencia : Desarrollar $(\sqrt{3} + i)^{100}$]

45. Demostrar que :

$$2^n\text{Cos}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \binom{n}{0} - \binom{n}{2}(3) + \binom{n}{4}(3)^2 - \binom{n}{6}(3)^3 + \dots + \binom{n}{n}(3)^{n/2}$$

siendo n un número entero positivo múltiplo de 4. [Sug. Desarrollar $(1 + i\sqrt{3})^n$]

46. Sea $P(z) = z^n - z^{n-1} + z^{n-2} - z^{n-3} + \dots - 1$, n impar , $z = \text{Cis}\theta$, $z \neq -1$
Hallar la forma polar de P(z). (Sugerencia : Usar cocientes notables)

47. Transformar a producto : a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \text{Cos}\,k\theta$ b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \text{Sen}\,k\theta$

48. Demostrar que : $\sum_{k=1}^{n} \text{Tg}(kx)\,\text{Sec}(2kx) = \dfrac{\text{Sen}(2n-1)x}{\text{Cos}\,2nx\ \text{Cos}x}$

49. Sin usar inducción matemática , demostrar que : $\sum_{k=1}^{n} k\,\text{Cos}\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) = \dfrac{n}{2}$

8.1 INTRODUCCION

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante las técnicas usuales de sustitución y de multiplicación y suma, se dificulta en la medida en que aumenta el número de variables y se complica aún más, si es el caso que el número de variables difiere del número de ecuaciones que conforman el sistema. Dado que el conjunto solución de un sistema se obtiene operando los coeficientes y las constantes numéricas, sin necesidad de reiterar la escritura de las variables, podemos señalar que el establecimiento de ciertas relaciones aplicables a conjuntos numéricos facilitará considerablemente el proceso. En tal sentido el estudio de las matrices, como un concepto del álgebra lineal, nos ofrece la alternativa de resolver los sistemas lineales aplicando las técnicas que se describen en este capítulo.

8.2 DEFINICION

Una matriz es un arreglo rectangular de números reales ordenados en filas o columnas.

Son ejemplos de matrices los siguientes arreglos

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 10 & 5 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} \text{Sen}\alpha & \text{Cos}\beta & \text{Tg}\alpha \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 2a \\ -b \\ 3c \end{bmatrix}$$

Las matrices se denotan, con letras mayúsculas, tal como A , B , C , etc. El conjunto de elementos o componentes de una matriz se encierra entre paréntesis o corchetes y en los casos en que no se use números reales específicos, se denotan con letras minúsculas subindicadas : a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , es decir

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Los subíndices de un elemento indican . el primero la fila en la que está la componente y el segundo la columna correspondiente ; así , el elemento a_{32} ocupa la tercera fija y la segunda columna. En general , el elemento a_{ij} ocupa la intersección de la i-ésima fila y la j-ésima columna.

Nota. Se debe destacar que una matriz es un arreglo y como tal no tiene un valor numérico.

8.3 ORDEN DE UNA MATRIZ

El orden o dimensión de una matriz está dado por el producto indicado m x n, donde m indica el número de filas y n el número de columnas. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$ es una matriz de orden 2 x 3

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$ es una matriz de orden 2 x 2

El conjunto de matrices de orden m x n, con coeficientes en **K** (**K** puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), se denotará $\mathbf{K}^{m \times n}$, es decir

$$\mathbf{K}^{m \times n} = \{ A \mid A = [a_{ij}]_{m \times n} \}$$

Así, en los ejemplos anteriores : $A \in \mathbf{K}^{2 \times 3}$ y $B \in \mathbf{K}^{2 \times 2}$

Ejemplo 1 Escribir explícitamente la matriz

a) $A = [a_{ij}] \in \mathbf{K}^{2 \times 3} \mid a_{ij} = 2i - j$

b) $B = [b_{ij}] \in \mathbf{K}^{3 \times 3} \mid b_{ij} = \min(i , j)$

c) $C = [c_{ij}] \in \mathbf{K}^{2 \times 4} \mid c_{ij} = i^2 + j$

Solución. Escribiremos las componentes de cada matriz según el orden que tienen y su correspondiente definición dada.

a) $a_{11} = 2(1) - 1 = 1$, $a_{12} = 2(1) - 2 = 0$, $a_{13} = 2(1) - 3 = -1$

$a_{21} = 2(2) - 1 = 3$, $a_{22} = 2(2) - 2 = 2$, $a_{23} = 2(2) - 3 = 1$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $b_{11} = \min(1 , 1) = 1$, $b_{12} = \min(1 , 2) = 1$, $b_{13} = \min(1 , 3) = 1$

$b_{21} = \min(2 , 1) = 1$, $b_{22} = \min(2 , 2) = 2$, $b_{23} = \min(2 , 3) = 2$

$b_{31} = \min(3 , 1) = 1$, $b_{32} = \min(3 , 2) = 2$, $b_{33} = \min(3 , 3) = 3$

$$\therefore B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

c) $c_{11} = 1^2 + 1 = 2$, $c_{12} = 1^2 + 2 = 3$, $c_{13} = 1^2 + 3 = 4$, $c_{12} = 1^2 + 4 = 5$

$c_{21} = 2^2 + 1 = 5$, $c_{22} = 2^2 + 2 = 6$, $c_{23} = 2^2 + 3 = 7$, $c_{24} = 2^2 + 4 = 8$

$$\therefore C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$ ■

8.4 IGUALDAD DE MATRICES

Se dice que dos matrices A y B son iguales si son del mismo orden y sus componentes correspondientes son iguales, es decir, si las matrices son idénticas. Formalmente

$$[a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij}]_{m \times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \ , \ \forall \ i , j \qquad (1)$$

Si A no es igual a B se nota : $A \neq B$

Ejemplo 2 Sean las matrices $A = (a_{ij}) \in K^{2\times 2} \mid a_{ij} = 2^i - (-1)^j$ y

$B = \begin{bmatrix} x - y & 1 \\ 3x - y & 3 \end{bmatrix}$; hallar los valores de x e y de modo que A = B

Solución. Determinemos los elementos de la matriz A

$$a_{11} = 2^1 - (-1)^1 = 2 + 1 = 3 \;;\; a_{12} = 2^1 - (-1)^2 = 2 - 1 = 1$$
$$a_{21} = 2^2 - (-1)^1 = 4 + 1 = 5 \;;\; a_{22} = 2^2 - (-1)^2 = 4 - 1 = 3$$

Luego , si : $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y & 1 \\ 3x - y & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (x - y = 3) \wedge (3x - y = 5)$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos : x = 1 , y = -2 ■

8.5 TIPOS DE MATRICES

1. **Matriz Rectangular.** La matriz de orden m x n, con m ≠ n , recibe el nombre de *matriz rectangular.*

   Por ejemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, es una matriz rectangular de orden 2 x 3

2. **Matriz Fila.** La matriz de orden 1 x n se denomina *matriz fila o vector fila.* Por ejemplo :

   A = (2 -3 1 4) es una matriz o vector fila de orden 1 x 4

3. **Matriz Columna.** La matriz de m filas y una columna recibe el nombre de *matriz columna* de orden m x 1.

   Por ejemplo , $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$ es una matriz columna de orden 3 x 1

4. **Matriz Cero.** Una matriz cuyos elementos son todos nulos , es decir , $a_{ij} = 0$, ∀ i , j , recibe el nombre de *matriz cero o nula.*

   Por ejemplo $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es una cero de orden 2 x 3

5. **Matriz Cuadrada.** La matriz que tiene el mismo número de filas y columnas se llama *matriz cuadrada.* Esto es ,

$$A_{m\times n} \text{ es cuadrada} \Leftrightarrow m = n$$

En este caso se dice que A es una matriz de orden n x n y se le representa por A_n, y al conjunto de matrices cuadradas se le denota por K^n.

Por ejemplo , $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ es una matriz de orden 3 ($A \in K^3$)

OBSERVACION 8.1 En una matriz cuadrada, la *diagonal principal* es una línea formada por los elementos

$$a_{11} , a_{22} , a_{33} , \ldots\ldots , a_{nn}$$

OBSERVACION 8.2 *Traza de una matriz*

La suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada A se llama *traza*, y se denota por Tr(A). Esto es, si

$$A = [a_{ij}]_n \Rightarrow Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

8.6 SUMA DE MATRICES

Dadas dos matrices $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ y $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, se llama suma de A y B a otra matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} ,\ \forall\, i , j \in \{1 , 2 , 3 , \ldots , n\}$$

Esto es

$$A + B = [\,a_{ij}] + [\,b_{ij}] = [\,a_{ij} + b_{ij}] \qquad (2)$$

Ejemplo 3 Sean las matrices :

$A = \begin{bmatrix} 2x - 1 & y \\ 3 - y & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 - y & 2 - x \\ x + 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

Hallar A + C , sabiendo que A = B

Solución. Si $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 5 - y \Rightarrow 2x + y = 6 \\ 3 - y = x + 1 \Rightarrow x + y = 2 \end{cases}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos : x = 4 , y = -2

$$\therefore\ A + C = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+(-2) & -2+5 \\ -1+4 & 2+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Nota. La adición de matrices es la ley de composición interna que hace corresponder a dos matrices, del mismo orden, su suma. Se denota

$$(A , B) \Rightarrow A + B$$

PROPIEDADES DE LA ADICION DE MATRICES

Si A , B y C son matrices del mismo orden, entonces se cumplen las siguientes propiedades.

A_1 : A , B $\in K^{m\times n}$, $(A + B) \in k^{m\times n}$	Clausura
A_2 : A + B = B + A	Conmutatividad
A_3 : A + (B + C) = (A + B) + C	Asociatividad
A_4 : A $\in K^{m\times n}$, $\exists\ \theta_{m\times n}$ | A + θ = θ + A = A	Elemento neutro aditivo
A_5 : A $\in K^{m\times n}$, ∃ (-A)$\in K^{m\times n}$ | A + (-A) = (-A) + A = θ	Elemento inverso aditivo

OBSERVACION 8.3 Dos matrices del mismo orden se llaman *conformables* respecto a la suma algebraica.

OBSERVACIÓN 8.4 Las matrices del mismo orden o conformables respecto de la suma algebraica, siguen las mismas leyes de la adición que sujetan a los elementos que las componen. (Esta característica permite demostrar las propiedades de la adición de matrices).

OBSERVACION 8.5 *Diferencia de Matrices*

Dadas las matrices A y B del mismo orden m x n , la diferencia entre A y B es otra matriz C, del mismo orden, tal que

$$C = [a_{ij}]_{m\times n} - [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$$

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, entonces

$$A - B = \begin{bmatrix} 7-(-1) & -2-4 & 5-(-2) \\ 3-1 & 0-3 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 7 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

8.7 PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

Dados una matriz A y un número k ∈ **K** , el producto de k por A se define por

$$k A = k\,[a_{ij}] = [k\,a_{ij}] \qquad (3)$$

Cada componente de A se multiplica por el escalar k

Por ejemplo , si k = -2 y $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$, entonces

$$k A = \begin{bmatrix} -2(-2) & -2(2) \\ -2(-1) & -2(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4 Calcular la combinación lineal de las matrices

$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}$, si X = (1 + i) A + (1 - i) B

Solución. Obsérvese que los coeficientes de A y B son números complejos, entonces, por (3), se tiene :

$$X = (1+i)\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} + (1-i)\begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i & i(1+i) \\ 1+i & -i(1+i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i(1-i) & 1-i \\ -i(1-i) & 1-i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1+i & i-1 \\ 1+i & -i+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i+1 & 1-i \\ -i-1 & 1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2i & 0 \\ 0 & 2-2i \end{bmatrix} \blacksquare$$

Ejemplo 5 Sean las matrices : $A = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

resolver la ecuación 3/2 (X + A) = 2 [X + (2B - C)] + A

Solución. Multiplicando por 2 ambos extremos de la ecuación dada se tiene:

$$3(X + A) = 4[X + (2B - C)] + 2A \Rightarrow X = A - 8B + 4C$$

Luego , por **(3)** y **(2)** se tiene:

$$X = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 & -24 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 16 & -12 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -12 & -17 \\ 27 & 8 \end{bmatrix}$$ ■

Ejemplo 6 Resolver el sistema de ecuaciones : X - 2Y = A, 2X + 3Y = B,

$X , Y \in \mathbf{K}^{2\times 2}$, donde, $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$

Solución. Multiplicando por 3 la primera ecuación y por 2 la segunda, se tiene:

$$3X - 6Y = 3A$$
$$4X + 6Y = 2B$$

de donde obtenemos : X = 1/7 (3A + 2B) y Y = 1/7 (B - 2A)

$$3A + 2B = \begin{bmatrix} 18 & -9 \\ 21 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 & 16 \\ -14 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & 7 \\ 7 & 28 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B - 2A = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ -7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ -14 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 14 \\ -21 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$ ■

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

Si A y B $\in \mathbf{K}^{m\times n}$, y p y q son números reales, entonces

E₁ : p(q A) = (p q)A — Asociatividad escalar

E₂ : (p + q)A = pA + qA — Distributividad respecto a la suma de escalares

E₃ : p(A + B) = pA + pB — Distributividad respecto a la suma de matrices

EJERCICIOS. Grupo 43

1. Escribir explicitamente las siguientes matrices
   a) $A = [a_{ij}] \in \mathbf{K}^{3\times 2} \mid a_{ij} = i + 2j$
   b) $B = [b_{ij}] \in \mathbf{K}^{3\times 3} \mid b_{ij} = 2^i - j$
   c) $C = [c_{ij}] \in \mathbf{K}^{3\times 4} \mid c_{ij} = \max(i, j)$
   d) $D = [d_{ij}] \in \mathbf{K}^{4\times 3} \mid d_{ij} = 2^i - (-1)^j$

2. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} x-2y & x \\ 3 & x-y \end{pmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & y+4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2/3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
   Si A = B, hallar A + 3C.

3. Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 2x+1 & 2 & z-1 \\ x+2 & -1 & 2y \\ y-1 & 8 & x-2z \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3-2y & 2 & x+y \\ z+3 & -1 & z-2x \\ z-5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$
   hallar el valor x y z.

4. Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$, resolver la ecuación
   $$2(X - 2B) = 3[A + 2(X - 2B)] + C$$

5. Si $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, resolver las siguientes ecuaciones:
   a) 3 (X - 2A) = 5 (B - C) + 2(X - A - B)
   b) 3(X - A + B) = 2[X - 2 (B + C)] - (X + C)

6. Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -7 & 1 & 4 \\ 8 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -5 \\ 8 & 4 & -2 \\ -1 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -7 \\ 12 & 5 & -6 \\ -1 & 14 & 10 \end{bmatrix}$ resolver la ecuación:
   $$2(X - 2C) = 3X - C - 2(A + 2B - X)$$

7. Resolver el sistema: 2X + 3Y = A, 5X - 2Y = B , X , Y $\in \mathbf{K}^{2\times 2}$
   donde, $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 16 & -6 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 16 & -40 \\ 21 & 23 \end{bmatrix}$

8.8 MULTIPLICACION DE MATRICES

Con el objeto de comprender mejor el proceso de la multiplicación de dos matrices, veamos el siguiente ejemplo.

Un fabricante de muebles produce tres modelos de escritorios que llevan tiradores de metal y chapas especificadas por la siguiente tabla:

Partes \ Modelos	A	B	C
Nº de tiradores	8	6	4
Nº de chapas	3	2	1

Llamaremos a este arreglo, matriz de *partes* x *modelos*.

Si el fabricante recibe pedidos en el mes de Agosto, 15 del modelo A, 24 del modelo B y 17 del modelo C; y en el mes de Setiembre, 25 del modelo A, 32 del modelo B y 27 del modelo C.
Llamaremos a este arreglo, matriz de *modelo* x *mes*.

Si el fabricante desea saber de cuántos tiradores y chapas debe disponer cada mes para poder atender los pedidos, debe encarar el problema del siguiente modo:

Para determinar el número de tiradores requeridos en el mes de Agosto se sumaría el producto de cada elemento de la primera fila de la matriz *partes* x *modelos* por el correspondiente elemento de la primera columna de la matriz *modelo* x *mes*, esto es

$$8(15) + 6(24) + 4(17) = 332$$

Para establecer el número de chapas requeridas en el mes de Agosto se sumarían el producto de cada elemento de la segunda fila de la matriz *partes* x *modelo* por el correspondiente elemento de la primera columna de la matriz *modelo* x *mes*, esto es

$$3(15) + 2(24) + 1(17) = 110$$

En el mes de Setiembre el número de tiradores se obtendría sumando el producto de cada elemento de la primera fila de la matriz *partes* x *modelos* por el correspondiente elemento de la segunda columna de la matriz *modelo* x *mes*, esto es

$$8(25) + 6(32) + 4(27) = 500$$

Y para el número de chapas se sumarían el producto de cada elemento de la segunda fila de la matriz *partes* x *modelos* por el correspondiente elemento de la segunda columna de la matriz *modelo* x *mes*, esto es

$$3(25) + 2(32) + 1(27) = 166$$

Con los resultados obtenidos podemos hacer el siguiente arreglo:

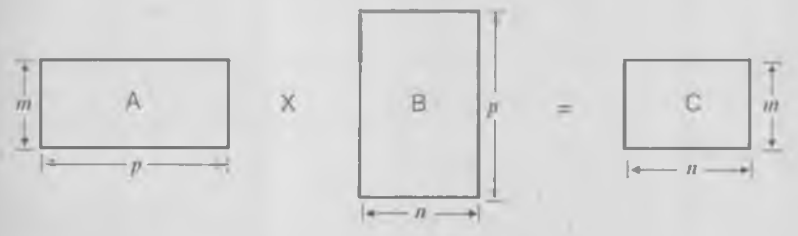
Partes \ Mes	Agosto	Setiembre
Nº de tiradores	332	500
Nº de chapas	110	166

Haciendo uso de la notación matricial, los datos y resultado obtenido nos expresará la multiplicación de matrices del siguiente modo:

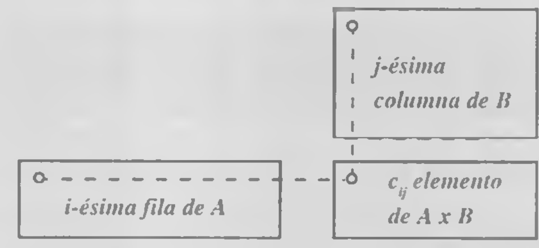
$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 15 & 25 \\ 24 & 32 \\ 17 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 332 & 500 \\ 110 & 166 \end{bmatrix}$$

Observamos de inmediato que el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda, y cuando esto ocurre se dice que las matrices son *conformables para la multiplicación.*

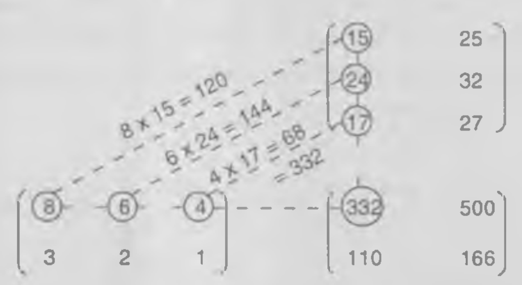
Mediante rectángulos que satisfagan la condición de que el largo del primero sea igual al ancho del segundo podemos representar el producto efectuado en la forma siguiente:



Para facilitar la comprensión del producto realizado delinearemos el siguiente diagrama



En consecuencia, una forma práctica para efectuar la multiplicación de matrices se presenta en el esquema siguiente:



DEFINICION 8.1 *Multiplicación de matrices*

Si $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ y $B = [b_{ij}]_{p\times n}$, el producto de A x B, en este orden, es la matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ cuyos elementos se obtienen de los elementos A y B siguiendo el desarrollo:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}\,b_{pj} \qquad (4)$$

Por esta definición cada elemento de *ij* de C es la suma de los productos formados al multiplicar cada elemento de la i-ésima fila de A por los elementos correspondientes de B, esto es

j-ésima columna de B

$$\text{i-ésima fila de A} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{i1} \cdots\cdots a_{ip} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = c_{ij}$$

o bien

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}\,b_{pj}\ ,\quad i = 1, 2, 3, \dots m\ ;\ j = 1, 2, 3, \dots, n \qquad (5)$$

OBSERVACION 8.6 Si $A \in K^{m\times p}$ y $B \in K^{p\times n}$, las columnas de A y las filas de B son vectores de R^p; entonces el elemento c_{ij} de la matriz C es el producto escalar de la i-ésima fila de A por la j-ésima columna de B.

OBSERVACION 8.7 El producto de AB está definido si el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Si el producto AB está definido se dice que A es *conformable* con B para la multiplicación. No significa esto que B sea necesariamente conformable con A respecto de la multiplicación, toda vez que BA puede o no estar definido.

Ejemplo 1 Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, hallar: a) AB, b) BA

Solución. Dado que A tiene dos columnas y B dos filas, entonces A es conformable con B y el producto AB está definido.

Empleando el método del producto escalar se tiene:

a) $$AB = \begin{bmatrix} (2,3)\bullet\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} & (2,3)\bullet\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} & (2,3)\bullet\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} \\ (1,2)\bullet\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} & (1,2)\bullet\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} & (1,2)\bullet\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(1)+3(4) & 2(-2)+3(1) & 2(3)+3(2) \\ 1(1)+2(4) & 1(-2)+2(1) & 1(3)+2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -1 & 12 \\ 9 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

b) En este caso, B tiene tres columnas y A dos filas, luego B no es conformable con A respecto de la multiplicación y por tanto BA no está definido. ■

Recordando el desarrollo inicial para establecer la multiplicación de matrices, es evidente que el último esquema constituye un procedimiento muy eficaz para calcular el producto de dos o más matrices.

Ejemplo 2 Si $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 6 & 12 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

hallar la matriz $D = \left(2A - \frac{1}{3}B\right)C$

Solución. Sea $E = 2A - \frac{1}{3}B = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 6 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

$-3 \times 4 = -12$

$9 \times 2 = 18$

$d_{11} = 6$

$$\begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 6 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & -6 \\ 24 & -6 & 30 \\ -2 & -7 & 5 \end{bmatrix} = D$$ ■

8.9 PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION DE MATRICES

Si A, B y C son matrices de dimensiones conformables respecto de la suma y producto, entonces se tiene:

M.1: A (BC) = (AB) C — Asociatividad

M.2: A (B+ C) = AB + AC ; (A + B) C = AC + BC — Distributividad

M.3: $AB \neq BA$

M.4: $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$

M.5: $AB = AC \not\Rightarrow B = C$

M.6: $\exists\, I \in K^n$ con la propiedad de que para cualquier $A \in K^n$ se cumple que: A I = I A (I es la matriz identidad)

Demostración. **M.1:** A(BC) = (AB) C

En efecto, sean $A \in K^{p\times m}$, $B \in K^{m\times n}$ y $C \in K^{n\times r}$, definidas por

$$A = [a_{ij}],\ B = [b_{jk}] \text{ y } C = [c_{kt}]$$

$$\text{Si } BC = [d_{jt}] \Rightarrow d_{jt} = \sum_{k=1}^{n} (b_{jk})(c_{kt})$$

$$\text{y } AB = [e_{ik}] \Rightarrow e_{ik} = \sum_{j=1}^{m} (a_{ij})(b_{jk})$$

En consecuencia, si $A(BC) = [f_{it}]$ y $(AB)C = [g_{it}]$, entonces para cada par de índices i, t se tiene:

$$f_{it} = \sum_{j=1}^{m} (a_{ij})(d_{jt}) = \sum_{j=1}^{m} (a_{ij}) \sum_{k=1}^{n} (b_{jk})(c_{kt})$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (a_{ij})(b_{jk})(c_{kt})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [(a_{ij})(b_{jk})](c_{kt})$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} [(a_{ij})(b_{jk})](c_{kt}) = \sum_{k=1}^{n} (e_{ik})(c_{kt})$$

$$\therefore\ f_{it} = g_{it} \Leftrightarrow A(BC) = (AB)C$$ ■

Ejemplo 3 Si A, B y C son matrices conformables para la adición y multiplicación, demostrar que AB + AC = A (B+C)

Demostración. La demostración requiere que las matrices B y C sean conformables respecto de la adición y las matrices A, B y A, C respecto a la multiplicación. Entonces, sean: $A = [a_{ik}]$, $B = [b_{kj}]$ y $C = [c_{kj}]$

De la hipótesis se sigue que:

$$AB + AC = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik})(b_{kj}) + \sum_{k=1}^{n} (a_{ik})(c_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik})(b_{kj} + c_{kj})$$

$$= ([a_{ik}])([b_{kj} + c_{kj}])$$

$$\therefore\ AB + AC = A(B + C)$$ ■

Ejemplo 4 Sea la matriz $B = \begin{bmatrix} \text{Cos x} & -\text{Sen x} \\ \text{Sen x} & \text{Cos x} \end{bmatrix}$. Si $A = B^2$, hallar el valor de $a_{11}\, a_{22}$, para $x = 2\pi/3$

Solución.

$$A = B^2 = \begin{bmatrix} \text{Cos x} & -\text{Sen x} \\ \text{Sen x} & \text{Cos x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Cos x} & -\text{Sen x} \\ \text{Sen x} & \text{Cos x} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Cos}^2\text{x} - \text{Sen}^2\text{x} & -2\,\text{Sen x Cos x} \\ 2\,\text{Sen x Cos x} & \text{Cos}^2\,\text{x} - \text{Sen}^2\,\text{x} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Cos 2x} & -\text{Sen 2x} \\ \text{Sen 2x} & \text{Cos 2x} \end{bmatrix}$$

Luego: $a_{11}\, a_{22} = (\text{Cos 2x})(\text{Cos 2x}) = \text{Cos}^2\,(4\pi/3) = (-1/2)^2 = 1/4$ ■

Ejemplo 5 Dadas las matrices: A de orden mxn, B de orden nxp y C de orden rxq. Qué condiciones satisfacen p, q y r para que las matrices sean conformables respecto de los productos que se indican y cuál es el orden de cada una de las matrices siguientes:

a) ABC b) ACB c) A(B+C)

Solución. a) Sea ABC = D $\Rightarrow A_{m\times n} \bullet B_{n\times p} \bullet C_{r\times q} = D_{??}$

El producto AB está definido puesto que el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Luego, para que D esté definida se debe cumplir que, p = r, entonces:

Número de filas de D = número de filas de A

Número de columnas de D = número de columnas de C

Por tanto, D es una matriz de orden mxq.

b) Sea ACB = E, entonces: $A_{m\times n} \bullet C_{r\times q} \bullet B_{n\times p} = E_{??}$

El producto de ACB es conformable $\Leftrightarrow$ n = r y q = n

y el orden de la matriz ACB es $E_{m\times p}$.

c) Sea A (B + C) = F, entonces: $A_{m\times n}(B_{n\times p} + C_{r\times q}) = F_{??}$

Para que sea posible la suma B + C se debe cumplir que: n = r y p = q

Luego, si B + C = G $\Rightarrow A_{m\times n}(G_{n\times q}) = F_{??}$

Por tanto, el orden de la matriz F es: mxq ■

Ejemplo 6 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si E = ABC, hallar la suma $S = e_{11} + e_{23} + e_{32}$

Solución. Sea D = AB $\Rightarrow$ $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Si E = DC, entonces cada elemento e_{ij} de la matriz E es el producto interno de la fila i de la matriz D por la columna j de la matriz C, esto es

$$e_{11} = d_{1i}\,c_{i1} = (5,\ 6,\ -6) \bullet (3,\ -1,\ 2) = 15 - 6 - 12 = -3$$
$$e_{23} = d_{2i}\,c_{i3} = (8,\ 4,\ -11) \bullet (1,\ 5,\ 2) = 8 + 20 - 22 = 6$$
$$e_{32} = d_{3i}\,c_{i2} = (-1,\ 6,\ 3) \bullet (6,\ 4,\ 1) = -6 + 24 + 3 = 21$$

$\therefore$ S = - 3 + 6 + 21 = 24 ■

Ejemplo 7 Hallar la matriz $A \in K^{2\times 2}$ tal que, $a_{22} = 5$ y $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 21 & 28 \end{pmatrix}$

Solución. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + 5b \\ ac + 5c & bc + 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 21 & 28 \end{pmatrix}$$

Por igualdad de matrices : $a^2 + bc = 7$ (1)

$ab + 5b = 7 \Rightarrow b = \dfrac{7}{a+5}$ (2)

$ac + 5c = 21 \Rightarrow c = \dfrac{21}{a+5}$ (3)

$bc + 25 = 28 \Rightarrow bc = 3$ (4)

Sustituyendo (4) en (1) obtenemos: $a^2 + 3 = 7 \Rightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2$ ó $a = -2$

En (2) y (3): Para a = 2 $\Rightarrow$ b = 1, c = 3 ; si a = -2 $\Rightarrow$ b = 7/3 , c = 7

La segunda alternativa no satisface bc = 3, por lo que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$ ■

Ejemplo 8 Hallar la matriz P = ABCD, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución. Se tiene $A_{3\times 2} \bullet B_{2\times 5} \bullet C_{5\times 3} \bullet D_{3\times 4} = P_{3\times 4}$

Siendo el producto conformable, efectuamos primero el producto CD = E, luego BE = F y finalmente AF = P.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & -3 \\ 8 & 4 & -8 & 7 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = E_{5\times4}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 12 & -7 \end{pmatrix} = F_{2\times4}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 8 & -3 \\ 4 & 2 & -4 & 4 \\ 8 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = P_{3\times4}$$ ■

Ejemplo 9 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 10 & 1 \\ 8 & 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Si P = ABCD, hallar $S = 2p_{12} + p_{13} - 2p_{23}$

Solución. Sean los productos AB = E y CD = F

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 10 & 1 \\ 5 & 6 & -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -10 & 24 & 0 \\ 26 & 18 & 14 & 11 \end{pmatrix} = E \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 10 & 21 & -2 \\ 10 & 10 & 22 \\ 11 & 3 & 1 \end{pmatrix} = F$$

Luego, si **P** = EF, entonces:

$$p_{12} = e_1 \cdot f_2 = (-1, -10, 24, 0) \bullet (-6, 21, 10, 3) = 36$$
$$p_{13} = e_1 \cdot f_3 = (-1, -10, 24, 0) \bullet (-3, -2, 22, 1) = 551$$
$$p_{23} = e_2 \cdot f_3 = (26, 18, 14, 11) \bullet (-3, -2, 22, 1) = 205$$

$$\therefore S = 2(36) + (551) - 2(205) = 213$$ ■

Ejemplo 10 Hallar todas las matrices, conmutativas con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución. Sean las matrices $B \in K^{3\times3}$ tales que $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+d & 3b+e & 3c+f \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow BA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & a+3b & b+3c \\ 3d & d+3e & e+3f \\ 3g & g+3h & h+3i \end{pmatrix}$$

Como A y B son conmutativas, entonces AB = BA, luego:

$3a + d = 3a \Rightarrow d = 0$, $3b + e = a + 3b \Rightarrow e = a$, $3c + f = b + 3c \Rightarrow f = b$

$3d + g = 3d \Rightarrow g = 0$, $3e + h = d + 3e \Rightarrow h = d = 0$, $3f + i = e + 3f \Rightarrow i = e = a$

$3g = 3g$, $3h = g + 3h \Rightarrow g = 0$, $3i = h + 3i \Rightarrow h = 0$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ donde } a, b, c \in \mathbf{R}$$ ■

Ejemplo 11 Hallar todas las matrices de segundo orden, cuyos cuadrados son iguales a la matriz nula θ.

Solución. Sean las matrices $A \in K^{2\times2}$ tales que, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\text{Si } A^2 = \theta \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde:

$$\begin{aligned} a^2 + bc &= 0 \\ ab + bd &= 0 \Rightarrow b(a+d) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \text{ ó } d = -a \\ ac + dc &= 0 \Rightarrow c(a+d) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ ó } d = -a \\ bc + d^2 &= 0 \end{aligned}$$

Si en la segunda y tercera ecuación, $b = 0$ y $c = 0$ tendríamos nuevamente la matriz nula, por lo que $d = -a$.

$$\therefore A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

donde a, b y c son números arbitrarios que satisfacen la relación $a^2 + bc = 0$ ■

Ejemplo 12 Demostrar la propiedad: $\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right] = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right]$

Demostración. En efecto, desarrollando la primera sumatoria desde $i = 1$ hasta $i = m$, se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right) &= \left[\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\right] + \left[\sum_{j=1}^{n} a_{2j}\right] + \left[\sum_{j=1}^{n} a_{3j}\right] + \dots + \left[\sum_{j=1}^{n} a_{mj}\right] \\ &= (a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{1n}) + (a_{21} + a_{22} + a_{23} + \dots + a_{2n}) + \\ &\quad (a_{31} + a_{32} + a_{33} + \dots + a_{3n}) + \dots + (a_{m1} + a_{m2} + a_{m3} + \dots + a_{mn}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{i1} + \sum_{i=1}^{m} a_{i2} + \sum_{i=1}^{m} a_{i3} + \dots + \sum_{i=1}^{m} a_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right] \end{aligned}$$

■

Ejemplo 13 Demostrar la propiedad: $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

Demostración. En efecto, sean las matrices conformables respecto de la multiplicación $A_{nxm} = [a_{ij}]$ y $B_{mxn} = [b_{ij}]$, de modo que si:

$$A_{nxm} B_{mxn} = C_{nxn} \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik})(b_{kj}) \Rightarrow c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{ki}$$

$$B_{mxn} A_{nxm} = D_{mxm} \Rightarrow d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (b_{ik})(a_{kj}) \Rightarrow d_{kk} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki}\, a_{ik}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego, } \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} (c_{ii}) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{ik}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, a_{ik}\right] \end{aligned}$$

Haciendo uso de la propiedad del Ejemplo 12 se tiene:

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n} b_{ki}\, a_{ki}\right] = \sum_{k=1}^{n} (d_{kk}) = \mathrm{Tr}(D)$$

$$\therefore \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

■

Ejemplo 14 Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} -1 & i \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ i & 1+i \end{bmatrix}$; hallar:

a) $\mathrm{Tr}(A + B)$, b) $\mathrm{Tr}(AB)$, c) $\mathrm{Tr}(BA)$

Solución. a) $A + B = \begin{bmatrix} -1 & i \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ i & 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3i \\ 2+i & 5+i \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Tr}(A+B) = 5+i$

b) $AB = \begin{bmatrix} -1 & i \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2i \\ i & 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1-i \\ 2+4i & 4+8i \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Tr}(A+B) = -2 + 4 + 8i = 2+8i$

c) $BA = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ i & 1+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & i \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+4i & 9i \\ 2+i & 3+4i \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Tr}(BA) = (-1+4i) + (3+4i) = 2+8i$

Obsérvese que: $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$ y $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ ■

Ejemplo 15 Si $A = [a_{ij}]_{4x4}$ y $B = [b_{ij}]_{4x4}$, donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ -1, & \text{si } i > j, \\ 0, & \text{si } i < j \end{cases} \quad b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{si } i = j \\ 1, & \text{si } i < j \\ 0, & \text{si } i > j \end{cases}. \quad \text{Hallar Tr (AB)}$$

Solución. Escribiendo explícitamente cada matriz se tiene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si $AB = C \Rightarrow Tr(AB) = Tr(C) = c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{44}$

$$c_{11} = a_{1J}\, b_{J1} = (1, 0, 0, 0) \bullet (-1, 0, 0, 0) = -1$$

$$c_{22} = a_{2J}\, b_{J2} = (-1, 1, 0, 0) \bullet (1, -1, 0, 0) = -1 -1 = -2$$

$$c_{33} = a_{3J}\, b_{J3} = (-1, -1, 1, 0) \bullet (1, 1, -1, 0) = -1 - 1 -1 = -3$$

$$c_{44} = a_{4J}\, b_{J4} = (-1, -1, -1, 1) \bullet (1, 1, 1, -1) = -1 - 1 - 1 - 1 = -4$$

$$\therefore\ Tr(AB) = -10$$

Ejemplo 16 Si $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, hállese una formula para A^n y luego demostrar su validez por inducción.

Solución.

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A\,A^2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}$$

•

•

•

$$\therefore\ An = \begin{bmatrix} a^n & n\,a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$$

Para probar que la fórmula es verdadera, supongamos que: $P(n) = A^n$. Luego

si $n = 1 \Rightarrow P(1) = A$, en efecto: $A^1 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ es verdadera

Para $n = h$, supongamos que $P(h) = A^h = \begin{bmatrix} a^h & h\,a^{h-1} \\ 0 & a^h \end{bmatrix}$ es verdadera

Entonces debemos probar que para $n = h + 1$, también

$$P(h+1) = A^{h+1} = \begin{bmatrix} a^{h+1} & (h+1)\,a^h \\ 0 & a^{h+1} \end{bmatrix} \text{ es verdadera.}$$

En efecto, valiéndonos de la hipótesis inductiva

$$A^h A = A^{h+1} = \begin{bmatrix} a^h & h\,a^{h-1} \\ 0 & a^h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{h+1} & (h+1)a^h \\ 0 & a^{h+1} \end{bmatrix}$$

En consecuencia, hemos demostrado que:

$$P(1) \text{ es } \mathbf{V} \wedge P(h) \text{ es } \mathbf{V} \Rightarrow P(h+1) \text{ es } \mathbf{V}$$

■

EJERCICIOS. *Grupo 44*

1. Calcular los productos:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Hallar a, b, c y d para que satisfagan la ecuación

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 9 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Si $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$, calcular $x + y + z$

4. Si $\begin{bmatrix} 2 & b & 1 & d \\ a & -2 & c & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 & a & 0 \\ -5 & 7 & 1 & -b \end{bmatrix}$

Hallar el valor de la suma $S = a + b + c + d$

5. Hallar una matriz X de orden 2x1 tal que $AX = 3X$, donde $A = \begin{bmatrix} 2i & 1 \\ 3 & -2i \end{bmatrix}$

6. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, hallar el valor de $A^2 - 4A$

7. Comprobar que las identidades algebraicas $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ y $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ no son ciertas para las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Si $A^2 = B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; hallar:

a) $(A + B)^2$ b) $(A+B)(A - B)$

9. Sean $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -15 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -15 & 7 \end{bmatrix}$ y $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

a) Verificar que A y B comutan b) Evaluar $f(A,B)$

10. Si $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, hállese el valor del polinomio $f(A)$ para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

11. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, hallar la suma de los elementos de A^5

12. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, hallar A^2

13. Sean $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, hallar AB^2

14. Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, hallar A^{10}

15. Para la matriz de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, hallar $(-A)^3$

16. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, hallar la matriz $M = A^3 - 2A^2$

17. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & -7 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

demostrar que AB = AC (aunque $B \neq C$)

18. Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 1 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Si P = ABC, hallar la suma: $S = p_{11} + p_{12} + p_{23}$

19. Hallar todas las matrices conmutables con la dada

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

20. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

y P = ABC, hallar el valor de la suma $S = p_{11} + p_{22} + p_{33}$

21. Hállese todas las matrices de segundo orden, cuyos cuadrados son iguales a la matriz identidad $\mathbf{I}_2$.

22. Determinar una fórmula para cada una de las siguientes potencias, y luego demostrarlo por inducción.

a) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$, $n \in \mathbf{Z}^+$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n$, $n \in \mathbf{Z}^+$

b) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{Sen}\alpha \\ \operatorname{Sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n$, $n \in \mathbf{Z}^+$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n$, $n \in \mathbf{Z}^+$

e) Si A $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, hallar A^n

23. Una compañía tiene 4 fábricas, cada una emplea administradores, supervisores trabajadores calificados en la forma siguiente:

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4
Administradores	1	2	1	1
Supervisores	4	6	3	4
Trabajadores	80	96	67	75

Si los administradores ganan $ 350 a la semana, los supervisores $275 y los trabajadores $ 200, cuál es la nómina de cada fábrica.

8.10 MATRICES CUADRADAS ESPECIALES

Consideraremos en las secciones siguientes las matrices cuadradas que presentan ciertas características que las tipifican, entre otras, destacaremos las siguientes:

8.10.1 MATRICES SIMETRICAS

Dada una matriz $A = [a_{ij}] \in K^n$, si ocurre que $[a_{ij}] = [a_{ji}]$, $\forall$ i, j diremos que A es una matriz simétrica. Si designamos con A' a la matriz $[a_{ji}]$ y si es el caso que A=A', la matriz A es simétrica y también, para una constante λ cualquiera, λA es simétrica:

Por ejemplo, si A = $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, se tiene : A' = $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Como A = A', entonces A es una matriz simétrica y también

$$\lambda A = (1/2) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ es simétrica}$$

TEOREMA 8.1 Si A es una matriz cuadrada de orden n la matriz A + A' es simétrica.

Demostracion. Sea la matriz $A = [a_{ij}]$, entonces $A' = [a_{ji}]$. Si llamamos $B = [b_{ij}]$ a la matriz A + A' probaremos que B es simétrica.

En efecto, el elemento de la fila i y la columna j de A es a_{ij} y el correspondiente de A' es a_{ji}, por lo tanto:

$$b_{ij} = a_{ij} + a_{ji} \qquad (1)$$

El elemento de la fila j y columna i de A es a_{ji} y el correspondiente de A' es a_{ij}, de modo que:

$$b_{ji} = a_{ji} + a_{ij} \qquad (2)$$

De (1) y (2) se sigue que : $b_{ij} = b_{ji}$

En consecuencia, B = A+A' es una matriz simétrica

8.10.2 MATRIZ ANTISIMETRICA

Una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ para la cual $A' = [a_{ji}] = -A$ recibe el nombre de matriz *antisimétrica o hemisimétrica.*

En una matriz cuadrada A antisimétrica se verifica que

$$[a_{ij}] = [-a_{ji}],\ \forall\ i\ j$$

Por ejemplo, si A = $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ocurre que : A' = $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Como A' = -A , entonces A es una matriz antisimétrica

OBSERVACION 8.8 En una matriz antisimétrica los elementos de la diagonal principal deben ser cero.

TEOREMA 8.2 Si A es una matriz cuadrada de orden n, la matriz A-A' es antisimétrica.

Demostración. En efecto, considerando que (A + B)'= A' + B' se sigue que (A - A')' = A'- (A')' = A'- A = - (A - A')

Por lo tanto, A - A' es antisimétrica

Por ejemplo, si A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ A' = $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{luego, } A - A' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -6 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } (A - A')' = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & -6 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -6 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde, $(A - A')' = -(A - A')$, por lo que, $A - A'$ es antisimétrica

TEOREMA 8.3 Toda matriz cuadrada A se puede descomponer en la suma de una matriz simétrica $A_s = 1/2\,(A + A')$ y otra antisimétrica $A_a = 1/2\,(A - A')$.

Demostración . Una matriz A se puede escribir como

$$A = A + \frac{1}{2}A' - \frac{1}{2}A' = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A') \qquad (1)$$

Dado que : $1/2\,(A + A')' = 1/2\,(A + A')$ y $1/2\,(A - A')' = -1/2(A - A')$ escribiendo, $A_s = 1/2\,(A + A')$ y $A_a = 1/2\,(A - A')$, entonces A_s es una matriz simétrica y A_a es antisimétrica. En consecuencia, hemos expresado así la matriz cuadrada A como la suma de matriz simétrica y una antisimétrica, esto es, en (1)

$$A = A_s + A_a$$

Por ejemplo :

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}} = \underset{A_s}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}} + \underset{A_a}{\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}$$

8.10.3 MATRIZ IDENTIDAD

Una matriz cuadrada de orden n cuyos elementos de la diagonal principal son todos uno y los otros elementos son todos ceros, recibe el nombre de *matriz identidad o matriz unidad.* Se denota generalmente con $\mathbf{I}_n$, esto es

$$\mathbf{I}_n = [\delta_{ij}] \Rightarrow ij = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j \\ 0, \text{ si } i \neq j \end{cases} \qquad (6)$$

Además : $Tr(I_n) = n$, $(I_n)' = I_n$, $AI = IA = A$

Ejemplo 1 Si A, B, C y D son matrices del mismo orden tales que $BC = CB = I$, $AD = DA = I$; hallar usando propiedades

a) (AB) (CD) b) $(A+B)^2$ c) (A+D) (A-D)

Solución. a)

$$\begin{aligned} (AB)(CD) &= A[B(CD)] && \text{(M.1)} \\ &= A[(BC)D] && \text{(M.1)} \\ &= A[ID] && \text{(Dato)} \\ &= AD && \text{(M.6)} \end{aligned}$$

$\therefore\ (AB)(CD) = I$

b)

$$\begin{aligned} (A+B)^2 = (A+B)(A+B) &= (A+B)A + (A+B)B && \text{(M.2)} \\ &= A^2 + BA + AB + B^2 && \text{(M.2)} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} (A+D)(A-D) &= (A+D)A - (A+D)D && \text{(M.2)} \\ &= A^2 + DA - AD - D^2 && \text{(M.2)} \\ &= A^2 + I - I - D^2 && \text{(Dato)} \\ &= A^2 - D^2 \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2 Si A y $B = \alpha A + \beta I$ son matrices del mismo orden, donde α y β son escalares, demostrar que A y B conmutan.

Demostración. Debemos probar que AB = BA

En efecto,

$$\begin{aligned} AB &= A(\alpha A + \beta I) \\ &= \alpha AA + \beta AI \\ &= (\alpha A + \beta I)A = BA \end{aligned}$$

■

Ejemplo 3 Hallar el valor del polinomio $f(A)$ de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ si $f(x) = 3x^2 - 4$

Solución. Si $f(x) = 3x^2 - 4 \Rightarrow f(A) = 3A^2 - 4I$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f(A) = 3\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 15 \\ 0 & 23 \end{bmatrix}$$

■

Ejemplo 4 Dada la fórmula $e^z = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{z^n}{k!}\right]$, $\forall\, z \in C$, se define

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{A^n}{k!}\right] \ , \ \forall\ A$$

a) Demostrar que $e^I = e\,I = e$ b) Hallar e^A, si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solución. a) En la definición dada, para A = I se tiene

$$e^I = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{I^n}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{I}{k!}\right] = I\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{k!}\right] \qquad (1)$$

Ahora, en la fórmula dada, para z = 1 obtenemos : $e^1 = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{k!}\right]$

Por lo tanto, en (1) : $e^I = I\,e = e$

b) Desarrollando el segundo miembro de la definición se tiene :

$$e^A = \frac{A^0}{0!} + \frac{A^1}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots + \frac{A^\infty}{\infty!} = I + A + \frac{A^2}{5} + \frac{A^3}{6} + \ldots \qquad (2)$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A\,A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \theta$$

Luego, en (2) : $e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2$

$$\therefore\ e^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ ■$$

8.10.4 MATRIZ DIAGONAL

Una matriz cuadrada de la forma D = $[\,k\ d_{ij}\,]$ en la que k_i puede variar según i, se llama *matriz diagonal*. Se representa usualmente por

$$D = \text{diag}\,(d_{11}, d_{22}, d_{33}, \ldots\ldots, d_{nn})$$

y tiene la propiedad de que

$$D^n = \text{diag}\,(d^n_{11}, d^n_{22}, d^n_{33}, \ldots\ldots, d^n_{nn})$$

Por ejemplo, si $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \text{diag}\,(3, -2, 4)$

$$\Rightarrow D^2 = \text{diag}\,(9, 4, 16)\ ,\ D^5 = \text{diag}\,(27, -8, 64)$$

8.10.5 MATRIZ ESCALAR

Una matriz cuadrada $E = [\,k\ \delta_{ij}\,] = k\,I_n$, para cualquier constante k, recibe el nombre de matriz escalar.

Asi, la matriz $E = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ en la que E = 4 I, es una matriz escalar

Ejemplo 5 Sea $D = [d_{ij}]$ tal que : $d_{ij} = i$, si $i = j$ y $d_{ij} = 0$, si $i \neq j$ y $A = [\,a_{kj}]$ tal que : $a_{kj} = i$, si $i = k$ y $a_{kj} = a$, si $i \neq k$ donde A, D ∈ K^n. Hallar AD^n, $n \in Z^+$.

Solución . D es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal varian según i, esto es: D = diag (1, 2, 3, ..., n)

$$\Rightarrow D^n = \text{diag}\,(1, 2^n, 3^n, \ldots, n^n)$$

A es una matriz cuyos elementos de la diagonal principal varian según i y los demás elementos son todos a , esto es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots\cdots & a \\ a & 2 & a & \cdots\cdots & a \\ a & a & 3 & \cdots\cdots & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a & a & a & \cdots\cdots & n \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad AD^n = \begin{bmatrix} 1 & a2^n & a3^n & \cdots\cdots & an^n \\ a & 2^{n+1} & a3^n & \cdots\cdots & an^n \\ a & a2^n & 3n^{n+1} & \cdots\cdots & an^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a & a2^n & a3^n & \cdots\cdots & n^{n+1} \end{bmatrix}$$

8.10.6 MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

La matriz cuadrada A cuyos elementos situados debajo de la diagonal principal son todos ceros, se llama *matriz triangular superior*. Esto es, $a_{ij}=0$, si i > j

Por ejemplo : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular superior

8.10.7 MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

Una matriz cuadrada A cuyos elementos situados por encima de la diagonal principal son todos cero, se llama *matriz triangular inferior*.
Esto es, $a_{ij} = 0$, si i < j

Por ejemplo : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular inferior

8.10.8 MATRIZ PERIODICA

Dada la matriz cuadrada A, si para un número entero y positivo p, ocurre que:

$$\boxed{A^{p+1} = A} \qquad (7)$$

se dice que A es una *matriz periódica*, de período p.

Ejemplo 6 Si A es una matriz cuadrada y periódica tal que $A^5 = A$, hallar el período y calcular A^{99}.

Solución. De la relacion (7), si $A^{p+1} = A^5 \Rightarrow p + 1 = 5 \Leftrightarrow p = 4$ es el período de la matriz.

Multiplicando sucesivamente, por si mismo, la matriz A obtenemos

$$\overbrace{A \times A \times A \times A \times A}^{A^5 = A} \times \overbrace{A \times A \times A \times A}^{A^9 = A} \ldots$$

Se observa que : $A^9 = A^{4\times2+1} = A$

$A^{13} = A^{4\times3+1} = A$

$\cdot$
$\cdot$
$\cdot$

$A^{p+1} = A^{4m+1} = A$

Ahora bien : $A^{99} = A^2 A^{97} = A^2 (A^{4\times24+1}) = A^2 (A)$

$$\therefore \quad A^{99} = A^3$$ ■

Ejemplo 7 Si $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, hallar A^{25}

Solución. $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

Luego, $A^3 = A^2 A = I A = A \Rightarrow p + 1 = 3 \Leftrightarrow p = 2$ es el período de la matriz A.

$$\therefore \quad A^{25} = A^{2\times12+1} = A$$ ■

Ejemplo 8 Si $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, calcular A^{100}

Solución. $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^2 = A^2 A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$

Entonces : $A^4 = A^3 A = (-I) A = -A$

$A^5 = A^4 A = (-A) A = -A^2$

$A^6 = A^5 A = (-A^2)A = -A^3 = -(-I) = I \Rightarrow A^7 = A^6 A = IA = A$

Luego, $p + 1 = 7 \Leftrightarrow p = 6$ es el período de la matriz A

$$\therefore\ A^{100} = A^3(A^{97}) = A^3(A^{6\times16+1}) = A^3(A) = A^4 = -A$$ ■

I OBSERVACION 8.9 *Matriz Idempotente*

Si en la fórmula (7) $p = 1$, esto es, $A^{1+1} = A^2 = A$, entonces la matriz A se llama *idempotente*.

Ejemplo 9 Establecer si la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ es idempotente

Solición. $$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = A$$

Por lo tanto, la matriz A es idempotente. ■

Ejemplo 10 Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, hallar A^5B^7

Solución. $$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = A \quad \text{(A es Idempotente)}$$

Entonces : $A^5 = (A^2)^2A = (A)^2A = (A)A = A^2 = A$

$$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = B \quad \text{(B es Idempotente)}$$

Luego : $B^7 = B(B^2)^3 = B(B)^3 = B^2B^2 = B \times B = B^2 = B$

$$\therefore A^5B^7 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \theta$$ ■

I OBSERVACION 8.10 *Matriz Nilpotente*

Una matriz A, para el cual $A^p = \theta$, siendo p un número entero y positivo, se llama *nilpotente* de indice p.

Ejemplo 11 Determinar si la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ es nilpotente

Solución. $$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \theta$$ ■

Por lo tanto, A es una mattriz nilpotente de indice $p = 3$

I OBSERVACION 8.11 *Matriz Involutiva*

Una matriz A tal que $A^2 = I$, se llama *involutiva*.

Ejemplo 12 Determinar si la matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ es involutiva.

Solución. $$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Por lo tanto, la matriz A es involutiva.

Ejemplo 13 Si A es una matriz involutiva

a) Demostrar que $1/2\,(I + A)$ y $1/2(I - A)$ son idempotentes

b) Calcular la matriz $P = 1/2\,(I + A)(I - A)$

Solución.

a) Sea $B = 1/2\,(I+A) \Rightarrow B^2 = 1/4\,(I+A)(I+A) = 1/4\,(I^2 + IA + AI + A^2)$
$= 1/4\,(I + A + A + I) = 1/2\,(I+A)$

Como $B^2 = B$ entonces $1/2\,(I+A)$ es idempotente

Sea $C = 1/2\,(I - A) \Rightarrow C^2 = 1/4\,(I - A)(I - A) = 1/4\,(I^2 - IA - AI + A^2)$
$= 1/4\,(I - A - A + I) = 1/2\,(I - A)$

Luego, $C^2 = C \Rightarrow 1/2\,(I - A)$ es idempotente

b) $P = 1/2\,(I - A)(I + A) = 1/2\,(I^2 + IA - AI - A^2) = 1/2\,(I + A - A - I) = \theta$ ■

Ejemplo 14 Si A y B son matrices involutivas y AB = BA $= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

hallar la traza de la matriz $X = (A+B)^2$.

Solución . $X = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Como A y B son matrices involutivas $\Rightarrow A^2 = B^2 = I$

$$\text{Luego : } X = 2I + 2AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 12 & 0 \\ -4 & 2 & 4 \\ 8 & 6 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ Tr (X) = 8 + 4 - 8 = 4 ■

8.10.9 MATRIZ TRANSPUESTA

Dada una matriz A de orden m x n, se llama *matriz transpuesta* de A, se denota A^t, a la matriz de orden n x m cuyos elementos se obtienen intercambiando las filas por las columnas.

Por ejemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, la transpuesta es $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

Propiedades . Si A^t y B^t son, respectivamente, las transpuestas de las matrices A y B, conformables respecto de la adición y multiplicación, y λ un escalar cualquiera, entonces se cumplen las siguientes propiedades.

T.1: $(A^t)^t = A$

T.2: $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

T.3: $(A + B)^t = A^t + B^t$

T.4: $(AB)^t = B^t A^t$

T.5: $(I_n)^t = I_n$

Ejemplo 15 Demostrar la propiedad T.4 : $(AB)^t = B^t A^t$

Demostración. Sean $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden m x n

$B = [b_{ij}]$ una matriz de orden n x p

Si hacemos AB = C, entonces $C = [c_{ij}]$ es una matriz de orden m x p.

El elemento de la fila i y la columna j de AB es

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (a_{ik})(b_{kj})$$

que también pertenece a la fila j y columna i de $(AB)^t$

Luego, si $(AB)^t = C^t \Rightarrow c_{ji} = \sum_{k=1}^{m} (a_{jk})(b_{ki})$ (1)

Supongamos que $B^t = [x_{ik}]$ tal que $[x_{ik}] = [b_{ki}]$

y $A^t = [y_{kj}]$ tal que $[y_{kj}] = [a_{kj}]$

Entonces : $B^t A^t = \sum_{k=1}^{n} (x_{ik})(y_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} (b_{ki})(a_{jk}) = \sum_{k=1}^{m} (a_{jk})(b_{ki})$ (2)

comparando (2) con (1) se concluye que

$$(AB)^t = B^t A^t$$ ■

Ejemplo 16 Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Si $(AB)^t + X = 2(B^t + A)$, hallar la traza de la matriz X

Solución. De la ecuación dada se tiene: $X = 2A + 2B^t - B^t A^t$

Un elemento cualquiera de la matriz X es

$$x_{ij} = 2a_{ij} + 2b_{ji} - (b_{jk})(a_{ki})$$

$\Rightarrow$ $x_{11} = 2a_{11} + 2b_{11} - (b_{1k})(a_{k1}) = 2(1) + 2(1/2) - (1/2, 0, 0)(1, 4, -3) = 2.5$

$x_{22} = 2a_{22} + 2b_{22} - (b_{2k})(a_{k2}) = 2(0) + 2(1/5) - (3, 1/5, 0)(2, 0, 1) = -5.6$

$x_{33} = 2a_{33} + 2b_{22} - (b_{3k})(a_{k3}) = 2(-2) + 2(1) - (0, 0, 1)(1, 5, -2) = 0$

$\therefore$ Tr (X) = 2.5 - 5.6 + 0 = -3.1 ■

Ejemplo 17 Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ -3 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 5 & 6 & -8 \end{bmatrix}$

Si $(A^t + B)^t = 2(X - A^t) + 3B$, hallar la suma de las componentes de la tercera fila de la matriz X.

Solución . Haciendo uso e las propiedades T.3 y T.1 , se tiene :

$(A^t)^t + B^t = 2x - 2A^t + 3B \Rightarrow X = 1/2\,(A + B^t + 2A^t - 3B)$

Luego: $x_{31} = 1/2\,(a_{31} + b_{13} + 2a_{13} - 3b_{31}) = 1/2\,[2 + 1 + 2(5) - 3(5)] = -1$

$x_{32} = 1/2\,(a_{32} + b_{23} + 2a_{23} - 3b_{32}) = 1/2\,[-4 + 0 + 2(3) - 3(6)] = -8$

$x_{33} = 1/2\,(a_{33} + b_{33} + 2a_{33} - 3b_{33}) = 1/2\,[2 - 8 + 2(2) - 3(-8)] = 11$

$\therefore x_{31} + x_{32} + x_{33} = 2$ ■

Ejemplo 18 Si $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ y $C = (AB)^t - B$,

hallar el valor de la suma $S = c_{21} + c_{31} + c_{23}$

Solución . Si $C = (AB)^t - B \Rightarrow C_{ij} = (b_{kj})(a_{ik}) - b_{ij}$

$$\Rightarrow c_{21} = (b_{k2}) \bullet (a_{1k}) - b_{21} = (3, 1, -1) \bullet (0, -1, 3) - (-2) = -2$$
$$c_{31} = (b_{k3}) \bullet (a_{1k}) - b_{31} = (0, -2, 4) \bullet (0, -1, 3) - (0) = 14$$
$$c_{23} = (b_{k2}) \bullet (a_{3k}) - b_{23} = (3, 1, -1) \bullet (3, 2, 1) - (-2) = 12$$

$$\therefore S = -2 + 14 + 12 = 24$$ ■

Ejemplo 19 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 21 \end{bmatrix}$, hallar la matriz triangular inferior B, tal que : $BB^t = A$.

Solución . Sea $B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$

Si $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ad \\ ab & b^2+c^2 & bd + ce \\ ad & bd + ce & d^2 + e^2 + f^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 21 \end{bmatrix}$

entonces, por la igualdad de matrices se tiene

$a^2 = 4$, $ab = 2$, $ad = 4$

$ab = 2$, $b^2 + c^2 = 10$, $bd + ce = 5$

$ad = 4$, $bd + ce = 5$, $d^2 + e^2 + f^2 = 21$

de donde obtenemos : $a = 2, b = 1, c = 3, d = 2, e = 1, f = 4$

$$\therefore B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$ ■

8.10.10 MATRIZ HERMITIANIA

Una matriz cuadrada y compleja A se denomina *hermitiana* si es igual a la transpuesta de su conjugada.

Una matriz compleja es aquella que tiene como elementos a los números complejos por ejemplo, una matriz compleja es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3+i & i \\ 3-i & 3 & 1-i \\ -i & 1+i & 2 \end{bmatrix}$$

y su conjugada, denotada por $\overline{A}$, es :

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3-i & -i \\ 3+i & 3 & 1+i \\ i & 1-i & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (\overline{A})^t = \begin{bmatrix} 1 & 3+i & i \\ 3-i & 3 & 1-i \\ -i & 1+i & 2 \end{bmatrix} = A$$

vemos que $A = (\overline{A})^t$, luego, A es una matriz hermitiana.

OBSERVACION 8.12 En una matriz hermitiana los elementos de la diagonal principal son números reales.

8.10.11 MATRIZ INVERSA

Si $A \in K^n$, se dice que A es inversible si existe una matriz B tal que $AB = I$ ó $BA = I$, para los que B recibe el nombre de *matriz inversa* de A y se denota. $B = A^{-1}$. Del mismo modo, la matriz A es la inversa de B y se escribe, $A = B^{-1}$.

PROPIEDADES . Si A y B son matrices cuadradas de orden n, inversibles, entonces se cumplen las siguientes propiedades

PI.1 : $A A^{-1} = A^{-1}A = I$

PI.2 : $(A^{-1})^{-1} = A$

PI.3 : Si $AB = BA = I \Rightarrow B = A^{-1}$

PI.4 : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

PI.5 : $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Ejemplo 20 Demostrar la propiedad PI.4 : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Demostración. Por la definición de matriz inversa debemos probar que

a) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$ y b) $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$

En efecto :

a) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$ (M.1)

$= A(I)A^{-1}$ (PI.1)

$= AA^{-1}$ (M.6)

$= I$ (PI.1)

$$\begin{aligned} \text{b) } (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B && \text{(M.1)} \\ &= B^{-1}(I)B && \text{(PI.1)} \\ &= B^{-1}B && \text{(M.6)} \\ &= I && \text{(PI.1)} \end{aligned}$$

En consecuencia, de a) y b) se concluye que :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$ ■

Ejemplo 21 Demostrar la propiedad PI.5 : $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Demostración . En efecto, por la propiedad PI.1 : $AA^{-1} = I$ y por T.5 : $I^t = I$

$$\Rightarrow \quad (AA^{-1})^t = I^t = I$$

$$\Rightarrow \quad (A^{-1})^t A^t = I$$

Multiplicando ambos extremos por $(A^t)^{-1}$ se tiene

$$(A^{-1})^t \underbrace{A^t (A^t)^{-1}}_{I} = I(A^t)^{-1}$$

$$\therefore (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$ ■

Ejemplo 22 Demostrar que la inversa de una matriz, si existe, es única.

Demostración . En efecto, supongamos que existe dos matrices B y C, tales que:

$A^{-1} = B$ y $A^{-1} = C$, siendo $B \neq C$

Entonces por definición : $AB = I = BA$

$AC = I = CA$

De estas dos igualdades se deduce que : $AB = AC$

esto es, $AB - AC = \theta \Rightarrow A(B - C) = \theta$

Dado que existe A^{-1}, entonces $A \neq \theta$, por lo que : $B - C = \theta \Rightarrow B = C$

Lo que contradice la hipótesis. En consecuencia :

La inversa de una matriz es única. ■

Ejemplo 23 Si $M = I - X(X^tX)^{-1}X^t$ con $X = [x_{i1}]_{nx1}$, simplificar al máximo la suma : $S = I + M + M^2 + M^3 + \dots\dots + M^p$, donde $p \in Z^+$

Solución.

$$\begin{aligned} M^2 &= [I - X(X^tX)^{-1}X^t][I - X(X^tX)^{-1}X^t] \\ &= \underbrace{I - X(X^tX)^{-1}X^t}_{} - X(X^tX)^{-1}X^t + [X(X^tX)^{-1}X^t][X(X^tX)^{-1}X^t] \\ &= \quad M \quad - X(X^tX)^{-1}X^t + X[(X^tX)^{-1}X^t][X(X^tX)^{-1}X^t] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= M - X(X^tX)^{-1}X^t + X[(X^tX)^{-1}(X^tX)](X^tX)^{-1}X^t \\ &= M - X(X^tX)^{-1}X^t + X[I](X^tX)^{-1}X^t \\ &= M - X(X^tX)^{-1}X^t + X(X^tX)^{-1}X^t \end{aligned}$$

Luego : $M^2 = M \Rightarrow M^3 = MM^2 = M(M) = M^2 = M$

$M^4 = M^2M^2 = (M)(M) = M^2 = M \Rightarrow M^p = M$

$\therefore S = I + M + M + M + \dots\dots\dots\dots + M = I + pM$ ■

8.10.12 INVERSA DE UNA MATRIZ TRIANGULAR

Si A es una matriz triangular inferior y X su inversa, como por definición $AX = I$, entonces

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & \cdots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Por la multiplicación e igualdad de matrices, el producto de la primera fila de A por la primera columna de X es 1, esto es

$$(a_{11}, 0, 0, 0 \dots\dots\dots, 0) \bullet (x_{11}, x_{21}, x_{31}, \dots\dots\dots, x_{n1}) = 1 \Rightarrow x_{11} = a_{11}^{-1}$$

Ahora efectuando el producto interno de la primera fila A con las columnas restantes de X y aplicando la igualdad, resulta que

$$x_{12} = x_{13} = x_{14} = \dots\dots\dots\dots = x_{1n} = 0$$

Al multiplicar la segunda fila de A con la segunda columna de X, esto es

$$(a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots\dots\dots\dots, 0) \bullet (0, x_{22}, x_{32}, \dots\dots\dots\dots, x_{n2}) = 1 \Rightarrow x_{22} = a_{22}^{-1}$$

De igual manera, del producto interno de la segunda fila de A por las otras columnas de X se concluye que

$$x_{21} = x_{23} = \dots\dots\dots\dots = x_{2n} = 0$$

Reiterando el proceso hasta la n-ésima fila de A podemos concluir que si una matriz triangular inferior A es inversible, entonces :

1. Todos los elementos de la diagonal principal deben ser diferente de cero.

2. La inversa A^{-1} es también una matriz triangular inferior.
3. Los elementos de la diagonal principal de A^{-1} son los números

$$(a_{11})^{-1},\ (a_{22})^{-1},\ (a_{33})^{-1},\ \dots\dots\dots\dots,\ (a_{nn})^{-1}$$

Por lo tanto, la ecuación matricial anterior se convierte en

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a_{11})^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & (a_{22})^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & (a_{nn})^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Por analogía establecemos que si A es una *matriz triangular superior*, entonces A tiene una inversa si y sólo si no existe ceros en la diagonal principal; A^{-1} es una matriz triangular superior y para calcular A^{-1} se debe resolver la ecuación matricial.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a_{11})^{-1} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & (a_{22})^{-1} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (a_{nn})^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Las ecuaciones (8) y (9) nos permite deducir la inversa de una matriz diagonal (Triangular superior e inferior), esto es :

Si $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots\dots\dots\dots, a_{nn})$, entonces

$$D^{-1} = \text{diag}(a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, a_{33}^{-1}, \dots\dots\dots\dots, a_{nn}^{-1}) \quad (10)$$

Ejemplo 24 Determinar, si existe, la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución . La matriz A es inversible, puesto que no hay ceros en la diagonal principal. Por la ecuación matricial (8) resolvemos la ecuación :

$$A A^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_{21} & 1/2 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular x_{21} se efctúa el producto escalar de la segunda fila de A por la primera columna de A^{-1}, esto es

$$(-1, 2, 0) \bullet (1, x_{21}, x_{31}) = 0 \Rightarrow x_{21} = 1/2$$

A continuación se efectúa el producto escalar de la tercera fila de A por la primera columna de A^{-1}, es decir :

$$(1, 2, 3) \bullet (1,\ 1/2,\ x_{31}) = 0 \Rightarrow x_{31} = -2/3$$

Finalmente se calcula el producto escalar de la tercera fila de A por la segunda columna de A^{-1}, esto es

$$(1, 2, 3) \bullet (0,\ 1/2,\ x_{32}) = 0 \Rightarrow x_{32} = -1/3$$

$$\therefore\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$ ■

Ejemplo 25 Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, hallar la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz $M = 3A^{-1} - 2B^{-1}$

Solución . Como las matrices A y B son triangulares se tiene :

$$m_{11} = 3(a_{11})^{-1} - 2(b_{11})^{-1} = 3(1/3) - 2(1/2) = 0$$

$$m_{22} = 3(a_{22})^{-1} - 2(b_{22})^{-1} = 3(1/2) - 2(1/5) = 11/10$$

$$m_{33} = 3(a_{33})^{-1} - 2(b_{33})^{-1} = 3(1/5) - 2(-1/2) = 8/5$$

$$\therefore\ Tr(M) = 11/10 + 8/5 = 2.7$$ ■

Ejemplo 26 Si B es la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

hallar el valor de la suma $S = b_{21} + b_{32} + b_{33}$

Solución . A es una matriz triangular inferior, luego, por la ecuación matricial (8) se tiene

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & -1 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 1/2 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & -1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto escalar de la segunda fila de A por la primera columna de B se tiene :

$$(4, -1, 0, 0) \bullet (1/2, b_{21}, b_{31}, b_{41}) = 0 \Rightarrow b_{21} = 2$$

Del producto escalar de la tercera fila A por la segunda columna de B se tiene :

$$(3, 4, 5, 0) \bullet (0, -1, b_{32}, b_{42}) = 0 \Rightarrow b_{32} = 4/5$$

De la matriz B obtenemos : $b_{33} = 1/5$

$$\therefore\ S = 2 + 4/5 + 1/5 = 3$$ ■

Ejemplo 27 Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz triangular superior de orden n, tal que $a_{ij} = 1$ si $i \leq j$. De la matriz $B = A^3$, hallar la suma de los elementos b_{ij} para los cuales:

a) i = 2, j = n b) i = 3, j = n-3 c) i = j

Solución . Según la definición construimos la matriz triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & 1 \\ \bullet & \bullet & & \bullet & & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 1 \end{bmatrix}$$

Al efectuar el producto $AA = A^2$, obtenemos :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \bullet & \bullet & \bullet & n-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \bullet & \bullet & \bullet & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \bullet & \bullet & \bullet & n-3 & n-2 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A\,A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 & \bullet & \bullet & 1/2\,(n-1)n & 1/2\,n(n+1) \\ 0 & 1 & 3 & 6 & \bullet & \bullet & 1/2\,(n-2)(n-1) & 1/2\,(n-1)n \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \bullet & \bullet & 1/2\,(n-3)(n-2) & 1/2(n-2)(n-1) \\ \bullet & \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet & & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & & & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

Luego, para : $i = 2,\ j = n \Rightarrow b_{2n} = 1/2\,(n - 1)n$

$i = 3,\ j = n-3 \Rightarrow b_{3(n-3)} = 1/2\,(n - 4)\,(n - 3)$

$i = j \Rightarrow b_{ij} = 1$

$\therefore\ S = 1/2\,(n - 1)\,n + 1/2\,(n - 4)\,(n - 3) + 1 = n^2 - 4n + 7$ ■

EJERCICIOS : Grupo 45

1. Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, verificar que $A^2 - 2A - 5\,I = \theta$

2. Comprobar que la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2 - 5A + 7I = \theta$

3. Se dice que una matriz A es ortogonal, si su inversa es igual a su transpuesta, es decir, $A^{-1} = A^t$. Comprobar que la matriz
$A = \begin{bmatrix} \text{Cos } x & -\text{Sen } x \\ \text{Sen } x & \text{Cos } x \end{bmatrix}$ es ortogonal. (Sugerencia : Probar que $AA^t = A^tA = I$)

4. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, demostrar que $A^2 = 2A - I$ y hallar A^n

5. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, hallar X en: $(AB)^t + X = 2(B^t + A)$.

6. Hallar el valor del polinomio $f(A)$ de la matriz A

   a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $f(x) = 8x^3 + 2x^2 + x - 3$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 4$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

7. Sean : $f(x) = x^2 - x + 3$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Evaluar $f(A+B)$

8. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

despejar X de la ecuación $(A + B + X)^t = 2(A^t - B)$

9. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

hallar la matriz X, si $(A + 4B - 2X)^t = 3(A^t - 2B)$

10. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

hallar la matriz X de la ecuación matricial : $(AB + 2X)^t = 3A - 2B^t$

11. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

hallar la matriz X, si $(2A - 3B)^t - 2X = B - A$

12. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 6 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & 3 \\ -2 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

y la ecuación $1/2(X - 3A) = (A^t - 2B)^t + A^t$; hallar la suma de las componentes de la segunda fila y la suma de las componentes de la tercera columna de la matriz X.

13. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $C = (1, -2, 3)$

Si $B^t A = C$, hallar el valor de la suma $S = x + y + z$.

14. Demostrar que las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

son idempotentes y permutables.

15. Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Demostrar que las matrices dadas son idempotentes y además permutables dos a dos, dando en cada caso la tercera.

16. Mostrar que $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ es una matriz nilpotente de índice 2.

17. Mostrar que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ son matrices involutivas.

18. Si A y B son matrices involutivas y $AB = BA = \begin{pmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

hallar la traza de la matriz $M = (A + B)^2$.

19. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1.5 \\ 5 & 2 & 2 \\ 2 & 7.5 & -3.5 \end{pmatrix}$

hallar la matriz $M = (AB)^t - 2C$.

20. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = (BA)^t + 2A$;

hallar la suma de los elementos de la segunda fila de la matriz C.

21. Se dice que una matriz A es ortogonal si $A^{-1} = A^t$. Comprobar si la matriz $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ es ortogonal (Sugerencia : $AA^t = A^tA = I$).

22. En una página deteriorada de un antiguo texto se encuentra que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ y del producto A^2A^t solo se puede leer la última columna

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & -6 \\ \bullet & \bullet & 2 \\ \bullet & \bullet & -1 \end{bmatrix}$$. Hallar $x + y + z$.

23. Demostrar que la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ satisface la ecuación:

$$x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0$$

24. Demostrar que si $f(X, A) = X^t A X$, $\lambda, \beta \in \mathbf{C}$, entonces :

$$f(\lambda X + \beta Y, A) = \lambda f(X, A) + \beta f(Y, A)$$

25. Si A y B son matrices cuadradas de orden n y A posee inversa, demostrar que : $(A + B)A^{-1}(A - B) = (A - B)A^{-1}(A + B)$.

26. Si $A = BC$ y $A + B = I$, hallar $AC - C$.

27. Demostrar que la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ es periódica y hallar su período

28. Si B es la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, hallar (b_{13}) (b_{23}) (b_{34})

29. Sean las matrices $A = \begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{matrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Si $C = (AB)^t + A$, hallar la suma $S = c_{21} + c_{32} + c_{33}$.

30. Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. Hallar la suma de los componentes de la diagonal principal de la matriz A^{-1}.

31. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & a-b & -1 \\ 2 & 3 & b \\ b-x & a-x & 4 \end{bmatrix}$ es una matriz simétrica, hallar A^2

32. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ hallar A^n.

Comprobar la fórmula obtenida por inducción.

En los ejercicios 33 a 36 determinar, si existen, las inversas de las matrices dadas

33. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

35. $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

34. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

36. $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

8.11 TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

Dada una matriz de cualquier orden, se pueden desarrollar algunas operaciones simples con las filas y columnas sin cambiar el orden de la matriz. El propósito fundamental es el desarrollo de matrices para simplificar algunos cálculos y también alcanzar resultados teóricos significativos para un mejor estudio de las matrices. Destacaremos las transformaciones siguientes.

8.11.1 TRANSFORMACIONES ELEMENTALES FILA O COLUMNA

Sea $A \in \mathbf{K}^{m \times n}$ una matriz cuyas filas son $F_1, F_2, F_3, \ldots\ldots F_n$ y cuyas columnas son $C_1, C_2, C_3; \ldots\ldots C_n$. Se llama *transformación elemental* fila a tres tipos de operaciones que denotaremos por : F_{ij}, $F_i(j)$ y $F_i^j(\lambda)$ para significar

1. $F_{ij}A$: Intercambio de dos filas de A
2. $F_i(\lambda)A$: Multiplicación de la fila i de A por un escalar $\lambda \neq 0$
3. $F_i^j(\lambda)A$: Multiplicación de la fila j de A por un escalar $\lambda \neq 0$, y sumando la fila F_i. Esta operación se representa por el vector de la fila : $\lambda F_j + F_i$

Las transformaciones elementales columna son análogas a las transformaciones elementales fila y los tres tipos de operaciones se denota por

1. $C_{ij}A$: Intercambio de dos columnas de A
2. $C_i(\lambda)A$: Multiplicación de una columna i de A por un escalar $\lambda \neq 0$
3. $C_i^j(\lambda)A$: Multiplicación de la columna j de A por un escalar $\lambda \neq 0$ y sumando luego la columna C_i. Esta operación se representa por el vector columna $\lambda C_j + C_i$.

Por ejemplo, para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ se tiene :

1. Intercambio de la primera y segunda filas

$$F_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Multiplicación por -2 la segunda fila

$$F_2(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2(3) & -2(0) & -2(-4) & -2(-1) \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -6 & 0 & 8 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Multiplicando por 2 la segunda fila y luego sumando la primera fila

$$F_2^1(2) = \begin{bmatrix} 2(3)+1 & 2(0)+1 & 2(-4)+0 & 2(-1)+2 \\ 3 & 0 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

8.11.2 MATRIZ ESCALONADA

Una $A \in K^{m \times n}$, cuya estructura es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c & d & \bullet & \bullet & \bullet & x \\ 0 & 0 & 1 & e & f & \bullet & \bullet & \bullet & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \text{r filas no nulas} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \text{s filas nulas} \end{matrix}$$

se dice que es escalonada reducida si las condiciones siguientes se satisfacen.

1. El primer elemento no nulo de cada una de las r filas no nulas es la unidad
2. Si existen s filas cuyos elementos son ceros, estas se encuentran en la parte inferior de la matriz
3. En cada una de las r filas no nulas, el número de ceros que preceden a la unidad crece aritméticamente de fila a fila .
4. Todas las columnas que tiene el primer elemento diferente de cero, de alguna fila, tienen ceros en todas las posiciones restantes.

Si una matriz cumple las propiedades 1, 2, y 3, se dice que está en forma *escalonada.*

Ejemplos de matrices escalonadas reducidas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de matrices escalonadas

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.11.3 MATRICES EQUIVALENTES

Dos matrices A y B se denominan *equivalentes* si una de ellas se deduce de la otra mediante una sucesión finita de transformaciones elementales de línea (fila o columna).

El siguiente ejemplo nos muestra que toda matriz de orden m x n puede ser reducida mediante operaciones elementales fila a una matriz en forma escalonada por filas.

Ejemplo 1 Reducir a la forma escalonada por filas la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución .

$$A: \xrightarrow{F_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1^2(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1^3(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1^4(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2^4(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2^3(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3(-1/7)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3^4(3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

■

Explicación. En la primera iteración F_{12} se intercambió la segunda fila por la primera con el objeto de que aparezca el 1 en la nueva primera fila y que servirá de pivot, para que en las sucesivas iteraciones aparezcan ceros debajo del 1. Así en la segunda iteración $F_1^2(-2)$ se multiplicacó la primera fila por -2 y luego se sumo la segunda fila. En la cuarta iteración $F_1^4(-2)$ ya tenemos tres ceros debajo del 1 de la primera fila y aparece en la segunda fila (0, 1, -1) el elemento 1 que servirá de nuevo pivot para transformar en ceros los elementos que están debajo de él. La quinta y sexta iteración muestran este proceso. En la sétima iteración se multiplicó por -1/7 la tercera fila para obtener (0, 0, 1). Finalmente, mediante esta fila pivot y la octava iteración se logra ceros en la última fila.

En este ejemplo se a logrado una forma escalonada, sin embargo, la matriz equivalente B obtenida, de este modo, no es única, toda vez que es posible efectuar operaciones elementales columna y obtener otra forma escalonada.

Nota. Una matriz cuadrada $A \in K^n$ escalonada es una matriz triangular superior, pero no todas las matrices triangulares superiores son matrices escalonadas.

Anteriormente hemos visto que una matriz triangular era inversible si sólo si no existen ceros en la diagonal principal; esta característica es también válida para las matrices escalonadas cuadradas.
Veremos a continuación las ventajas que ofrece la reducción de una matriz en otra que tenga forma escalonada.

8.11.4 RANGO DE UNA MATRIZ

El rango de una matriz es igual al número de filas no nulas que quedan en la última iteración de las sucesivas transformaciones elementales que se hacen con la matriz.
Se deduce que para hallar el rango de una matriz es suficiente transformarla a su forma escalonada. Como dos matrices equivalentes tienen el mismo rango, el rango de dicha matriz será igual rango de la matriz escalonada. Si designamos por r el número de filas no nulas de la matriz escalonada, entonces el rango de la matriz se denota

$$\rho(A) = r$$

Ejemplo 2 Hallar el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Solución. Realizando sucesivamente las transformaciones elementales tendremos:

$$A: \xrightarrow{F_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1^3(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1^5(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2^5(5)]{F_2^3(11)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2^4(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

La última matriz escalonada B tiene dos filas no nulas, por lo que:

$$\rho(B) = \rho(A) = 2$$

■

Ejemplo 3 Hallar el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{bmatrix}$

Solución. Por el método de las transformaciones elementales se tiene:

$$A: \xrightarrow[F_2^3(-1)]{F_1^4(-1)} \begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_{34}]{F_1^2(-3)} \begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2^3(-1)]{F_2^1(-6)} \begin{bmatrix} 25 & 25 & 5 & 25 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3^4(-1)]{F_1(1/25)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

La última matriz escalonada tiene tres filas no nulas, por tanto

$$\rho(B) = \rho(A) = 3$$

■

8.11.5 MATRICES ELEMENTALES

La matriz que resulta de aplicar una transformación elemental de línea (fila o columna) a la matriz identidad I_n recibe el nombre de *matriz elemental de línea.* Los símbolos que se emplean para una transformación ele-

mental de línea que origina una matriz identidad se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4 Dada la matriz $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, las matrices elementales

que podemos obtener, entre otras, son:

$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Intercambio de la primera y segunda filas.

$E_3(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ Multiplición de la tercera fila de la matriz diagonal por a.

$E_3^2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Multiplicación de la tercera fila por a y sumando a la segunda fila.

Se establece la posibilidad de ejecutar, de manera indirecta, una operación elemental en las filas de una matriz de m x n si, primero, se ejecuta la misma operación en las filas de la matriz identidad I_n y, después, se premultiplica la matriz A (se multiplica a la izquierda de A) por la matriz elemental resultante. Una ilustración del enunciado anterior es el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Si la primera fila de A se suma dos vecés a la tercera fila se obtiene la matriz :

$$F_1^3(2)\,A = B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Al efectuar la misma operación en las correspondientes filas de la matriz identidad I_3, la matriz elemental resultante es:

$$E_1^3(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que : $E_1^3(2)\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} = B$ ■

El resultando anterior nos sugiere la siguiente definición.

DEFINICION 8.2 Si existe una secuencia de matrices elementales $E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots, E_m$, tales que $E_m.E_{m-1}\ldots\ldots E_2.E_1.A = B$

se dice entonces que A es *equivalente por filas* a B, y se escribe

$$A \overset{f}{\cong} B$$

Ejemplo 6 Hallar una matriz escalonada equivalente por filas a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución . Las operaciones elementales con filas que deben efectuarse son:

1. Intercambiar la primera y segunda fila

$$F_{12}: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Restar la primera fila de la tercera

$$F_1^3(-1): \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Multiplicar la segunda fila por -2 y sumar la tercera fila

$$F_1^3(-2): \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = B$$

Se tiene una matriz escalonada equivalente por filas a A.

Las matrices elementales, obtenidas de I_3, para las operaciones con filas son, respectivamente:

$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_1^3(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2^3(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Ahora bien, las operaciones para encontrar B por medio de estas matrices elementales son :

$$E_{12} \bullet A = F_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1^3(-1)\,.\,F_{12} = F_1^3(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_2^3(-2)\,.\,F_1^3(-1) = F_2^3(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = B$$

Como resulta laborioso escribir el producto de matrices correspondientes a cada operación fila, es conveniente utilizar una notación abreviada empleando una flecha, sobre el cual se indica la matriz elemental adecuada, en base a la cual, las operaciones se representan como sigue

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{12}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1^3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2^3(-2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

8.11.6 INVERSA DE UNA MATRIZ POR EL METODO DE LAS MATRICES ELEMENTALES (Método de Gauss - Jordan)

El método de Gauss - Jordan consiste en lo siguiente:

Para la matriz dada A de orden n, se construye una matriz rectangular $\Gamma A = (A \mid I)$ de orden n x 2n, añadiendo a la derecha de A una matriz unidad. Luego, haciendo uso de las transformaciones elementales sobre las filas, se reduce la matriz ΓA a la forma $(I \mid B)$, lo que es siempre posible, si A es inversible. En este caso $B = A^{-1}$. No es preciso conocer de antemano si A es inversible. Se puede deducir fácilmente si A es inversible durante las sucesivas transformaciones elementales para hallar la matriz $(I \mid B)$. Si uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz escalonada E en $(E \mid B)$ es cero, entonces A no es inversible.

Ejemplo 7 Determinar si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ es inversible.

Si así lo fuera, calcular su inversa.

Solución. Primero efectuamos las operaciones con filas para reducir A a una matriz escalonada E. Empezamos formando la matriz $\Gamma A = (A \mid I)$

$$(A \mid I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1^3(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_{23}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Como A ha sido reducida a la matriz escalonada $E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, que no tiene cero en la diagonal principal, la matriz A es inversible.

Continuando con las operaciones elementales con filas, necesarias para reducir la matriz A a la identidad, se tiene :

$$\xrightarrow{F_{23}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2^1(1/2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2(1/2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3^2(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = (I \mid B)$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ ■

Ejemplo 8 Hallar A^{-1} para la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Solución. Formamos la matriz $\Gamma A = (A \mid I)$ y empleando el método de Gauss - Jordan tendremos :

$$(A \mid I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1(1/3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F^3_1(-2)]{F_1^2(-4)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 2/3 & -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 10/3 & -2/3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2(3/7)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -4/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & -1/3 & 10/3 & -2/3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_2^3(1/3)]{F_2^1(-2/3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/7 & 5/7 & -2/7 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -4/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 24/7 & 6/7 & 1/7 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3(7/24)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/7 & 5/7 & -2/7 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -4/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_3^2(-2/7)]{F_3^1(-1/7)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ 1 & 0 & 1 & -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{array}\right) = (I \mid B)$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 18 & -7 & -1 \\ -12 & 10 & -2 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$ ■

Ejemplo 9 Determinar, si existe, la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Solución . Sea la matriz : $\Gamma A = (A \mid I) \Rightarrow (A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Usando el método de Gauss - Jordan se tiene :

$$\xrightarrow[F_1^3(1)]{F_1^2(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2^3(1)} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right.}_{E}\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como la matriz escalonada E tiene un cero en su diagonal principal, la matriz A no es inversible. ■

Ejemplo 10 Se sabe que la matriz $X = [x_{ij}]$ satisface la ecuación $AX = B$, en donde:

$$A = 2B - I = \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Mostrando en primer lugar que A es inversible, determinar los elementos x_{24} y x_{43} de la matriz X.

Solución . Para determinar si A es inversible formamos la matriz $\Gamma A = (A \mid I)$ y mediante las operaciones elementales tendremos que :

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 22 & -6 & -26 & 17 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -17 & 5 & 20 & -13 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{13}]{F_3(-1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -17 & 5 & 20 & -13 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 22 & -6 & -26 & 17 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_4^3(-5)]{F_4^2(4)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 4 & -1 & -5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1^3(-3),\ F_1^4(-4)]{F_1^2(1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2^4(1)]{F_2^3(1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3^2(2),\ F_3^4(-1)]{F_3^1(2)} \underbrace{\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right.}_{E}\left|\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

La matriz escalonada E no tiene cero en la diagonal principal, luego, la matriz A es inversible. Por lo que :

$$\xrightarrow[F_4(-1)]{F_4^1(1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) = A^{-1}$$

Multiplicando por A^{-1} ambos miembros de la ecuación dada se tiene :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

$$\text{Si } A = 2B - I \Rightarrow B = 1/2\,(A + I) = 1/2 \begin{pmatrix} 23 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 6 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Por tanto : $X_{24} = (a_{2j})^{-1} b_{i4} = 1/2\,(2, 3, 1, 2) \bullet (17, -13, -1, 4) = 1$

$X_{43} = (a_{4j})^{-1} b_{i3} = 1/2\,(1, 0, -2, -6) \bullet (-26, 20, 3, -5) = -1$ ■

Ejemplo 11 Resolver la ecuación matricial $A X B = C$, sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Solución . Multiplicando por A^{-1} (izquierda de X) ambos miembros de la ecuación matricial se tiene :

$$A^{-1}AXB = A^{-1}C \Rightarrow XB = A^{-1}C \qquad (1)$$

Multiplicando por B^{-1} (derecha de X) ambos extremos de (1) obtenemos:

$$X B B^{-1} = A^{-1} C B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} C B^{-1} \qquad (2)$$

Para hallar las inversas de A y B por el método de Gauss - Jordan, construimos las matrices rectangulares $\Gamma A = (A \mid I)$ y $\Gamma B = (B \mid I)$

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2(1/5)]{F_1(1/3)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & -2/5 & 0 & 1/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1^2(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/15 & -1/3 & 1/5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2(-15)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2^1(1/3)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(B \mid I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2(1/7)]{F_1(1/5)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 6/5 & 1/5 & 0 \\ 1 & 8/7 & 0 & 1/7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 6/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & -2/35 & -1/5 & 1/7 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2(-35/2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 6/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 7/2 & -5/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2^1(-6/5)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 7/2 & -5/2 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$

Por lo que, en (2) :

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ■

EJERCICIOS. *Grupo 46*

En los ejercicios 1 a 4, reducir cada una de las matrices a una matriz escalonada mediante una sucesión finita de operaciones elementales con filas. (Las soluciones que se dan no son únicas).

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & -5 & 10 & 0 \\ 6 & -6 & 12 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

5. Mediante una sucesión finita de operaciones elementales con filas, demostrar que:

$$\begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 \\ b & b^2 & b^3 & b^4 \\ c & c^2 & c^3 & c^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & abc \\ 0 & 1 & 0 & -(ab + bc + ca) \\ 0 & 0 & 1 & a + b + c \end{pmatrix}$$

6. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

probar que $A \overset{f}{\equiv} B$

En los ejercicios 7 a 12, hallar el rango de la matriz dada empleando el método de las transformaciones elementales.

7. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 13 a 16, resolver las ecuaciones matriciales

13. $AX = B$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

14. $XA = B$, si $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

15. $AX = B$, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

16. $XB = B$, si $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix}$

17. Hallar la matriz X que cumple la ecuación: $(X - 2I)B + 3C = D$

donde, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 \\ -1 & 2 & -10 \\ 12 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

18. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, hallar (si existe) X tal que $AXB = I$

En los ejercicios 19 a 34, hallar las inversas de las siguientes matrices, empleando el método de las transformaciones elementales.

19. $\begin{bmatrix} 1 & a & x & -z \\ 0 & 1 & b & y \\ 0 & 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 20. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ 21. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ 23. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$ 24. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

25. La matriz $X = [x_{ij}]$ satisface la ecuación $XA = B$, en donde :

$A = 7B + I = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$. Mostrar que A es inversible y hallar $x_{23} + x_{31}$.

8.12 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Recordando que la resolución de una ecuación implica la búsqueda de ecuaciones equivalentes más simples en los que resulta fácil determinar la raíz o raíces, la aplicación de este criterio a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales sugiere que, el método para hallar el conjunto solución de un sistema lineal

consiste básicamente en reemplazar el sistema dado por otro equivalente en el que se pueda calcular facilmente las raíces. En tal sentido las transformaciones elementales aplicadas a las matrices simplifican el desarrollo de estas y como tal, nos ofrecen la posibilidad de una ventajosa aplicación para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

En un sistema de la forma :

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \bullet \qquad\qquad\qquad\qquad \bullet \\ \bullet \qquad\qquad\qquad\qquad \bullet \\ \bullet \qquad\qquad\qquad\qquad \bullet \\ \bullet \qquad\qquad\qquad\qquad \bullet \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_n \end{array} \qquad (1)$$

con las constantes reales de estas ecuaciones se puede establecer el siguiente arreglo de m x n.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \bullet & \bullet & \bullet & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \bullet & \bullet & \bullet & a_{2n} \\ \bullet & \bullet & \bullet & & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & \bullet & \bullet \\ a_{m1} & a_{m2} & \bullet & \bullet & \bullet & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

al que llamaremos *matriz de coeficientes* del sistema (1).

A los vectores

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ x_n \end{bmatrix} \qquad y \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ b_n \end{bmatrix}$$

llamaremos, respectivamente, *vector columna de las incógnitas o vector solución y vector columna de los términos independientes*. Por lo que el sistema (1) se puede representar del siguiente modo:

$$AX = B$$

Al adjuntar el vector columna B a la matriz A, se determina una matriz de m x (n+1), que designaremos por A', a la cual llamaremos *matriz aumentada o ampliada* del sistema (1) y se escribirá del siguiente modo:

$$A' = \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Por ejemplo, la matriz aumentada del sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{array} \quad \text{es: } A' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Teniendo en consideración que las filas de una matriz aumentada corresponde a las ecuaciones del sistema asociado, el método para resolver el sistema, empleando matrices, se sustenta en la idea básica de reducir la matriz aumentada a la forma que sea suficiéntemente sencilla (forma escalonada reducida) como para poder alcanzar la solución del sistema por simple inspección o, en su defecto, luego de posteriores etapas que simplifiquen el problema.

Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento a seguir en la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Ejemplo 1 Suponiendo en cada uno de los casos siguientes que la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales de la forma (1) se ha llevado, mediante operaciones en las filas, a la forma escalonada reducida que se muestra a continuación, hallar la solución de los sistemas:

$$a) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \qquad b) \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

Solución .

a) El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\begin{array}{l} x_1 + x_3 = 7 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -2 \end{array}$$

Por simple inspección : $x_3 = -2$, $x_2 = 3$ y en $x_1 + x_3 = 7$, resulta $x_1 = 9$

$\therefore$ C . S = $\{ x_1, x_2, x_3 \} = \{ 9, 3, -2 \}$, o bien : $X = (9, 3, -2)^t$

b) El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_4 = 3 \\ x_2 - x_4 = -4 \\ x_3 + 5x_4 = 2 \end{array}$$

Cuando es el caso que cada una de las incógnitas x_1, x_2 y x_3 inician una ecuación, se les llama *variables principales*. Dejando estas variables principales, en términos de x_4, se obtiene

$$x_1 = 3 - 2x_4 ,\ x_2 = -4 + x_4 ,\ x_3 = 2 - 5x_4$$

Asignando a x_4 un valor arbitrario t, se tiene un número infinito de soluciones. El conjunto solución queda definido por las fórmulas:

$x_1 = 3 - 2t$, $x_2 = -4 + t$, $x_3 = 2 + 5t \Leftrightarrow X = (3 - 2t , -4 + t , 2 - 5t , t)^t$ ■

Ejemplo 2 Resolver por transformaciones elementales el sistema

$$\begin{array}{l} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = 23 \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 24 \end{array}$$

Solución. Matriz aumentada del sistema: $A' = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 2 & -2 \\ 4 & 6 & -1 & 23 \\ 2 & 7 & 4 & 24 \end{array}\right]$

Para transformar esta matriz a la forma escalonada reducida se procede del modo siguiente:

Paso 1. Localizar en el extremo izquierdo la columna que no consta exclusivamente de ceros (señalando con asterisco).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \overset{*}{2} & -5 & 2 & -2 \\ 4 & 6 & -1 & 23 \\ 2 & 7 & 4 & 24 \end{array}\right]$$

Paso 2. Intercambiar, si es necesario, la primera fila con otra fila, de tal manera que el elemento que está al comienzo de la columna señala con asterisco sea diferente de cero. (En este caso como $2 \neq 0$ no es necesario intercambiar filas).

Paso 3. Si el primer elemento de la columa señala con asterisco es *a*, entonces, multiplicar la primera fila por $1/a$, de modo que el primer elemento sea 1, esto es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 1 & | & -1 \\ 4 & 6 & -1 & | & 23 \\ 2 & 7 & 4 & | & 24 \end{pmatrix}$$

Paso 4. Sumar multiplos adecuados de la primera fila a las filas que le requieren, de tal forma que la columna señala con asterisco, todos los elementos a excepción del primero sean cero.

$$\xrightarrow[F^3_1(-2)]{F^2_1(-4)} \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 16 & -5 & | & 27 \\ 0 & 12 & 2 & | & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{F^2_3(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 4 & -7 & | & 1 \\ 0 & 12 & 2 & | & 26 \end{pmatrix}$$

Paso 5. Destacar la primera fila de la matriz con una línea de puntos y reiterar el proceso a la submatriz resultante, desde el paso 1.

Proseguir del mismo modo hasta conseguir que la matriz completa se presente en forma escalonada. Esto es:

$$\xrightarrow[F_3(1/2)]{F_2(1/4)} \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -7/4 & | & 1/4 \\ 0 & 6 & 1 & | & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{F^3_2(-6)} \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -7/4 & | & 1/4 \\ 0 & 0 & 23/2 & | & 23/2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3(2/23)} \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -7/4 & | & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F^2_3(7/4)} \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que la matriz completa a tomado la forma escalonada

Paso 6. Empezamos por la primera fila, y avanzamos hacia arriba, sumar multiplos adecuados de esta fila a las filas que están encima de ella, hasta conseguir que la matriz completa se transforme a la forma escalonada adecuada.

$$\xrightarrow{F^1_3(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F^1_2(5/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Como la última matriz tiene la forma escalonada reducida, la solución del sistema es:

$$x_1 = 3 \ , \ x_2 = 2 \ , \ x_3 = 1 \Rightarrow X = (3, 2, 1)^t$$

Nota. El procedimiento esquemático empleado para resolver un sistema de ecuaciones lineales, se conoce con el nombre de *eliminación de Gauss-Jordan.*

Ejemplo 3 Resolver mediante la eliminación de Gauss, el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 &= 10 \end{aligned}$$

Solución. La matriz aumentada del sistema es, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & | & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & | & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -5 & | & 10 \end{pmatrix}$

Siguiendo los pasos descritos en el Ejemplo 2 para transformar la matriz aumentada a la forma escalonada, se tiene:

$$\xrightarrow[F^3_1(-2)]{F^2_1(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & | & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F^3_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & | & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F^2_3(-2)]{F^1_3(4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & | & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F^1_2(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 & 0 & | & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones correspondiente a esta última matriz escalonada es:

$$\begin{aligned} x_1 \quad - 11x_3 &= 10 \\ x_2 + 4x_3 &= -2 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones para las variables principales se tiene:

$$x_1 = 10 + 11x_3 \ , \ x_2 = -2 - 4x_3 \ , \ x_4 = 0$$

Finalmente asignando un valor arbitrario t para la variable no principal x_3, esto es, $x_3 = t$, obtenemos:

$$x_1 = 10 + 11t \ , \ x_2 = -2 - 4t \ , \ x_3 = t \ , \ x_4 = 0$$

Decimos entonces que el sistema tiene un número infinito de soluciones. Por lo tanto, la notación vertical de la solución del sistema es:

$$X = (10 + 11t \ , \ -2 - 4t \ , \ t \ , \ 0)^t$$

Ejemplo 4 Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Solución . La matriz aumenmtada del sistema $A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & -12 & -11 & -16 & 5 \end{array}\right)$

Reduciendo A' a su forma escalonada se tiene:

$$\xrightarrow[F_1^3(-1)]{F_1^2(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & -10 & -12 & -12 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2^3(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

La última fila corresponde a la ecuación

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 6 \Leftrightarrow 0 = 6$$

Lo que es absurdo, por lo que, el sistema es incompatible y carece de solución. ■

OBSERVACION 8.13 Si un sistema de ecuaciones lineales no tiene soluciones se dice que el sistema es *inconsistente*. Si por lo menos hay una solución, entonces se dice que es *consistente*.

Ejemplo 5 Suponer que la dieta mínima vital es 72 unidades de proteinas, 104 unidades de carbohidratos y 88 unidades de minerales. Un nutricionista dispone empaquetados tres tipos de alimentos A, B, y C, que por paquete contienen:

	Proteinas	Carbohidratos	Minerales
A	1	2	4
B	4	4	2
C	2	4	3

Es decir, un paquete del alimento A contiene 1 unidad de proteinas, 2 de carbohidratos y 4 de minerales. Se debe entregar a cada comenzal una dieta mínima en un número entero de paquetes. ¿Cuántos paquetes de alimentos constituye la dieta mínima?

Solución . Sean x, y, z el número de paquetes de los tres tipos de alimentos A, B, y C respectivamente. Entonces, x paquetes del alimento A, 4y paque-

tes del alimento B y 2z paquetes del alimento C constituyen 72 unidades de proteinas, que se rige por la ecuación:

$$x + 4y + 2z = 72$$

Análogamente, según la tabla, planteamos el sistema de ecuaciones para carbohidratos y minerales:

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 4z &= 104 \\ 4x + 2y + 3z &= 88 \end{aligned}$$

La matriz aumentada del sistema es $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 72 \\ 2 & 4 & 4 & 104 \\ 4 & 2 & 3 & 88 \end{array}\right)$

Efectuando las transformaciones elementales por filas se tiene :

$$\xrightarrow[F_1^3(-4)]{F_1^2(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 72 \\ 0 & -4 & 0 & -40 \\ 0 & -14 & -5 & -200 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2^3(-7/2)]{F_2^1(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 32 \\ 0 & -4 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & -5 & -60 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 82 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3^1(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, la dieta mínima está constituida por 8 paquetes del tipo A, 10 paquetes del tipo B y 12 paquetes del tipo C. ■

Ejemplo 6 Una fábrica posee 5 máquinas que se utilizan en la producción de cuatro articulos diferentes A, B, C y D. El número de horas de cada máquina es usada en la producción de una unidad de cada uno de los cuatro productos es dada por la siguiente tabla:

Máquina \ Producto	A	B	C	D
1ra	7	2	4	3
2da	4	4	4	5
3ra	10	0	4	7
4ta	9	4	2	11
5ta	10	5	1	13

Hallar el número de unidades que se deben producir de cada uno de los productos en una semana de 5 días, sabiendo que cada máquina se usa 8 horas diarias.

Solución . Designemos por x_1, x_2, x_3 y x_4 el número de unidades de cada artículo A, B, C y D respectivamente, que se producen durante una semana de 5 días.

Según la tabla, la 1ra máquina dedica 7 horas en la producción de una unidad del producto A, 2 horas en la producción de una unidad del artículo B, etc. Como en una semana cada máquina trabaja 5 x 8 = 40 horas, entonces la producción semanal de la primera máquina se rige por la ecuación:

$$7x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 40$$

Dado que las máquinas deben trabajar simultáneamente, entonces la producción semanal estará dada por la solución de las 5 ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 40 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 40 \\ 10x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 7x_4 &= 40 \\ 9x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 11x_4 &= 40 \\ 10x_1 + 5x_2 + x_3 + 13x_4 &= 40 \end{aligned}$$

La matriz aumentada del sistema es $A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 2 & 4 & 3 & 40 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 40 \\ 10 & 0 & 4 & 7 & 40 \\ 9 & 4 & 2 & 11 & 40 \\ 10 & 5 & 1 & 13 & 40 \end{array}\right)$

Después de aplicar las transformaciones sucesivas : $F_3^5(-1)$, $F_4^3(-1)$, $F_1^4(-1)$, F_{13} y $F_2^3(-2)$, la matriz aumentada se reduce a:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 40 \\ -1 & -6 & -4 & -7 & -40 \\ 2 & 2 & -2 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1^4(-2)]{F_1^2(-4),\ F_1^3(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 20 & -4 & 21 & 40 \\ 0 & -10 & -2 & -11 & -40 \\ 0 & 10 & -6 & 16 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_{25}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & -10 & -2 & -11 & -40 \\ 0 & 10 & -6 & 16 & 0 \\ 0 & 20 & -4 & 21 & 40 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2^5(-4),\ F_2^1(1)]{F_2^3(2),\ F_2^4(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 40 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_4(1/4)]{F_4^5(3/4),\ F_4^3(-1/4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 40 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3(-1/8),\ F_5(1/8)]{F_2^4(-6),\ F_1^4(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3^1(1)]{F_3^5(-1),\ F_3^2(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2^1(-1)]{F_2(1/5)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De la última matriz obtenemos : $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = 0$

En consecuencia, la producción óptima semanal de la fábrica necesita que se fabrique 2 unidades del producto A, 3 del producto B, 5 del producto C y ninguno del producto D. ■

8.13 RANGO DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Sea dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas del tipo general :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n} &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned} \qquad (1)$$

o bien, en la forma matricial

$$AX = B \qquad (2)$$

donde $A = [a_{ij}]$ de orden m x n, $X = [x_i]$ de orden n x 1 y $B = [b_i]$ de orden m x 1. Se denomina solución del sistema (1) todo vector columna de n componentes de X que convierte la ecuación matricial (2) es una igualdad. Anteriormente hemos visto que un sistema se denomina *consistente o compatible*, si tiene por lo menos una solución, de lo contrario se denomina *inconsistente o incompatible*.

Para que el sistema (1) sea consistente es necesario y suficiente que se verifique :

$$\rho(A) = \rho(A')$$

donde $A' = (A|B)$ es la matriz aumnetada o ampliada del sistema (1).

Suponiendo que $\rho(A) = \rho(A') = r$, es decir, el sistema es consistente, entonces puede ocurrir.

1. Que el sistema (1) tenga una solución única. Esto sucede cuando el número de incógnitas n del sistema es igual al rango de la matriz aumentada. Esto es, si el sistema tiene n incógnitas, tendrá solución única si y sólo si

$$\rho(A) = \rho(A') = r = n$$

2. Que el sistema (1) tenga más de una solución. En este caso el número de incógnitas del sistema es mayor que el rango de la matriz aumentada. Es decir, el sistema (1) tendrá más de una solución, si y sólo si

$$\rho(A) = \rho(A') = r < n$$

Como $r < n$, entonces las $n - r$ incógnitas toman valores arbitrarios, y a los que se las denomina *valores libres o parámetros.*

Si ocurre que $\rho(A) \neq \rho(A')$, entonces el sistema (1) es inconsistente.

Ejemplo 7 Investigar la consistencia y hallar la solución del sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Solución . Reduciendo la matriz aumentada (AIB) a su forma escalonada se tiene:

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1^3(-3)]{F_1^2(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2^3(-5)]{F_2^1(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3(1/18)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = E'$$

(la parte de coeficientes de la última matriz es E)

Obsérvese que las matrices escalonadas E y E' tienen 3 filas no nulas ($r = 3$), entonces $\rho(E) = \rho(E') = 3$, y como $A \equiv E$, $A \equiv E'$, se tiene que $\rho(A) = \rho(A') = 3$, además el número de incógnitas del sistema es $n = 3$, por tanto, el sistema dado tiene solución única.

Para determinar esta solución transformamos la última matriz a su forma escalonada reducida

$$\xrightarrow[F_3^2(5)]{F_3^1(7)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow x_1 = 3 \ , \ x_2 = 2 \ , \ x_3 = 1$$

Luego, el vector columna solución es : $\mathbf{X} = (3, 2, 1)^t$ ■

Ejemplo 8 Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -1 \\ x - 3y - 2z &= 3 \\ 2x - y + z &= -2 \end{aligned}$$

Solución . Investiguemos la consistencia del sistema reduciendo la matriz aumentada (A I B) a su forma escalonada, esto es :

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1^3(-2)]{F_1^2(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3(-1/5)]{F_2(-1/5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -4/5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2^3(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 \end{array}\right) = E'$$

(la parte de coeficientes de la última matriz es E)

Dado que $\rho(E) = 2$ y $\rho(E') = 3$, entonces $\rho(E) \neq \rho(E')$. Por lo tanto, el sistema es inconsistente. ■

Ejemplo 9 Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Solución . Reduciendo la matriz aumentada (AIB) a su forma escalonada se tiene:

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 3 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1^4(-2)]{F_1^2(-3),\ F_1^3(-3)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_4(-1)]{F_2(-1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2^4(-1)]{F_2^1(-1),\ F_2^3(-1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = E'$$

(la parte de coeficientes de la última matriz es E)

Como $\rho(E) = \rho(A \mid B) \Rightarrow \rho(A) = \rho(A \mid B) = 4$, por tanto el sistema es consistente. Además $\rho(A) < n$, entonces hay más de una solución y el número de variables libres o parámetros es $p = n - r \Rightarrow p = 5 - 4 = 1$. Transformando la última matriz a su forma escalonada reducida se tiene :

$$\xrightarrow[F_4^2(-2)]{F_3(-1/10)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3^1(1)]{F_3^2(-4)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si designamos a $x_1 = s$ como la variable libre, entonces

$$2s - x_2 = -1 \;,\; x_3 = 3 \;,\; x_4 = 0 \;,\; x_5 = 0$$

Luego, el vector columna solución es $\mathbf{X} = (s,\ 2s + 1,\ 3,\ 0,\ 0)^t$ ■

Ejemplo 10 Si el sistema dado :

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z + w &= b_1 \\ x + 5y - z - 2w &= b_2 \\ -x + 2y + 2z - 3w &= b_3 \\ 3x + y - 3z + 4w &= b_4 \end{aligned}$$

es consistente, hallar $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)^t = r\mathbf{U} + s\mathbf{V}$, donde r y s son parámetros libres y **U** y **V** son matrices columnas fijas. Si elegimos $\mathbf{b} = (1, -1, -2, 3)^t$ sigue siendo el sistema consistente?

Solución . Transformando la matriz aumentada (A|B) a su forma escalonada se tiene:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & b_1 \\ 1 & 5 & -1 & -2 & b_2 \\ -1 & 2 & 2 & -3 & b_3 \\ 3 & 1 & -3 & 4 & b_4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3(-1)]{F_{13}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 3 & -b_3 \\ 1 & 5 & -1 & -2 & b_2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & b_1 \\ 3 & 1 & -3 & 4 & b_4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1^4(-3)]{F_1^2(-1),\ F_1^3(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 3 & -b_3 \\ 0 & 7 & 1 & -5 & b_2 + b_3 \\ 0 & 7 & 3 & -5 & b_1 + 2b_3 \\ 0 & 7 & 3 & -5 & b_4 + 3b_3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2^4(-1)]{F_2^3(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 3 & -b_3 \\ 0 & 7 & 1 & -5 & b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & b_1 - b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2b_3 - b_2 + b_4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3^4(-1)} \left(\underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}}_{E}\;\middle|\;\begin{array}{c} -b_3 \\ b_2 + b_3 \\ b_1 - b_2 + b_3 \\ -b_1 + b_3 + b_4 \end{array}\right) = E'$$

Vemos que $\rho(A) = \rho(E) = 3$ y $\rho(E') = 4$, luego, para que el sistema sea consistente se debe tener que $\rho(A) = \rho(A|B)$, esto es:

$$-b_1 + b_3 + b_4 = 0 \;\Rightarrow\; b_1 = b_3 + b_4$$

Por lo que: $\mathbf{b} = (b_3 + b_4,\ b_2,\ b_3,\ b_4)^t$

$$= b_2\,(0, 1, 0, 0)^t + b_3\,(1, 0, 1, 0)^t + b_4\,(1, 0, 0, 1)^t \qquad (1)$$

donde b_2, b_3 y b_4 son los parámetros libres y los vectores columna $(0, 1, 0, 0)^t$, $(1, 0, 1, 0)^t$ y $(1, 0, 0, 1)^t$ forman una base de **b**.

Dado que **b** se debe expresar como una combinación de **U** y **V**, veremos las posibilidades correctas que existe en (1) haciendo $b_2 = 0$, $b_3 = 0$ y $b_4 = 0$.

Si hacemos $b_2 = 0$, entonces : $r = b_3$ y $s = b_4$ ó $r = b_4$ y $s = b_3$.

Por lo que : $\mathbf{b} = r\mathbf{U} + s\mathbf{V} = r\,(1, 0, 1, 0)^t + s\,(1, 0, 0, 1)^t$ ó

$= s\,(1, 0, 1, 0)^t + r\,(1, 0, 0, 1)^t$

Si $b_3 = 0$ $\Rightarrow$ $r = b_2$ y $s = b_4$ ó $r = b_4$ y $s = b_2$

$\Rightarrow$ $\mathbf{b} = r\mathbf{U} + s\mathbf{V} = r\,(0, 1, 0, 0)^t + s\,(1, 0, 0, 1)^t$ ó

$= s\,(0, 1, 0, 0)^t + r\,(1, 0, 0, 1)^t$

Si $b_4 = 0$ $\Rightarrow$ $r = b_2$ y $s = b_3$ ó $r = b_3$ y $s = b_2$

$\Rightarrow$ $\mathbf{b} = r\,(0, 1, 0, 0)^t + s\,(1, 0, 1, 0)^t = s\,(0, 1, 0, 0)^t + r\,(1, 0, 0, 1)^t$

Cualquiera de las seis posibilidades es correcta, pues en cada una de ellas se cumple la relación $b_1 = b_3 + b_4$. Si elegimos $\mathbf{b} = (1, -1, -2, 3)^t$, en donde $b_1 = 1$, $b_3 = -2$ y $b_4 = 3$, vemos que también satisface dicha relación. Por lo tanto, el sistema sigue siendo consistente. ■

Ejemplo 11 Investigar la consistencia y hallar la solución general del sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 &= 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Solución . Reduciendo la matriz aumentada (A|B) a su forma escalonada se tiene:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1^4(-2)]{F_1^2(-3),\ F_1^3(-3)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_4(-1)]{F_3^2(1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3^1(-1)]{F_{24}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2^3(-1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3(-1)]{F_3^2(3)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = E'$$

Obsérvese que $\rho(E) = \rho(E') = 3 \Rightarrow \rho(A|B) = 3$, luego el sistema es consistente, Además como $n > r$, hay más de una solución y el número de variables libres o parámetros es $p = n - r = 5 - 3 = 2$.

De la última matriz obtenemos :

$$2x_1 - x_2 - x_5 = -1 \ , \ x_3 + 4x_5 = 3 \ , \ x_4 = 0$$

Si designamos por $x_1 = r$, $x_2 = s$ a las variables libres, entonces

$$2r - s - x_5 = -1 \Rightarrow x_5 = 1 + 2r - s \quad ; \quad x_3 = 3 - 4(1 + 2r - s) = -1 - 8r + 4s$$

Por lo tanto, la solución general del sistema está dada por le vector columna

$$\mathbf{X} = (r, s, -1 - 8r + 4s, 0, 1 + 2r - s)^t$$

■

Ejemplo 12 Dado el sistema :

$$\begin{aligned} x_1 + \quad\quad + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + (4a + 2)x_3 &= 1 \\ 2x_1 + ax_2 \quad + 5x_3 &= 2 \\ 3x_1 + ax_2 \quad + 7x_3 &= b \end{aligned}$$

Hallar los valores de a y b, para que el sistema tenga solución única.

Solución . Reduciendo la matriz aumentada (A|B) a su forma escalonada se tiene:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4a+2 & 1 \\ 2 & a & 5 & 2 \\ 3 & a & 7 & b \end{array}\right) \xrightarrow[F_1^4(-3)]{F_1^2(-1),\ F_1^3(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4a & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & b-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2^4(-a)]{F_2^3(-a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4a & 0 \\ 0 & 0 & 1-4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-4a^2 & b-3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3^4(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4a & 0 \\ 0 & 0 & 1-4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{array}\right) = E'$$

(la parte de coeficientes de la última matriz es E)

El sistema tendrá solución única si y sólo si $\rho(E) = \rho(E') = n = 3$.

Luego, para que $\rho(E) = 3$ se debe cumplir que $1 - 4a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm 1/2$ y para que $\rho(E') = 3$ es necesario que $b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3$. En consecuencia, el sistema tiene solución única

$$\Leftrightarrow b = 3 \ \text{ y } \ a \in \mathbf{R} - \{-1/2,\ 1/2\}$$

■

Ejemplo 13 Determinar para que valores de a y b, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= -b \\ x - 6y + az &= -10 \end{aligned}$$

según sea el caso, tiene solución única, tiene infinitas soluciones o no tiene soluciones.

Solución . Escribamos la matriz ampliada (A | B) y transformémosla a la forma escalonada.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -b \\ 1 & -6 & a & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{12}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -b \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & a & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1^3(-1)]{F_1^2(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -b \\ 0 & 5 & -5 & 1+2b \\ 0 & -5 & a-2 & b-10 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2^3(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -b \\ 0 & 5 & -5 & 1+2b \\ 0 & 0 & a-7 & 3b-9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2(1/5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -b \\ 0 & 1 & -1 & (1+2b)/5 \\ 0 & 0 & a-7 & 3b-9 \end{array}\right) = E'$$

(la parte de coeficientes de la última matriz es E)

a) Si $a \neq 7$ y $b \neq 3$, entonces : $\rho(E) = \rho(E') = n = 3$, el sistema tiene solución única.

b) Si $a \neq 7$ y $b = 3$, entonces $\rho(E) = 3$ y $\rho(E') = 2$, como $\rho(E) \neq \rho(E')$, el sistema no tiene solución (inconsistente).

c) Si $a = 7$ y $b = 3$, entonces $\rho(E) = \rho(E') = 2 < n$, luego, el sistema tiene infinitas soluciones. ■

Ejemplo 14 Una Agencia de Turismo está organizando una excursión y ha cursado una invitación a los alumnos del curso de MB2 (Matemática Básica 2), mediante las especificaciones siguientes

1. Se tienen cupos para alumnos matriculados en MB2 por primera vez (grupo A), segunda vez (grupo B), tercera vez (grupo C) y cachimbos invitados (grupo D).
2. Si participan de la excursión los cuatro podrían asistir 70 personas.
3. Si dejan de asistir los alumnos del grupo A, se podría duplicar el cupo para los del grupo B mantenimiento el resto de los cupos y podrían participar 90 personas.
4. Si dejan de asistir los alumnos del grupo C, se podría duplicar el cupo para los del grupo A, triplicar el cupo para los del grupo B, manteniendo el cupo del grupo D y en este caso podrían participar 90 personas. Se pide :
   a) Analizar la compatibilidad del sistema
   b) Calcular el mayor número de cachimbos que se pueden invitar.

Solución . Según las especificaciones de la invitación, planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= 70 \\ 0 + 2B + C + D &= 90 \\ 2A + 3B + 0 + D &= 90 \end{aligned}$$

a) Para analizar la compatibilidad del sistema debemos reducir la matriz ampliada (A|B) a su forma escalonada, esto es:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 90 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 90 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1^3(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -50 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3^1(-1)]{F_3^2(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 120 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 190 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -50 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{23}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 120 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -50 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 190 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3(1/5)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 120 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & 38 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3^1(-3)]{F_3^2(2)} \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 26 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & 38 \end{array}\right)}_{E} = E'$$

Vemos que $\rho(E) = \rho(E') = 3 \Rightarrow \rho(A) = \rho(A|B) = 3$; por lo que, el sitema es compatible o consistente, además como el número de incógnitas ($n = 4$) es mayor que el rango, entonces existe más de una solución y el número de variables libres es $p = n - r = 4 - 3 = 1$.

De la última matriz : $A + 1/5\,D = 6 \Rightarrow D = 5\,(6 - A)$

$B + 1/5\,D = 26 \Rightarrow D = 5\,(26 - B)$

$C + 3/5\,D = 38 \Rightarrow D = 5/3\,(38 - C)$

La designación de D como la variable libre permite ver claramente que

$$A \leq 6 \;,\; B \leq 26 \;,\; C \leq 38$$

b) El mayor número de cachimbos que se puede invitar ocurre cuando el grupo B deja de asistir, esto es, si $B = 0$, entonces : $D = 5\,(26 - 0) = 130$ ■

8.14 SISTEMAS HOMOGENEOS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones lineales es *homogéneo* si todos los términos constantes son cero, es decir, si el sistema tiene la forma

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

Todo sistema homogéneo de ecuaciones lineales es consistente, dado que $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$ es siempre una solución. Esta solución se conoce como *solución trivial*, si existe otras soluciones, a estas se llaman *soluciones no triviales*.

A simple vista es posible asegurar que un sistema homogéneo tiene soluciones no triviales, si es el caso que el sistema tiene más incógnitas que ecuaciones.

Ejemplo 15 Resolver el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 9x_2 + 17x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Solución . Transformando la matriz ampliada (A|0) a la forma escalonada se tiene:

$$(A\,|\,0) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -9 & 17 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1^3(-4)]{F_1^2(-3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2^3(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2^1(2)} \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{E} = E'$$

Como $\rho(E) = \rho(E') = 2$ y el número de incógnitas ($n = 4$) es mayor que el rango, entonces existe infinitas soluciones. El número de variables libres es $p = n - r = 4 - 2 = 2$.

El sistema de ecuaciones correspondientes a la matriz E' es

$$\begin{aligned} x_1 - 7x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 - 5x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Si desiganmos a las variables libres por $x_3 = t_1$ y $x_4 = t_2$, el conjunto solución del sistema es

$$x_1 = 7t_1 + t_2 \;,\; x_2 = 5t_1 + t_2 \;,\; x_3 = t_1 \;,\; x_4 = t_2$$

y la notación vectorial, solución general del sistema, está representado por el vector columna

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (7t_1 + t_2 \,,\; 5t_1 + t_2 \,,\; t_1 \,,\; t_2)^t \\ &= t_1\,(7, 5, 1, 0)^t + t_2\,(1, 1, 0, 1)^t \end{aligned}$$ ■

OBSERVACION 8.14 Sea $S \subset K^n$ un conjunto de todas las soluciones de un sistema homogéneo. Cualquier base en el conjunto S consiste de n - r vectores e_1, e_2, ... e_{n-r}. Un sistema de vectores columna $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$,

......, E_{n-r}, correspondiente al conjunto citado en la base canónica, se denimina *sistema fundamnetal de soluciones*. La solución general del sistema homogéneo tiene por expresión

$$X = t_1 E_1 + t_2 E_2 + \dots\dots\dots + t_{n-r} E_{n-r}$$

donde $t_1, t_2, \dots\dots, t_{n-r}$ son constantes arbitrarios o parámetros.

Así, de la solución general del ejemplo anterior podemos hallar el sistema fundamental de las soluciones básicas :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con la utilización del sistema fundamental, la solución general del ejemplo puede ser escrita en la forma

$$X = t_1 E_1 + t_2 E_2$$

Ejemplo 16 Resolver la ecuación matricial AX = X, donde X es una matriz columna y

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -18 \end{pmatrix}$$

Solución . Si $AX = X \Rightarrow (A - I)X = \theta$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se trata de resolver un sistema homogéneo. En este caso bastará hallar el rango de la matriz (A - I) reduciéndola a su forma escalonada, esto es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1^4(-3)]{F_1^2(-3),\ F_1^3(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_4(1/2)]{F_2(-1),\ F_3(-1/3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F^1_2(-1)]{F_2^3(-1),\ F_2^4(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E'$$

Vemos que $\rho(E') = \rho(A - I) = 2 < 4$ (número de incógnitas), por lo que el sitema tiene infinitas soluciones y existe $\rho = n - r = 4 - 2 = 2$ variables libres. De la última matriz formamos el sistema

$$x_1 - 8x_3 + 7x_4 = 0$$
$$x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0$$

Designando por $x_3 = t_1$ y $x_4 = t_2$ a las variables libres, entonces

$$x_1 = 8t_1 - 7t_2 \ , \ x_2 = 6t_1 + 5t_2$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación matricial está dada por el vector columna :

$$X = (8t_1, -7t_2, -6t_1 + 5t_2, t_1, t_2)^t$$
$$= t_1 (8, -6, 1, 0)^t + t_2 (-7, 5, 0, 1)^t$$
$$= t_1 E_1 + t_2 E_2 .$$

■

Ejemplo 17 Determinar el valor del parámetro a, para los cuales el sistema dado tiene soluciones no triviales y hállese estas soluciones

$$x_1 + a x_2 + 2x_3 = 0$$
$$4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$$

Solución . Reduciendo la matriz de los coeficientes a su forma escalonada, se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 4 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1^3(-2)]{F_1^2(-4)} \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -1-4a & -1 \\ 0 & -1-2a & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3^2(-2)} \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1-2a & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2(-1/3)} \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1-2a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2^3(2a-1)} \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & -2/3(a+1) \end{pmatrix} = E'$$

Para que el sistema tenga soluciones no triviales es necesario que $\rho(E') = 2$, ya que el número de incógnitas del sistema es n = 3. Luego, si

$$\rho(A) = 2 \rightarrow -2/3(a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow E' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2^1(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la última matriz obtenemos : $x_1 + 5/3\, x_3 = 0$, $x_2 - 1/3\, x_3 = 0$

Si designamos $x_3 = t_1$ como la variable libre, entonces:

$$x_1 = (-5/3)t_1 \ , \ x_2 = (1/3)t_1$$

$$\therefore X = t_1 (-5/3, 1/3, 1)^t = t_1 E_1$$

■

Ejemplo 18 Resolver el sistema : $X^tA = X^t$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ -1 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 8 & 5 & 14 \end{bmatrix}$$ y X es una matriz columna.

Solución . Tomando la transpuesta a cada miembro del sistema dado, se tiene :

$(X^t A)^t = (X^t)^t \Leftrightarrow (A^t - I)X = \theta$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & 6 & -5 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como se trata de un sistema homogéneo calculamos el rango de la matriz

$$A^t - I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & 6 & -5 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1^4(-3)]{F_1^2(-2),\ F_1^3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2^4(-2)]{F_2^3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2^1(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E'$$

Vemos que $\rho(E') = 2 < 4$ (número de incógnitas), entonces hay infinitas soluciones y el número de variables libres es $p = n - r = 4 - 2 = 2$.

De la matriz E' formamos el sistema : $x_1 + 2x_2 + x_4 = 0$; $-x_3 + 2x_4 = 0$

Haciendo $x_2 = t_1$ y $x_4 = t_2 \Rightarrow x_1 = -2t_1 - t_2$ y $x_3 = 2t_2$

Por lo que : $X = (-2t_1 - t_2 ,\ t_1 ,\ 2t_2 ,\ t_2)^t$

$= t_1(-2, 1, 0, 0)^t + t_2(-1, 0, 2, 1)^t = t_1\mathbf{E}_1 + t_2\mathbf{E}_2$ ■

EJERCICIOS . Grupo 47

En los ejercicios 1 al 3, suponiendo que la matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales se ha llevado, mediante transformaciones por filas, a la forma escalonada que se indica; resolver el sistema.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 4 al 9, resolver los sistemas de ecuaciones dados mediante transformaciones elementales

4. $x_1 - x_2 + x_3 = 4$
$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 = 2$

5. $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9$
$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$
$x_1 - 6x_2 - 5x_3 = -9$

6. $2x_1 + x_2 - x_3 = 5$
$x_1 + x_2 + 2x_3 = -10$
$x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -3$

7. $2x_1 + x_2 + x_3 = 8$
$8x_1 - x_2 - 3x_3 = 26$
$4x_1 + x_2 + 4x_3 = 8$

8. $5x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$
$6x_1 + x_2 - 4x_3 = 62$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 15$

9. $x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 6$
$2x_1 + 10x_2 - 40x_3 = -4$
$-4x_1 - 7x_2 + 41x_3 = -31$

En los ejercicios 10 al 16, investigar la compatibilidad y hallar, si es posible, la solución general de los sistemas dados:

10. $3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3$
$2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3$
$x_1 + x_2 - 4x_4 = -3$
$x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22$

11. $9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4$
$6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$
$3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8$

12. $x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1$
$x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 2$
$x_1 - 12x_2 - 11x_2 - 16x_4 = 5$

13. $3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2$
$7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5$
$5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3$

14. $x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -14$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 17$
$2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 18$
$2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -26$

15. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$
$2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 14$
$x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$
$3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -15$

16. $-x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4$
$2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2$
$3x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5$

En los ejercicios 17 al 20, investigar la compatibilidad y hallar la solución general de los sistemas dados.

17. $3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3$
$2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3$
$x_1 + x_2 - 4x_4 = -3$
$x_1 - x_2 - 4x_3 + 0x_4 = 22$

19. $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 5$
$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 2$
$-x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 4$
$3x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 3$

18.
$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \quad &= 4 \\ x_1 \quad - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 &= 3 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 12x_5 &= 4 \end{aligned}$$

En los ejercicios 21 al 24, investigar la consistencia y hallar la solución general en función del valor del parámetro λ.

21.
$$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 &= 1 \end{aligned}$$

23.
$$\begin{aligned} (1+\lambda)\, x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + (1+\lambda)\, x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda) x_3 &= 1 \end{aligned}$$

22.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 &= 11 \end{aligned}$$

24.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 &= 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

En los ejercicios 25 al 28, hállese el sistema fundamental de soluciones y la solución general de los sistemas dados

25.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 &= 0 \end{aligned}$$

27.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

26.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 &= 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \quad + 8x_5 &= 0 \end{aligned}$$

28.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad - 3x_4 - 2x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

29. Determinar los valores del parámetro a, para los cuales los sistemas dados tiene soluciones no triviales y hállese estas soluciones

a)
$$\begin{aligned} a^2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ ax_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 &= 0 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

30. Aclárese si las filas de cada una de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & 50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -30 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

forman un sistema fundamental de soluciones para el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 &= 0 \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 &= 0 \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Nota. Dado un sistema no homogéneo AX = B, la solución general de este sistema puede obtenerse como una suma de la solución general del correpondiente sistema homogéneo AX = 0 y una solución particular arbitraria del sistema no homogéneo. Esto es

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + t_1\mathbf{E}_1 + t_2\mathbf{E}_2 + t_3\mathbf{E}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

En los ejercicios 31 al 34, hállense las soluciones generales de los sistemas no homogéneos, haciendo uso del sistema fundamental de soluciones de los sistemas homogéneos correspondientes.

31.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2 \\ 4x_2 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 3 \end{aligned}$$

33.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 &= 1 \end{aligned}$$

32.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 1 \end{aligned}$$

34.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 &= 2 \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= -1 \end{aligned}$$

35. Una fábrica posee tres máquinas A, B y C, las cuales trabajan en un día, durante 15, 22 y 23 horas, respectivamente. Se producen tres artículos X, Y y Z en estas maquinas, en un día, como sigue : una unidad de X está en A durante 1 hora, en B durante 2 horas, en C durante 1 hora; una unidad de Y está en A durante 2 horas, en B durante 2 horas, en C durante 3 horas; una unidad Z está en A durante 1 hora, en B durante 2 horas; en C durante 2 horas. Si las máquinas se usan a máxima capacidad, durante un día, hallar el número de unidades de cada artículo que es posible producir.

9 DETERMINANTES

9.1 DEFINICION

Determinante es un número real o escalar asociado a una matriz cuadrada A, que se denota por :

$$|A| \ , \det(A) \ , \ D(A)$$

El determinante de una matriz es un sólo número real y su cálculo depende del orden de la matriz cuadrada en particular. Así, para una matriz cuadrada A de orden 2, este número se define como

$$D(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12} \qquad (I)$$

Por ejemplo, el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ es

$$D(A) = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4(2) - 1(-3) = 8 + 3 = 11$$

El cálculo del determinante de una matriz de orden 3 es un tanto más complicada, pues su valor se define como

$$D(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} - a_{31}\,a_{22}\,a_{13} - a_{32}\,a_{23}\,a_{11} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33}$$

Se calcula así : Uno de los tres sumandos que figuran en el segundo miembro con el signo más es un producto de elementos de la diagonal principal de la matriz A, cada uno de los otros sumandos es un producto de elementos situados en la paralela a dicha diagonal y un elemento opuesto del rincón de la matriz (Figura 9.1) y los sumandos que figuran en el segundo miembro con el signo menos se construye de modo igual, pero esta vez respecto a la segunda diagonal (Figura 9.2)

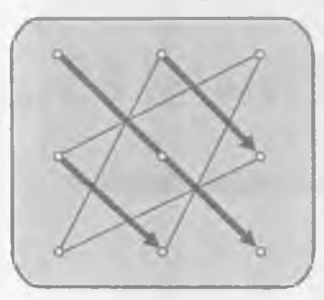


FIGURA 9.1

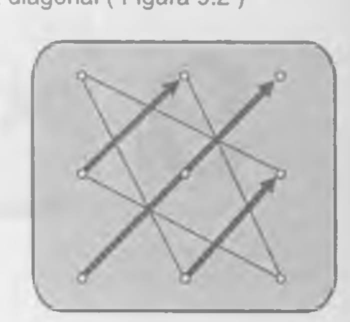


FIGURA 9.2

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & -4 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, su determinante es

$$D(A) = (2)(4)(-2) + (1)(-4)(3) + (-1)(-3)(5) - (3)(4)(5) - (-3)(-4)(2) - (-1)(1)(-2)$$

$$= -16 - 12 + 15 - 60 - 24 - 2 = -91$$

Hemos visto que el cálculo del determinante de una matriz de orden 3 se hace un tanto laborioso y podemos pensar que la obtención del determinante de una matriz de orden n ofrece ciertas dificultades; por lo que es conveniente estudiar previamente algunas propiedades del determinante considerado como una función sobre el conjunto de matrices de orden 2.

9.2 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

PROPIEDAD 1 Si A es una matriz cuadrada que tiene una linea (fila o columna) compuesto exclusivamente de ceros, entonces el determinante de la matriz es cero.

En efecto, si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow D(A) = (a_{11})(0) - (0)(a_{12}) = 0$

PROPIEDAD 2 *Paridad de las filas y columnas de un determinante.*

El valor de un determinante no varía si este se *transpone*, es decir, si se cambia cada una de sus filas por la columna del mismo número.

En efecto, sea A una matriz cuadrada y A' su transpuesta:

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow D(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

y $A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow D(A') = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$\therefore D(A) = D(A')$

PROPIEDAD 3 Si dos líneas (filas o columnas) de una matriz A son idénticas, entonces el determinante de la matriz es cero.

En efecto, si $A = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} \Rightarrow D(A) = (a)(b) - (b)(a) = 0$

PROPIEDAD 4 Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n, entonces se cumple :

a) Si B es la matriz que resulta de multiplicar una línea de A por un escalar k, entonces :

$$D(B) = kD(A)$$

En efecto, si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{22} & a_{22} \end{bmatrix}$, entonces :

$$D(B) = ka_{11}a_{22} - ka_{21}a_{12} = k(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\therefore D(B) = kD(A)$$

Según esta propiedad, un factor común de todos los elementos de una línea de un determinante puede ser separado como factor del determinante.

b) Si B es la matriz que resulta de intercambiar dos líneas de A, entonces

$$D(B) = -D(A)$$

En efecto, si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix}$, entonces :

$$D(B) = a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

$$\therefore D(B) = -D(A)$$

c) Si B es la matriz que se obtiene de A al trasladar una de sus líneas p lugares, entonces :

$$D(B) = (-1)^p D(A)$$

d) Si B es la matriz que resulta cuando un múltiplo de una línea de A se le suma a otra línea, entonces :

$$D(B) = D(A)$$

En efecto, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} \end{pmatrix}$, entonces:

$$D(B) = a_{11} a_{22} + ka_{12} a_{22} - a_{21} a_{12} - ka_{12} a_{22} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Esta propiedad es útil para calcular determinantes de matrices de cualquier orden.

e) Si los elementos de una línea de un determinante son iguales a la suma de p términos, el determinante se puede expresar como la suma de p determinantes.

En efecto : $\begin{vmatrix} a_{11} + c_{11} & a_{12} \\ a_{21} + c_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + c_{11})\, a_{22} - (a_{21} + c_{21})\, a_{12}$

$$= a_{11} a_{22} + c_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} - c_{21} a_{12}$$

$$= (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) + (c_{11} a_{22} - c_{21} a_{12})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + c_{11} & a_{12} \\ a_{21} + c_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1 Resolver la ecuación : $\begin{vmatrix} \text{Cos } 8x & \text{Sen } 5x \\ \text{Sen } 5x & \text{-Cos } 8x \end{vmatrix} = 0$

Solución . Por el desarrollo de un determinante de segundo orden se tiene :

$$\begin{vmatrix} \text{Cos } 8x & \text{Sen } 5x \\ \text{Sen } 8x & \text{-Cos } 5x \end{vmatrix} = -\text{Cos } 8x \ \text{Cos} 5x \ - \text{Sen } 8x \ \text{Sen } 5x \ = 0$$

de donde obtenemos : $\text{Cos } (8x - 5x) = 0 \iff 3x = k\pi + \pi/2$

$\iff x = \pi/6 + \pi/3k, \ k \in \mathbb{Z}$ ■

Ejemplo 2 Resolver la desigualdad : $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0$

Solución . Por desarrollo del determinante de tercer orden se tiene :

$(-3x + 2 - 4) - (-x + 2 - 12) < 0 \iff -3x - 2 + x + 10 < 0$

$\iff -2x + 8 < 0$

$\iff x > 4 \Rightarrow x \in \langle 4, +\infty \rangle$ ■

Ejemplo 3 Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$

donde $\varepsilon = \text{Cos } (2\pi/ 3) + i \text{ Sen } (2\pi/ 3)$

Solución . $D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix} = (1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4) - (\varepsilon^3 + 1 + \varepsilon^3)$

$$= \varepsilon^4 - 2\varepsilon^3 + \varepsilon^2 = (\varepsilon^2 - \varepsilon)^2$$

$\varepsilon^2 = (\text{Cos } 2/3\,\pi + i \text{ Sen } 2/3\,\pi)^2 = \text{Cos } 4/3\,\pi + i \text{ Sen } 4/3\,\pi = -1/2 - i\sqrt{3}/2$

$\varepsilon = \text{Cos } 2/3\,\pi + i \text{ Sen } 2/3\,\pi = -1/2 + i(\sqrt{3}/2) \Rightarrow \varepsilon^2 - \varepsilon = -\sqrt{3}\, i$

$$\therefore D(A) = (-\sqrt{3}\, i)^2 = 3 i^2 = -3$$ ■

Ejemplo 4 Hallar el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Solución . Haciendo uso de las propiedades 4e y 3 se tiene

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2+1 \\ 4 & 5 & 5+1 \\ 7 & 8 & 8+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} 1 & 1+1 & 1 \\ 4 & 4+1 & 1 \\ 7 & 7+1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 7 & 7 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore D(A) = 0$$ ■

Ejemplo 5 Demostrar la identidad :

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Demostración . Sumando la segunda columna a la primera se tiene :

$$\begin{vmatrix} 2a_1 & a_1 - b_1x & c_1 \\ 2a_2 & a_2 - b_2x & c_2 \\ 2a_3 & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_1 & c_1 \\ 2a_2 & a_2 & c_2 \\ 2a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a_1 & -b_1x & c_1 \\ 2a_2 & -b_2x & c_2 \\ 2a_3 & -b_3x & c_3 \end{vmatrix}$$

Por la propiedad 3, el primer determinante es cero. Del segundo determinante extraemos los factores 2 y -x de la primera y segunda columnas respectivamente, y obtenemos :

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ■

Ejemplo 6 Demostrar que el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{bmatrix}$ se divide por x - y , x - z , z - y.

Demostración . Bastará probar que el D(A) tiene como factores a x-y, x-z y z-y. En efecto, efectuando las operaciones $C_1 - C_2$ y $C_2 - C_3$, obtenemos:

$$D(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-y & y-z & z \\ x^2 - y^2 & y^2 - z^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x - y)(y^2 - z^2) - (x^2 - y^2)(y - z)$$

$$= (x - y)(y - z)(y + z) - (x + y)(x - y)(y - z)$$

$$= (x - y)(y - z)\,[(y + z) - (x + y)]$$

$$= (x - y)(y - z)(z - x)$$ ■

Ejemplo 7 Hallar el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 28 & 25 & 38 \\ 42 & 38 & 65 \\ 56 & 47 & 83 \end{bmatrix}$

Solución . La primera columna (C_1) admite el factor 14, luego, por la propiedad 4a, se tiene :

$$D(A) = 14 \begin{vmatrix} 2 & 25 & 38 \\ 3 & 38 & 65 \\ 4 & 47 & 83 \end{vmatrix}$$

Haciendo uso de la propiedad 4d realizamos las siguientes operaciones con las columnas : $-12\,C_1 + C_2$ y $-14C_1 + C_3$

$$D(A) = 14 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 8 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2C_2 + C_1} D(A) = 14 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 8 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

Finalmente, por el desarrollo del determinante de tercer orden obtenemos :

$$D(A) = 14 (0 + 0 + 48 - 0 - 0 + 7) = 770$$ ■

EJERCICIOS . *Grupo 48*

En los ejercicios 1 al 6, calcular el determinante de tercer orden

1. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} \text{Sen}\,\alpha & \text{Cos}\,\alpha & 1 \\ \text{Sen}\,\beta & \text{Cos}\,\beta & 1 \\ \text{Sen}\,\gamma & \text{Cos}\,\gamma & 1 \end{vmatrix}$ **5.** $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\delta \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\delta \\ \alpha\delta & \beta\delta & \delta^2+1 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} \text{Sen}^2\alpha & 1 & \text{Cos}^2\alpha \\ \text{Sen}^2\beta & 1 & \text{Cos}^2\beta \\ \text{Sen}^2\delta & 1 & \text{Cos}^2\delta \end{vmatrix}$

7. Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{bmatrix}$

si $\varepsilon = \text{Cos}\,(4\pi/3) + i\,\text{Sen}\,(4\pi/3)$.

8. Resolver las ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0$

9. Resolver la desigualdad : $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$

10. Demostrar que : $\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

11. Demostrar que : $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

(Sugerencia : Muéstrese que la última columna del determinante de partida puede ser representada en la forma

$$\begin{pmatrix} a^3 \\ b^3 \\ c^3 \end{pmatrix} = (a + b + c) \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix} - (ab + ac + bc) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + abc \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y hágase uso de esta representación).

12. Demostrar que el determinante $\begin{vmatrix} x & y & x + y \\ y & x + y & x \\ x + y & x & y \end{vmatrix}$ se divide por $x + y$ y $x^2 - xy + y^2$

13. Constrúyase la gráfica de la función : $y = \dfrac{1}{b - a} \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix}$, $a \neq b$

En los ejercicios 14 al 19, usando propiedades, calcular el valor de cada determinante.

14. $\begin{vmatrix} 24 & 8 & 32 \\ 47 & 15 & 59 \\ 53 & 17 & 65 \end{vmatrix}$ **16.** $\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix}$ **18.** $\begin{vmatrix} 108 & 142 & 42 \\ 128 & 153 & 53 \\ 138 & 164 & 64 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 35 & 37 & 34 \\ 23 & 26 & 25 \end{vmatrix}$ **17.** $\begin{vmatrix} 66 & 18 & 21 \\ 42 & 14 & 16 \\ 75 & 23 & 25 \end{vmatrix}$ **19.** $\begin{vmatrix} 245 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

En los ejercicios 20 al 25, utilizando propiedades, demuéstrece las identidades dadas.

20. $\begin{vmatrix} x & a & 1 \\ a & x & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = (x - a)(x - b)$ **21.** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a - b)(b - c)(c - a)$

22. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a)$

23. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab + ac + bc)(a - b)(b - c)(c - a)$

24. $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab + bc + ca) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} an + b & np + q & nx + y \\ bn + c & nq + r & ny + z \\ cn + a & nr + p & nz + x \end{vmatrix} = (1 + n^3) \begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$

9.3 EXISTENCIA DE LOS DETERMINANTES

Para demostrar la existencia de los determinantes definidos sobre el conjunto de matrices cuadradas de orden n, K^n , introduciremos la idea de *sub matriz*, que anotaremos del siguiente modo : Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de orden n x m, sea A_{ij} la sub matriz de orden (n - 1) x (n - 1) que se obtiené de A al eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna.

Veremos inicialmente el caso de los determinantes de las matrices de tercer orden.

Sea la matriz : $A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Las sub matrices correspondientes a la primera columna vienen dadas por

$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ (Matriz obtenida al eliminar la primera fila y la primera columna)

$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ (Matriz obtenida al eliminar la segunda fila y la primera columna)

$A_{31} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ (Matriz obtenida al eliminar la tercera fila y la primera columna)

Ahora bien, definimos el determinante de la matriz A mediante la fórmula:

$$D(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix} \quad (2)$$

Donde cada término de la suma es el producto de un elemento de la primera columna de la matriz por el determinante de la matriz de segundo orden que se obtiene al eliminar la fila i y la primera columna, anotando el signo correspondiente a este término.

La suma que define una función determinante sobre el conjunto de las matrices cuadradas de tercer orden se puede escribir como :

$$D(A) = a_{11}\, D(A_{11}) - a_{21}\, D(A_{21}) + a_{31}\, D(A_{31}) \quad (3)$$

Ejemplo 1 Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

***Solución*.** Haciendo uso de la fórmula (3) se tiene :

$$D(A) = 2\,D(A_{11}) - 1\,D(A_{21}) + 5\,D(A_{31})$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(5-8) - (5+12) + 5\,(2+3) = 2$$ ■

La fórmula (3) tiene múltiples generalizaciones, por lo que su discusión requiere el establecimiento de nuevos conceptos y la introducción de una terminología apropiada.

9.3.1 MENOR DE UNA COMPONENTE

Si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces el menor del elemento a_{ij} se denota por M_{ij} y se define como el determinante de la sub matriz (n-1) x (n-1) de A que se forma supriminedo todos los elementos de la fila i y todos los elementos de la columna j.

OBSERVACION 9.1 De una matriz de orden m x n se puede formar $C^k_m \cdot C^k_n$ menores de orden k, y de las matrices cuadradas de orden n se puede formar $C^k_n \cdot C^k_n$ menores que k.

C^k_n es el número de combinaciones de n objetos tomados de k en k, y se calcula por la fórmula :

$$C^k_n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Asi, para la matriz del ejemplo 1, se puede formar $C^2_3 \cdot C^2_3 = 3 \times 3 = 9$ menores de segundo orden

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

9.3.2 COFACTOR DE UNA COMPONENTE

El cofactor de una componente a_{ij}, denota por A_{ij}, está definido por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\,(M_{ij})$$

Es decir, el cofactor de la componente a_{ij} es el menor M_{ij} con el signo prefijado $(-1)^{i+j}$

Por ejemplo, para la matriz de tercer orden, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, los menores y cofactores correspondientes a las componentes de la primera fila son, respectivamente:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}, \quad A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Como se puede observar, los signos de cada cofactor está configurado de la siguiente manera :

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Ahora bien, la fórmula (3) :

$$D(A) = a_{11} D(A_{11}) - a_{21} D(A_{21}) + a_{31} D(A_{31})$$

establece que el determinante de la matriz A es el producto interno de los vectores

$$(a_{11}, a_{21}, a_{31}) \bullet [(-1)^{1+1} D(A_{11}),\ (-1)^{2+1} D(A_{21}),\ (-1)^{3+1} D(A_{31})]$$

donde los elementos del primer vector, son los elementos de la primera columna de A y los elementos del segundo vector son los cofactores de los elementos correspondientes a la primera columna de A. Es evidente que este resultando es cierto para cualquier fila o columna de A. Podemos afirmar entonces que, el determinante de una matriz 3 x 3 se puede obtener de 6 maneras diferentes, al tomar las componentes de cualquier fila o columna de la matriz y multiplicar cada una de estas componentes por su cofactor y sumando los resultados.

Enseguida una generalización para determinantes de matrices de n x n en términos de determinantes de matrices (n - 1) x (n - 1).

Para cada $1 < i < n$ y cada $1 < j < n$, se define:

$$D(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} D(A_{1j}) + (-1)^{2+j} a_{2j} D(A_{2j}) + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} D(A_{nj})$$

(Desarrollo por cofactores a lo largo de la j-ésima columna)

Haciendo uso de la anotación correspondiente a las sumatorias para los que i varía de 1 a n, se tiene

$$D(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij}) \qquad (4)$$

Del mismo modo, se tiene que :

$$D(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} D(A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} D(A_{i2}) + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} D(A_{in})$$

(Desarrollo por cofactores a lo largo de la i-ésima fila)

Expresando en forma de sumatoria, en las que j varía de 1 a n, se tiene :

$$D(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij}) \qquad (5)$$

Cada una de las sumas (4) es el producto escalar de una columna de A con el vector cuyos elementos son los cofactores asociados.

Cada una de las sumas (5) es el producto escalar de una fila de A con el correspondiente vector cofactor.

Las fórmulas (4) y (5) reciben el nombre de *expansión o desarrollo de un determinante por menores.*

Ejemplo 2 Hallar el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ de dos formas distintas.

Solución . Aplicando la expansión por la primera columna, para j = 1, en la fórmula (4), se tiene :

$$D(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} D(A_{i1})$$

$$\Rightarrow D(A) = (-1)^{1+1} a_{11} D(A_{11}) + (-1)^{2+1} a_{21} D(A_{21}) + (-1)^{3+1} a_{31} D(A_{31})$$

$$= 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(21 - 4) - (-7-20) + 3(-1 -15) = 13$$

Aplicando la expansión por la primera fila, para i = 1 en la fórmula (5), se tiene:

$$D(A) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} D(A_{1j})$$

$$\Rightarrow D(A) = (-1)^{1+1} a_{11} D(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} D(A_{12}) + (-1)^{1+3} a_{13} D(A_{13})$$

$$= 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2\ (21 - 4) + (7 - 3) + 5\ (4 - 9) = 13$$

■

Ejemplo 3 Calcular el determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Solución . Para aprovechar los ceros en la cuarta fila, debemos usar el desarrollo por filas (5), para i = 4, esto es :

$$D(A) = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{4+j} a_{4j} D(A_{4j})$$

Como $a_{42} = a_{43} = 0 \Rightarrow D(A) = (-1)^{4+1} a_{41} D(A_{41}) + (-1)^{4+4} a_{44} D(A_{44})$

$$= -2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Desarrollando el $D(A_{41})$ por los cofactores de su segunda fila y el $D(A_{44})$, por los cofactores de su segunda columna, obtenemos

$$D(A_{41}) = 2\ (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-2-3) = -10$$

$$D(A_{44}) = -1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\ (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

Por lo que, en (1) se tiene : $D(A) = -2(-10) + 2(-6) = 8$ ■

EJERCICIOS . *Grupo 49*

En los ejercicios 1 al 12, empleando desarrollos adecuados por filas o columnas, calcular el determinante de cada una de las matrices dadas.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 9. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ 11. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ 12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 13 al 15, para las matrices A, formar la matriz $A - xI$, luego, determinar los valores de x que satisfacen la condición $D(A - xI) = 0$

13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 14. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

En los ejerciciosn16 y 17, calcular las determinantes, desarrollándolos por la tercera fila y segunda columna, respectivamente.

16. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ 17. $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$

En los ejercicios 18 al 20, evalúese los determinantes

18. $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ 19. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$

9.4 CALCULO DE DETERMINANTES DE CUALQUIER ORDEN

El cálculo del determinante de una matriz de orden n se basa en el *método de reducción del orden* del determinante mediante el uso de la propiedad 4d. Los pasos a seguir son los siguientes:

Paso 1 . Elegir como *línea pivot* una fila o columna y destacar con un asterisco.

Paso 2 . Haciendo uso de la propiedad 4d, se multiplica cada elemento de la línea pivot por un número tal que al sumar el resultado con el elemento correspondiente de otra línea, se obtenga por lo menos un elemento igual a cero.

Las anotaciones que se destacan en este paso son, por ejemplo :

$$a\,F_1 + F_2 \qquad o \qquad a\,C_1 + C_2$$

que indican lo siguiente : Los elementos de la fila o columna 1 se multiplicó por el factor *a* y el resultado se sumó a los elementos de la fila o columna 2.

Paso 3 . Se repite el paso 2 tantas veces como sea necesario hasta tener un determinante equivalente en que todos los elementos de una misma línea, excepto uno, sean cero.

Paso 4 . Se desarrolla el determinante obtenido en el paso 3 con respecto de la línea que tiene sus elementos igual a cero, con excepción de uno de ellos, obteniendo asi un solo determinante de orden n -1.

Paso 5 . Se repite el procedimiento hasta obtener un determinante de orden 2 .

Ejemplo 1 Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 3 \\ 4 & -2 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

Solución. Factorizando 2 de la primera y tercera filas se tiene

$$D(A) = (2)(2)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 8 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{2C_1 + C_2} \\ \xrightarrow{-3C_1 + C_3} \\ \xrightarrow{-1C_1 + C_4} \end{matrix} D(A) = 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la primera fila se tiene

$$D(A) = 4\begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2F_2 + F_3} 4\begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ -5 & 10 & 3 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la tercera columna obtenemos :

$$D(A) = 4(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} = -4(70 - 10) \Rightarrow D(A) = -240$$ ■

Ejemplo 2 Si $A = \begin{pmatrix} k-1 & 3 & -3 \\ -3 & k+5 & -3 \\ -6 & 6 & k-4 \end{pmatrix}$, hallar los valores de k de modo que D(A) = 0.

Solución. $D(A) = \begin{vmatrix} k-1 & 3 & -3 \\ -3 & k+5 & -3 \\ -6 & 6 & k-4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{C_2 + C_1} \\ \xrightarrow{C_2 + C_3} \end{matrix} \begin{vmatrix} k+2 & 3 & 0 \\ k+2 & k+5 & k+2 \\ 0 & 6 & k+2 \end{vmatrix}$

Factorizamos k + 2 de la primera y tercera columnas y obtenemos

$$D(A) = (k+2)^2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & k+5 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{-3C_1 + C_2} = (k+2)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la primera fila se tiene

$$D(A) = (k+2)^2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} k+2 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (k+2)^2(k-4)$$

Luego, si $D(A) = 0 \Rightarrow (k+2)^2(k-4) = 0 \Leftrightarrow k = -2$ ó $k = 4$ ■

Ejemplo 3 Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0$

Solución. De la propiedad 4e, se sigue que:

$$\begin{vmatrix} 15 & 11 & 10 \\ 11 & 17 & 16 \\ 7 & 14 & 13 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 2 & 11 & 10 \\ 3 & 17 & 16 \\ 1 & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0$$

Efectuando las operaciones, en el primer determinante : $-C_3 + C_1$, $-C_3 + C_2$ y en el segundo determinante :$-C_3 + C_2$; resulta que

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 10 \\ -5 & 1 & 16 \\ -6 & 1 & 13 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 16 \\ 1 & 1 & 13 \end{vmatrix} = 0 \begin{matrix} \xrightarrow{-5C_2 + C_1} \\ \xrightarrow{-10C_2 + C_3} \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -10 & 1 & 6 \\ -11 & 1 & 3 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando ambos determinantes por los cofactores de la primera fila se tiene :

$$1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -10 & 6 \\ -11 & 3 \end{vmatrix} - x(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -(-30 + 66) + x(3 + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 4$$ ■

Ejemplo 4 Hallar el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x-4a & 2a-18x & 4x-4a \\ x-4b & 2b-18y & 4y-4b \\ x-4c & 2c-18z & 4z-4c \end{pmatrix}$$

Solución. Factorizando 2 y 4 de la segunda y tercera columnas respectivamente, se tiene:

$$D(A) = 8\begin{vmatrix} x-4a & a-9x & x-a \\ x-4b & b-9y & y-b \\ x-4c & c-9z & z-c \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{-C_3 + C_1} \\ \xrightarrow{-C_3 + C_2} \end{matrix} = 8\begin{vmatrix} -3a & -8x & x-a \\ -3b & -8y & y-b \\ -3c & -8z & z-c \end{vmatrix}$$

Factorizamos -3 y -8 de la primera y tercera columnas respectivamente, y obtenemos:

$$D(A) = 8(-3)(-8)\begin{vmatrix} a & x & x-a \\ b & y & y-b \\ c & z & z-c \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 + C_3} = 192\begin{vmatrix} a & x & x \\ b & y & y \\ c & z & z \end{vmatrix}$$

Luego, por la Propiedad 3: $D(A) = 192(0) = 0$ ■

Ejemplo 5 Descomponer en factores el determinante de $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$

Solución. Factorizando a, b y c de la primera, segunda y tercera columnas respectivamente, obtenemos:

$$D(A) = abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[-C_3 + C_2]{-C_3 + C_1} = abc\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-c & b-c & c \\ a^2-c^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la primera fila resulta :

$$D(A) = abc\,(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a-c & b-c \\ (a+c)(a-c) & (b+c)(b-c) \end{vmatrix}$$

$$\therefore D(A) = abc\,(a-c)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+c & b+c \end{vmatrix} = abc\,(a-c)(b-c)(b-a)$$ ■

Ejemplo 6 Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$ y $A = \begin{pmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{pmatrix}$, hallar D(A)

Solución. En el determinante de A efectuamos la operación: $-C_2 + C_1$

$$\Rightarrow D(A) = \begin{vmatrix} b-a & c+a & a+b \\ q-p & r+p & p+q \\ y-x & z+x & x+y \end{vmatrix} \xrightarrow[C_1 + C_3]{C_1 + C_2} = \begin{vmatrix} b-a & b+c & 2b \\ q-p & q-r & 2q \\ y-x & y+z & 2y \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} b-a & b+c & b \\ q-p & q+r & q \\ y-x & y+z & y \end{vmatrix} \xrightarrow[-C_3 + C_2]{-C_3 + C_1} = 2\begin{vmatrix} -a & c & b \\ -p & r & q \\ -x & z & y \end{vmatrix}$$

Factorizando -1 de la primera columna y por la propiedad 4b, se tiene:

$$D(A) = 2(-1)(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2(5) = 10$$ ■

Ejemplo 7 Si $A = \begin{pmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-x-z & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{pmatrix}$, calcular D(A).

Solución. En el determinante de A efectuamos las operaciones : $-C_1 + C_2$, $-C_1 + C_3$

$$\Rightarrow D(A) = \begin{vmatrix} x-y-z & x+y+z & x+y+z \\ 2y & -x-y-z & 0 \\ 2z & 0 & -x-y-z \end{vmatrix}$$

Factorizando $x + y + z$ de la segunda y tercera columna se tiene :

$$D(A) = (x+y+z)^2\begin{vmatrix} x-y-z & 1 & 1 \\ 2y & -1 & 0 \\ 2z & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 + F_3} = (x+y+z)^2\begin{vmatrix} x-y-z & 1 & 1 \\ 2y & -1 & 0 \\ x-y+z & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la tercera columna obtenemos :

$$D(A) = (x+y+z)^2\,(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2y & -1 \\ x-y+z & 1 \end{vmatrix} = (x+y+z)^3$$ ■

Ejemplo 8 Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} b+c & a & a \\ b & a+c & b \\ c & c & a+b \end{pmatrix}$

Solución. Sumando la segunda y tercera filas a la primera fila se tiene :

$$D(A) = \begin{vmatrix} 2(b+c) & 2(a+c) & 2(a+b) \\ b & a+c & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

Factorizando 2 de la primera fila y luego efectuando las operaciones elementales fila: $-F_2 + F_1$ y $-F_2 + F_3$, obtenemos

$$D(A) = 2\begin{vmatrix} c & 0 & a \\ b & a+c & b \\ c-b & -a & a \end{vmatrix} \xrightarrow{-F_1 + F_2} = 2\begin{vmatrix} c & 0 & a \\ b & a+c & b \\ -b & -a & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la primera fila se tiene :

$$D(A) = 2c \begin{vmatrix} a+c & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} + 2a \begin{vmatrix} b & a+c \\ -b & -a \end{vmatrix}$$

$$= 2c\,(0 + ab) + 2a\,(-ab + ab + bc) = 4abc \qquad ■$$

Ejemplo 9 Factorizar el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}$

Solución . Efectuando las operaciones $C_1 - C_2$ y $C_2 - C_3$, se tiene:

$$D(A) = \begin{vmatrix} x-y & y-z & z \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2 \\ yz-xz & xz-xy & xy \end{vmatrix}$$

Factorizando $x - y$ e $y - z$ de la primera y segunda columnas respectivamente, resulta

$$D(A) = (x-y)(y-z) \begin{vmatrix} 1 & 1 & z \\ x+y & y+z & z^2 \\ -z & -x & xy \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \underrightarrow{-C_1 + C_2} \\ \underrightarrow{-z\,C_2 + C_3} \end{matrix}$$

$$= (x-y)(y-z) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & z-x & -yz \\ -z & z-x & xy+xz \end{vmatrix} = (x-y)\,(y\ z) \begin{vmatrix} z-x & -yz \\ z-x & xy+xz \end{vmatrix}$$

$$= (x-y)\,(y-z)\,(z-x) \begin{vmatrix} 1 & -yz \\ 1 & xy+xz \end{vmatrix} = (x-y)\,(y-z)\,(z-x)\,(xy+xz+yz) \qquad ■$$

Ejemplo 10 Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} \text{Sen } x \text{ Cos } y & \text{Cos } x \text{ Cos } y & \text{Sen } y \\ -\text{Cos } x \text{ Cos } y & \text{Sen } x \text{ Cos } y & \text{Sen } y \\ -\text{Cos } y & -\text{Cos } y & 1 \end{bmatrix}$

calcular el determinante de A para $x = y = \pi / 6$

Solución . Factorizando Cosy de la primera y segunda columnas se tiene

$$D(A) = \text{Cos}^2 y \begin{vmatrix} \text{Sen } x & \text{Cos } x & \text{Sen } y \\ -\text{Cos } x & \text{Sen } x & \text{Sen } y \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \underrightarrow{C_3 + C_1} \\ \underrightarrow{C_3 + C_2} \end{matrix}$$

$$= \text{Cos}^2 y \begin{vmatrix} \text{Sen } x+\text{Sen } y & \text{Cos } x+\text{Sen } y & \text{Sen } y \\ -\text{Cos } x+\text{Sen } y & \text{Sen } x+\text{Sen } y & \text{Seny} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \text{Cos}^2 y \begin{vmatrix} \text{Sen } x+\text{Sen } y & \text{Cos } x+\text{Sen } y \\ -\text{Cos } x+\text{Sen } y & \text{Sen } x+\text{Sen } y \end{vmatrix} = \text{Cos}^2 y\,(1+2 \text{ Sen } x \text{ Sen } y)$$

Luego, para $x = y = \pi / 6 \Rightarrow D(A) = (\sqrt{3} / 2)^2\,[1+2\,(1/2)\,(1/2)] = 9/8$ ■

Ejemplo 11 Si $A = \begin{bmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{bmatrix}$, factorizar el D(A).

Solución . Efectuando las operaciones $C_2 - C_1$ y $C_3 - C_1$, se tiene:

$$D(A) = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 \\ b^2 & (c+a)^2-b^2 & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b)^2-c^2 \end{vmatrix}$$

Factorizando $a + b + c$ de la segunda y tercera columnas resulta :

$$D(A) = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a-b-c & a-b-c \\ b^2 & c+a-b & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix} \quad \underrightarrow{F_1 - (F_2 + F_3)}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 2bc & -2c & -2b \\ b^2 & c+a-b & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix}$$

(Factorizamos 2 de la primera fila y bc de la de la primera columna)

$$= 2bc(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ b/c & c+a-b & 0 \\ c/b & 0 & a+b-c \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \underrightarrow{c\,C_1 + C_2} \\ \underrightarrow{bC_1 + C_3} \end{matrix}$$

$$= 2bc(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b/c & a+c & b^2/c \\ c/b & c^2/b & a+b \end{vmatrix} = 2bc\,(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+c & b^2/c \\ c^2/b & a+b \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ D(A) = 2bc\,(a+b+c)^2\,\left[(a+c)\,(a+b) - bc\right] = 2abc\,(a+b+c)^3 \qquad ■$$

Ejemplo 12 Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1-i & 2+i \\ 1+i & 0 & 3+2i \\ 2+i & 3-2i & 0 \end{bmatrix}$

Solución . Multiplicando la segunda fila por 1-i y la tercera fila por 2-i, se tiene:

$$(1-i)(2-i)D(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1-i & 2+i \\ 2 & 0 & 5-i \\ 5 & 4-7i & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2F_2+F_3} \begin{vmatrix} 0 & 1-i & 2+i \\ 2 & 0 & 5-i \\ 1 & 4-7i & -10+2i \end{vmatrix}$$

Efectuando la operación $-2F_3 + F_2$, obtenemos.

$$(1-i)(2-i)D(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1-i & 2+i \\ 0 & -8+14i & 25-5i \\ 1 & 4-7i & -10+2i \end{vmatrix}$$

Fiinalmente, desarrollando por los cofactores de la primera columna resulta :

$$(1-i)(2-i)D(A) = \begin{vmatrix} 1-i & 2+i \\ -8+14i & 25-5i \end{vmatrix}$$

$$= (1-i)(25-5i) - (-8+14i)(2+i) = 50(1-i)$$

$$\therefore D(A) = \frac{50}{2-i} = \frac{50(2+i)}{4-i^2} = 10(2+i) \quad ■$$

Ejemplo 13 Si $A = \begin{bmatrix} 0 & x & y & 0 \\ x & 1 & 0 & y \\ y & 0 & 1 & x \\ 0 & x & y & 1 \end{bmatrix}$, calcular D(A)

Solución . Tomando la cuarta columna como línea pivot, efectuamos las operaciones elementales : $-x\,C_4 + C_2$ y $-y\,C_4 + C_3$

$$D(A) = \begin{vmatrix} 0 & x & y & 0 \\ x & 1-xy & -y^2 & x \\ y & -x^2 & 1-xy & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ x & 1-xy & -y^2 \\ y & -x^2 & 1-xy \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la primera fila obtenemos

$$D(A) = -x \begin{vmatrix} x & -y^2 \\ y & 1-xy \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} x & 1-xy \\ y & -x^2 \end{vmatrix} = -x(x - x^2y + y^3) + y(-x^3 - y + xy^2)$$

$$\therefore D(A) = -(x^2 + y^2) \quad ■$$

Ejemplo 14 Evaluar el determinante de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b+c & a & a \\ 1 & b & c+a & b \\ 1 & c & c & a+b \end{bmatrix}$

Solución . Tomando la cuarta columna como línea pivot, realizamos las operaciones : $-C_4 + C_2$ y $-C_4 + C_3$

$$\Rightarrow D(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & b+c-a & 0 & a \\ 1 & 0 & a+c-b & b \\ 1 & c-a-b & c-a-b & a+b \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la primera fila obtenemos

$$D(A) = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & b+c-a & 0 \\ 1 & 0 & a+c-b \\ 1 & c-a-b & 0 \end{vmatrix} = -(-1)^{2+3}(a+c-b) \begin{vmatrix} 1 & b+c-a \\ 1 & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\therefore D(A) = (a-b+c)\,[(c-a-b) - (b+c-a)] = -2b\,(a-b+c) \quad ■$$

Ejemplo 15 Si $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$, descomponer en factores el D(A).

Solución . Tomando la cuarta columna como línea pivot, efectuamos las operaciones : $-a\,C_4 + C_1$, $-C_4 + C_2$, $-C_4 + C_3$

$$\Rightarrow D(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & 1 \\ 1-a & 0 & a-1 & 1 \\ 1-a^2 & 1-a & 1-a & a \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \\ 1-a^2 & 1-a & 1-a \end{vmatrix}$$

Factorizando (1-a) de la primera, segunda y tercera columnas, se tiene :

$$D(A) = -(1-a)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1+a & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} D(A) = (a-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2+a & 1 & 0 \\ 1+a & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow D(A) = (-1)^{3+3}(a-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2+a & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^3(1+2+a) = (a+3)(a-1)^3 \quad ■$$

Ejemplo 16 Si $A = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, calcular el determinante de A.

Solución . Tomando la cuarta fila como línea pivot efectuamos las operaciones elementales : $-F_4 + F_1, -F_4 + F_2, -F_4 + F_3$

$$\Rightarrow D(A) = \begin{vmatrix} a^3-1 & 3a^2-3 & 3a-3 & 0 \\ a^2-1 & a^2+2a-3 & 2a-2 & 0 \\ a-1 & 2a-2 & a-1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3-1 & 3(a^2-1) & 3(a-1) \\ a^2-1 & (a-1)(a+3) & 2(a-1) \\ a-1 & 2(a-1) & a-1 \end{vmatrix}$$

Factorzando (a-1) de la primera, segunda y tercera columnas obtenemos

$$D(A) = (a-1)^3 \begin{vmatrix} a^2+a+1 & 3(a+1) & 3 \\ a+1 & a+3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[-2F_3+F_2]{-3F_3+F_1}$$

$$= (a-1)^3 \begin{vmatrix} a^2+a-2 & 3(a-1) & 0 \\ a-1 & a-1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^3 \begin{vmatrix} (a-1)(a+2) & 3(a-1) \\ a-1 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)^3 (a-1)^2 \begin{vmatrix} a+2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^5 (a-1) = (a-1)^6$$ ■

Ejemplo 17 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & C^2_1 & C^3_1 & C^4_1 & C^5_1 \\ 1 & C^3_2 & C^4_2 & C^5_2 & C^6_2 \\ 1 & C^4_3 & C^5_3 & C^6_3 & C^7_3 \\ 1 & C^5_4 & C^6_4 & C^7_4 & C^8_4 \end{pmatrix}$, calcular el D(A)

Solución . Calculamos las combinaciones mediante la fórmula

$$C^n_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$\Rightarrow D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{-F_2+F_3 \\ -F_3+F_4 \\ -F_4+F_5}]{-F_1+F_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 10 & 20 \\ 0 & 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la primera columna se tiene:

$$D(A) = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{-F_2+F_3 \\ -F_3+F_4}]{-F_1+F_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & 15 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{vmatrix} \xrightarrow[-F_2+F_3]{-F_1+F_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$$ ■

Ejemplo 18 Si $A = \begin{pmatrix} a+x & x & x & x \\ x & b+x & x & x \\ x & x & c+x & x \\ x & x & x & d+x \end{pmatrix}$, resolver D(A) = 0

Solución . Tomando la cuarta columna como línea pivot, realizamos las operaciones : $-C_4 + C_1 , -C_4 + C_2 , -C_4 + C_3$

$$\Rightarrow D(A) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & x \\ 0 & b & 0 & x \\ 0 & 0 & c & x \\ -d & -d & -d & d+x \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la primera fila se tiene :

$$D(A) = a \begin{vmatrix} b & 0 & x \\ 0 & c & x \\ -d & -d & d+x \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ -d & -d & -d \end{vmatrix}$$

$$= ab \begin{vmatrix} c & x \\ -d & d+x \end{vmatrix} + a\,x \begin{vmatrix} 0 & c \\ -d & -d \end{vmatrix} + d\,x \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}$$

$$= ab\,(cd + cx + dx) + ax\,(0 + cd) + bcdx$$

$$= abcd + (abc + abd + acd + bcd)\,x$$

Luego, si $D(A) = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{abcd}{ab(c+d) + cd(a+b)}$ ■

Ejemplo 19 Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$, probar que $D(A) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$

Demostración . Multiplicando por -a, -b, -c y -d, la primera, segunda, tercera y cuarta filas respectivamente, se tiene :

$$D(A) = -\frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ b^2 & -ab & bd & -bc \\ c^2 & -cd & -ac & bc \\ d^2 & cd & -bd & -ad \end{vmatrix} \quad \underline{F_1 + (F_2 + F_3 + F_4)}$$

$$= -\frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ b^2 & -ab & bd & -bc \\ c^2 & -cd & -ac & bc \\ d^2 & cd & -bd & -ad \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la primera fila y factorizando b, c y d del determinante resultante obtenemos :

$$D(A) = -\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{a}\begin{vmatrix} -a & d & -c \\ -d & -a & b \\ c & -b & -a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)\begin{vmatrix} \overset{*}{1} & -d/a & c/a \\ -d & -a & b \\ c & -b & -a \end{vmatrix}$$

Tomando la primera columna como línea pivot, efectuamos las operaciones elementales : $(d/a)\,C_1 + C_2$ y $(-c/a)\,C_1 + C_3$

$$D(A) = (a^2+b^2+c^2+d^2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -d & -\dfrac{a^2+d^2}{a} & \dfrac{cd+ab}{a} \\ c & \dfrac{cd-ab}{a} & -\dfrac{a^2+b^2}{a} \end{vmatrix}$$

$$= (a^2+b^2+c^2+d^2)\left[\frac{(a^2+d^2)(a^2+b^2)}{a^2} - \frac{(cd-ab)(cd+ab)}{a^2}\right]$$

$$\therefore\ D(A) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 20 Calcular el determinante $D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & a^2 & a^4 & a^6 & a^8 \\ 1 & a^3 & a^6 & a^9 & a^{12} \\ 1 & a^4 & a^8 & a^{12} & a^{16} \end{vmatrix}$

Solución . Efectuando las operaciones $F_1 - F_2$, $F_2 - F_3$, $F_3 - F_4$, $F_4 - F_5$, se tiene:

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 & 1-a^4 \\ 0 & a-a^2 & a^2-a^4 & a^3-a^6 & a^4-a^8 \\ 0 & a^2-a^3 & a^4-a^6 & a^6-a^9 & a^8-a^{12} \\ 0 & a^3-a^4 & a^6-a^8 & a^9-a^{12} & a^{12}-a^{16} \\ 1 & a^4 & a^8 & a^{12} & a^{16} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{5+1}\begin{vmatrix} 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 & 1-a^4 \\ a(1-a) & a^2(1-a^2) & a^3(1-a^3) & a^4(1-a^4) \\ a^2(1-a) & a^4(1-a^2) & a^6(1-a^3) & a^8(1-a^4) \\ a^3(1-a) & a^6(1-a^2) & a^9(1-a^3) & a^{12}(1-a^4) \end{vmatrix}$$

$$= a.a^2.a^3(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & a^2 & a^4 & a^6 \\ 1 & a^3 & a^6 & a^9 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \underline{F_1 - F_2} \\ \underline{F_2 - F_3} \\ \underline{F_3 - F_4} \end{matrix}$$

$$D_5 = a^6(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)\begin{vmatrix} 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \\ 0 & a-a^2 & a^2-a^4 & a^3-a^6 \\ 0 & a^2-a^3 & a^4-a^6 & a^6-a^9 \\ 1 & a^3 & a^6 & a^9 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la primera columna se tiene :

$$D_5 = a^6(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \\ a(1-a) & a^2(1-a^2) & a^3(1-a^3) \\ a^2(1-a) & a^4(1-a^2) & a^6(1-a^3) \end{vmatrix}$$

$$= -a \bullet a^2 \bullet a^6(1-a)^2(1-a^2)^2(1-a^3)^2(1-a^4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \underline{F_1 - F_2} \\ \underline{F_2 - F_3} \end{matrix}$$

$$= -a^9(1-a)^2(1-a^2)^2(1-a^3)^2(1-a^4)\begin{vmatrix} 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-a^2 & a^2-a^4 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix}$$

$$= -a^9(1-a)^2(1-a^2)^2(1-a^3)^2(1-a^4)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1-a & 1-a^2 \\ a(1-a) & a^2(1-a^2) \end{vmatrix}$$

$$= -a^{10}(1-a)^3(1-a^2)^2(1-a^3)^2(1-a^4)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ D_5 = a^{10}(1-a)^4(1-a^2)^3(1-a^3)^2(1-a^4) \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 21 Calcular el determinante de Vandermonde

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots\dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots\dots & a \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots\dots & a^2 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-2} & a_3^{n-3} & \dots\dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Solución . Mostraremos que el determinante de Vandermonde es igual al producto de toda clase de diferencias $a_i - a_j$, para $1 \leq j < i \leq n$, cualquiera que sea n ($n \geq 2$). Realicemos la demostración por inducción.

En efecto, para n=2 tenemos

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$

Supongamos que nuestra afirmación se ha demostrado para los determinantes de Vandermonde de orden (n - 1), es decir

$$D_{n-1} = \prod_{1<j<i<n-1} (a_i - a_j)$$

Ahora bien, mediante las operaciones elementales transformamos el determinate D_n del modo siguiente : De la última n-ésima fila sustraemos la (n - 1) -ésima fila, multiplicada por a_1 y, en general, sustraemos sucesivamente de la k-ésima fila la (k - 1) -ésima multiplicada, por a_1. Obtenemos :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots\dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots\dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1a_2 & a_3^2 - a_1a_3 & \dots\dots & a_n^2 - a_1a_n \\ \bullet & \bullet & & & \\ \bullet & \bullet & & & \\ \bullet & \bullet & & & \\ \bullet & \bullet & & & \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1a_3^{n-2} & \dots\dots & a_n^{n-1} - a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Desarrollemos el determinante por los cofactores de la primera columna y saquemos de todas las columnas los factores comunes. El determinante adquiere la forma :

$$D_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots\dots & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots\dots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \dots\dots & a_n^2 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & a_4^{n-2} & \dots\dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) D_{n-1}$$

Utilizando la hipótesis inductiva, obtenemos en definitiva

$$D_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \prod_{2 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$$

$$\therefore \boxed{D_n = \prod_{1 \leq j \leq i \leq n} (a_i - a_j)} \qquad (6)$$

Nota . El proceso que permite expresar un determinante dado, transformándolo mediante operaciones elementales por filas o columnas a un determinante del mismo tipo, pero de orden más inferior, se conoce con el nombre de *correlación recurrente.*

Ejemplo 22 Descomponer en factores el determinante

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & e \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & e^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & e^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & e^4 \end{vmatrix}$$

Solución . Según la fórmula del determinante de Vandermonde

$$D_5 = \prod_{1 \leq j < i \leq 5} (a_i - a_j)$$

Para determinar el desarrollo de los factores $(a_i - a_j)$ observemos que cuando $j = 1 \Rightarrow i = 2, 3, 4, 5$; $j = 2 \Rightarrow i = 3, 4, 5$; $j = 3 \Rightarrow i = 4, 5$; $j = 4 \Rightarrow i = 5$

Luego: $D_5 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_5 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_5 - a_2)(a_4 - a_3)(a_5 - a_3)(a_5 - a_4)$

Si en este desarrollo hacemos : $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$, $a_4 = d$ y $a_5 = e$, obtenemos:

$$D_5 = (b-a)(c-a)(d-a)(e-a)(c-b)(d-b)(e-b)(d-c)(e-c)(e-d)$$ ■

Ejemplo 23 Sea la matriz $A \in k^n$, $a \neq b$, calcular el D(A), si

$$A = \begin{bmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 1 & a+b \end{bmatrix}_n$$

Solución . Por el método de las correlaciones recurrentes se tiene :

$$\text{Para } n = 2 \Rightarrow D_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a - b}$$

Supongamos que para los determinantes del orden (n-1), esta afirmación es verdadera, esto es:

$$D_{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a - b} \qquad \text{(Hipótesis inductiva)}$$

Entonces, desarrollando el determinante de la matriz A por los cofactores de la primera columna se tiene :

$$D(A) = (a+b) \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \bullet & & & & \bullet \\ \bullet & & & & \bullet \\ \bullet & & & & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1} - \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \bullet & & & & \bullet \\ \bullet & & & & \bullet \\ \bullet & & & & \bullet \\ 0 & 0 & & & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

Teniendo en cuenta la hipótesis inductiva para el primer determinante y desarrollando el segundo determinante por los cofactores de la primera fila resulta:

$$D(A) = (a+b)\frac{(a^n - b^n)}{a - b} - ab \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 \\ \bullet & \bullet & & & \\ \bullet & \bullet & & & \\ \bullet & \bullet & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-2}$$

Nuevamente, haciendo uso de la hipótesis inductiva obtenemos :

$$D(A) = (a+b)\left(\frac{a^n - b^n}{a - b}\right) - ab\left(\frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b}\right) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

■

Ejemplo 24 Calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2Cosx & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2Cosx & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2Cosx & \dots & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 & 2Cosx \end{bmatrix}_n$$

Solución . Por el método de las correlaciones recurrentes, para n = 2 :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2\,Cos\,x & 1 \\ 1 & 2\,Cos\,x \end{vmatrix} = 4\,Cos^2 x - 1$$

De la identidad, Sen 3x = Sen x (4 Cos² x-1), se tiene : $4\,Cos^2 x - 1 = \dfrac{Sen\,3x}{Sen\,x}$

$$\therefore\ D_2 = \frac{Sen\,3x}{Sen\,x}$$

Supongamos que para un determinante de orden n - 1, esta afirmación es verdadera, esto es :

$$D_{n-1} = \frac{Sen\,nx}{Sen\,x} \qquad \text{(Hipótesis inductiva)}$$

Desarollando el D(A) por los cofactores de la primera columna obtenemos :

$$D(A) = 2\,Cos\,x \begin{vmatrix} 2\,Cos\,x & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 2Cos\,x & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & 2\,Cos\,x \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2Cosx & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2Cosx & \dots & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 & 2Cosx \end{vmatrix}_{n-1}$$

Haciendo uso de la hipótesis inductiva en el primer determinante y desarrollando el segundo determinante por los cofactores de la primera fila, resulta :

$$D(A) = 2\,\text{Cos}\,x\left[\frac{\text{Sen}\,n\,x}{\text{Sen}\,x}\right] - \begin{vmatrix} 2\text{Cosx} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\text{Cosx} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2\text{Cosx} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 1 & 2\text{Cos}\,x \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$= 2\,\text{Cos}\,x\left[\frac{\text{Sen}\,n\,x}{\text{Sen}\,x}\right] - \frac{\text{Sen}\,(n-1)x}{\text{Sen}\,x} = \frac{2\,\text{Sen}\,nx\,\text{Cos}\,x - \text{Sen}(n-1)x}{\text{Sen}\,x}$$

De la identidad Sen (a+b) + Sen (a-b) = 2Sen a Cos b, se sigue que:

$$D(A) = \frac{\text{Sen}\,(n+1)x + \text{Sen}\,(n-1)x - \text{Sen}\,(n-1)x}{\text{Sen}\,x} = \frac{\text{Sen}\,(n-1)x}{\text{Sen}\,x}$$ ■

EJERCICIOS . *Grupo 50*

En los ejercicios 1 al 6, resolver la ecuación dada.

1. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ x & x+2 & x-2 \\ 4 & x & 8 \end{vmatrix} = 0$

2. $\begin{vmatrix} -2 & x-3 & -x \\ 1 & 1 & 2 \\ x-1 & 1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$

3. $\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 2x+3 \\ x-3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 7$

4. $\begin{vmatrix} 17-3x & 26 & 25 \\ 11-4x & 34 & 33 \\ 8-2x & 22 & 21 \end{vmatrix} = 24$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & x & 5 & 6 \\ -2 & 3 & x & -5 \end{vmatrix} = 0$

6. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ -x & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

En los ejercicios 7 al 16, calcúlese los determinantes

7. $\begin{vmatrix} 7 & 13 & 10 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 4 \\ 8 & 12 & 11 & 7 \\ 4 & 10 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 29 & 2 & 14 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \\ 33 & 39 & 8 & 38 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 \\ 12 & 27 & 3 & 16 \\ 24 & 23 & 2 & 12 \\ 48 & 36 & 4 & 21 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 3/2 & -9/2 & -3/2 & -3 \\ 5/3 & -8/3 & -2/3 & -7/3 \\ 4/3 & -5/3 & -1 & -2/3 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 3/4 & 2 & -1/2 & -6 \\ 1 & -2 & 3/2 & 8 \\ 5/6 & -4/3 & 4/3 & 14/3 \\ 2/5 & -4/5 & 1/2 & 12/5 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 1/3 & -5/2 & 2/5 & 3/2 \\ 3 & -12 & 21/5 & 15 \\ 2/3 & -9/2 & 4/5 & 5/2 \\ -1/7 & 2/7 & -1/7 & 3/7 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$

En los ejercicios 17 al 19, cálcular los determinantes. ($i = \sqrt{-1}$)

17. $\begin{vmatrix} 1 & -1-i & -1 \\ 1-i & 0 & 1+i \\ 1 & -1-i & -1 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & i & 6i \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} i & -1 & -1+i \\ 1 & 0 & 1+2i \\ 1+i & -1+2i & 2i \end{vmatrix}$

En los ejercicios 20 al 25, calcúlese los determinantes :

20. $\begin{vmatrix} \text{Cosx} & \text{Senx Cosy} & \text{Senx Seny} \\ -\text{Senx} & \text{Cosx Cosy} & \text{Cosx Seny} \\ 0 & -\text{Senx} & \text{Cosy} \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} \text{Sen}^2 a & \text{Cos}\,2a & \text{Cos}^2 a \\ \text{Sen}^2 b & \text{Cos}\,2b & \text{Cos}^2 b \\ \text{Sen}^2 c & \text{Cos}\,2c & \text{Cos}^2 c \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} \text{Cos(a-b)} & \text{Cos(b-c)} & \text{Cos(c-a)} \\ \text{Cos(a+b)} & \text{Cos(b+c)} & \text{Cos(c+a)} \\ \text{Sen(a+b)} & \text{Sen(b+c)} & \text{Sen(c+a)} \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} \text{Sen a} & \text{Cos a} & \text{Sen(a+d)} \\ \text{Sen b} & \text{Cos b} & \text{Sen(b+d)} \\ \text{Sen c} & \text{Cos c} & \text{Sen(c+d)} \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} bc-a^2 & ca-b^2 & ab-c^2 \\ -bc+ca+ab & bc-ca+ab & bc+ca-ab \\ (a+b)(a+c) & (b+c)(b+a) & (c+a)(c+b) \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$

En los ejercicios 26 al 37, calcular los determinantes :

26. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} a^2 & a^2-(b-c)^2 & bc \\ b^2 & b^2-(c-a)^2 & ca \\ c^2 & c^2-(a-b)^2 & ab \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$

34. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$

35. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$ 36. $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & b & b & a \\ b & a & a & a \end{vmatrix}$ 37. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

38. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} \text{Sen x Cos y} & \text{-a Sen x Sen y} & \text{a Cos x Cos y} \\ \text{Sen x Sen y} & \text{a Sen x Cos y} & \text{a Cos x Sen y} \\ \text{Cos y} & 0 & \text{-a Sen x} \end{bmatrix}$

Si D(A) = k Sen x, hallar el valor de k.

39. Sea $f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & x \\ 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$, hallar $a \in R$ tal que f(a) = 0

En los ejercicios 40 al 52, usando propiedades de los determinantes, incluyendo desarrollos por líneas, demostrar las identidades :

40. $\begin{vmatrix} \text{Cos((a-b)/2)} & \text{Sen((a+b)/2)} & \text{Cos((a+b)/2)} \\ \text{Cos((b-c)/2)} & \text{Sen((b+c)/2)} & \text{Cos((b+c)/2)} \\ \text{Cos((c-a)/2)} & \text{Sen((c+a)/2)} & \text{Cos((c+a)/2)} \end{vmatrix} = 1/2\ [\text{Sen(b-a)+Sen(c-b)+Sen(a-c)}]$

(Sugerencia : Expandir con respecto a la primera columna)

41. $\begin{vmatrix} \text{Sen}^2a & \text{Sena Cosa} & \text{Cos}^2a \\ \text{Sen}^2b & \text{Senb Cosb} & \text{Cos}^2b \\ \text{Sen}^2c & \text{Senc Cosc} & \text{Cos}^2c \end{vmatrix}$ = Sen(a-b) Cosa Cosb + Sen(b-c) Cosb Cosc + Sen(c-a) Cosc Cosa

42. $\begin{vmatrix} a^2+(1-a^2\text{Cos } \varphi) & ab(1-\text{Cos } \varphi) & ac(1-\text{Cos } \varphi) \\ ab(1-\text{Cos } \varphi) & b^2+(1-b^2)\text{Cos } \varphi & bc(1-\text{Cos } \varphi) \\ ac(1-\text{Cos } \varphi) & bc(1-\text{Cos } \varphi) & c^2+(1-c^2)\text{Cos } \varphi \end{vmatrix} = \text{Cos}^2\ \varphi$

donde $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

43. $\begin{vmatrix} \text{Cos}\alpha\text{Cos}\beta - \text{Sen}\alpha\text{Sen}\beta\text{Cos}\theta & -\text{Sen}\alpha\text{Cos}\beta - \text{Cos}\alpha\text{Sen}\beta\text{Cos}\theta & \text{Sen}\beta\text{Sen}\theta \\ \text{Cos}\alpha\text{Sen}\beta+\text{Sen}\alpha\text{Cos}\beta\text{Cos}\theta & -\text{Sen}\alpha\text{Sen}\beta + \text{Cos}\alpha\text{Cos}\beta\text{Cos}\theta & -\text{Cos}\beta\text{Sen}\theta \\ \text{Sen}\alpha\ \text{Sen}\theta & \text{Cos}\alpha\ \text{Cos}\theta & \text{Cos}\theta \end{vmatrix} = 1$

(Sugerencia: Expandir en términos de la primera fila)

44. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix} = a^4$

En los ejercicios 45 al 52, calcúlense los determinantes de orden n por el método de correlaciones recurrentes.

45. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ 46. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$

47. $\begin{vmatrix} \text{Cosx} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \text{2Cosx} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \text{2Cosx} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \text{2Cosx} \end{vmatrix}$ 48. $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

49. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$ 50. $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 7 \end{vmatrix}$

51. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 52. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$

9.5 OTRAS APLICACIONES Y PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

9.5.1 REGLA DE SARRUS.

Un método práctico para calcular determinantes de tercer orden, es la *Regla de Sarrus*, que consiste en repetir las dos primeras columnas y escribirlas en el mismo orden a continuación de la tercera columna. El determinante se calcula sumando todos los productos de las componentes que están en las flechas que apuntan

hacia la derecha y restándolos todos los productos de los componentes que están en las flechas que apuntan hacia la izquierda.

$$D(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \quad (7)$$

(-) (-) (-) (+) (+) (+)

$$\Rightarrow D(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Ejemplo 1 Hallar el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}$

Solución. Disponemos el D(A) como indica el esquema (7):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow D(A) = (1)(3)(11) + (2)(9)(4) + (10)(2)(5) - (10)(3)(4) - (1)(9)(5) - (2)(2)(11)$$
$$= 33 + 72 + 100 - 120 - 45 - 44 = -4$$ ■

Ejemplo 2 Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{pmatrix}$

Solución.
$$D(A) = \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ y & x+y \\ x+y & x \end{matrix}$$

$$\Rightarrow D(A) = xy(x+y) + xy(x+y) + xy(x+y) - (x+y)^3 - x^3 - y^3$$
$$= 3xy(x+y) - [x^3+3xy(x+y)+y^3] - x^3 - y^3$$
$$= -2(x^3+y^3)$$ ■

9.5.2 CALCULO DE DETERMINANTES MEDIANTE LA REDUCCION A LA FORMA ESCALONADA

El cálculo de determinantes de ciertas matrices se puede efectuar haciendo uso de la matriz escalonada, para lo cual se tiene en consideración la siguiente propiedad.

PROPIEDAD 5 Si A es matriz triangular (superior o inferior) de orden n, entonces el D(A) es igual al producto de las componentes que pertenecen a la diagonal principal, esto es, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{D(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}} \quad (8)$$

La idea básica de este método consiste en aplicar operaciones elementales en las filas de la matriz original A y transformarla a una matriz B que tenga la forma escalonada.

Puesto que la forma escalonada de una matriz cuadrada es triangular superior o inferior, el D(A) = D(B) se puede calcular aplicando la propiedad establecida anteriormente.

Ejemplo 3 Calcular el determinante de $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

Solución. Factorizando 1/2 de la primera y segunda filas y 1/3 de la tercera y cuarta filas, obtenemos:

$$D(A) = (1/2)\,(1/2)\,(1/3)\,(1/3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Aplicando la Propiedad 4c intercambiamos la primera y cuarta columnas:

$$D(A) = (1/36)\,(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underrightarrow{F_2 - F_1} = -(1/36)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Intercambiando la segunda y tercera filas se tiene :

$$D(A) = -1/36\,(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underrightarrow{-3F_2 + F_4} = (1/36)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

Finalmente, aplicando la operación $-F_3 + F_4$ resulta :

$$D(A) = 1/36\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Como el determinante de la matriz A tiene la forma escalonada, aplicamos la Propiedad 5 :

$$D(A) = (1/36)\,(1)\,(1)\,(-2)\,(-3) = 1/6$$ ■

Ejemplo 4 Hallar el determinante de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ -1 & -2 & -3 & & 0 \end{bmatrix}$

Solución . Tomando la primera fila como línea pivot, sumamos ésta a todas las demás filas, y obtenemos

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

que resulta ser el determinante de una matriz triangular, por lo que :

$$D(A) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \cdots n = n!$$ ■

Ejemplo 5 Sea $A = [a_{ij}]_n$ una matriz tal que $a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Demostrar que $D(A) = (n-1)\,(-1)^{n-1}$

Demostración . En efecto, construyamos la matriz según la definición dada :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Si tomamos la última fila como línea pivot y le restamos las otras n-1 filas, resulta :

$$D(A) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \underrightarrow{F_1 + F_n} \\ \underrightarrow{F_2 + F_n} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \underrightarrow{F_{n-1} + F_n} \end{matrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore\; D(A) = (-1)\,(-1)\,(-1) \cdots (-1)\,(n-1) = (n-1)\,(-1)^{n-1}$$ ■

Ejemplo 6 Calcular el determinante $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ 1 & 2 & 3 & & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$

Solución . Tomando como línea pivot la primera columna efectuamos:

$$-2C_1 + C_2,\; -3C_1 + C_3,\; \cdots\cdots,\; -(n-1)\,C_1 + C_{n-1},\; -nC_n$$

$$\Rightarrow D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{vmatrix}$$

$\therefore D_n = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-3)(n-1) = (n-1)!$ ■

Ejemplo 7 Calcular : $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

Solución . Sumando a la primera columna las otras n-1 columnas, se tiene:

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & a & & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ 1 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

Restando la primera fila a todas las demás filas, resulta:

$$D_n = [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$\therefore D_n = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$ ■

Ejemplo 8 Calcular : $D_8 = \begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \cdots & a+7h \\ -a & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots -a & a \end{vmatrix}$

Solución . Sumando a la primera columna las otras 7 columnas se tiene :

$$D_8 = \begin{vmatrix} 8a+28h & a+h & a+2h & \cdots & a+7h \\ 0 & a & 0 & & 0 \\ 0 & -a & a & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots -a & a \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la primera columna obtenemos:

$$D_8 = 4(2a+7h) \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots -a & a \end{vmatrix}_7$$

Efectuando las operaciones : $F_1 + F_2$, $F_2 + F_3$, ..., $F_6 + F_7$, resulta:

$$D_8 = 4(2a+7h) \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots -a & a \end{vmatrix}_7 = 4(2a+7h)a^7$$ ■

Ejemplo 9 Calcular: $D_{n+1} = \begin{vmatrix} h & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ hx & h & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ hx^2 & hx & h & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ hx^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & hx^{n-3} & \cdots & h \end{vmatrix}$

Solución . Efectuando las operaciones con las columnnas $-xC_2+C_1$, $-xC_3+C_2$, ... , $-xC_{n+1}+C_n$, se tiene :

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} h+x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h+x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h+x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & & h+x & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & h \end{vmatrix}$$

Luego, por la Propiedad 5, se sigue que : $D_{n+1} = h(h+x)^n$ ■

Ejemplo 10 Calcular $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ x_{11} & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ x_{21} & x_{22} & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & x_{n4} & \dots & 1 \end{vmatrix}$

Solución . Efectuando las operaciones con las filas
$-aF_2 + F_1$, $-aF_3 + F_2$, ..., $-aF_n + F_{n-1}$, obtenemos :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-ax_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{11}-ax_{21} & 1-ax_{22} & 0 & \dots & 0 \\ x_{21}-ax_{31} & x_{22}-ax_{33} & 1-ax_{33} & \dots & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore D_n = (1 - ax_{11})(1 - ax_{22})(1 - ax_{33}) \dots\dots = \prod_{i=1}^{n} (1 - a\,x_{ii}) \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 11 Calcular : $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$

Solución . Multiplicando por x la primera fila y la primera columna se tiene :

$$D_n = \frac{1}{x^2}\begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x & x \\ x & 0 & x & & x & x \\ x & x & 0 & & x & x \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ x & x & x & \dots & 0 & x \\ x & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix} = \frac{x^n}{x^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

sumando las n-1 filas a la primera fila resulta :

$$D_n = x^{n-2}\begin{vmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1)x^{n-2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Efectuando las operaciones : $F_2 - F_1$, $F_3 - F_1$, ..., $F_n - F_1$, obtenemos finalmente:

$$Dn = (n-1)\,x^{n-2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (n-1)\,x^{n-2}(-1)^{n-1} \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 12 Sean $z = \text{Cos}\,\alpha + i\,\text{Sen}\,\alpha$, $\omega = \text{Cos}(2\pi/n) + i\,\text{Sen}(2\pi/n)$.
Hallar Re(| A |), donde $A \in \mathbf{K}^n$, $n = 4k + 1$ y

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \omega^n & \omega^{n-1} & \dots & \omega^2 & \omega \\ z & 1 & \omega^n & \dots & \omega^3 & \omega^2 \\ z^2 & x & 1 & \dots & \omega^4 & \omega^3 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ z^n & z^{n-1} & z^{n-2} & \dots & z & 1 \end{vmatrix}$$

Solución . Efectuando las operaciones con las filas
$-z F_1 + F_2$, $-z F_2 + F_3$, ..., $-z F_{n-1} + F_n$, se tiene:

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & \omega^n & \omega^{n-1} & \dots & \omega^3 & \omega^2 & \omega \\ 0 & 1-z\omega^n & \omega^n-z\omega^{n-1} & \dots & \omega^4-z\omega^3 & \omega^3-z\omega^2 & \omega^2-z\omega \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & & 1-z\omega^n & \omega^n-z\omega^{n-1} & \omega^{n-1}-z\omega^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1-z\omega^n & \omega^n-z\omega^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1-z\omega^n \end{vmatrix}$$

Por la propiedad (5): $D(A) = (1 - z\omega^n)^{n-1}$ (1)

Dado que, $\omega^n = [\text{Cos}(2\pi/n) + i\,\text{Sen}(2\pi/n)]^n = \text{Cos}\,2\pi + i\,\text{Sen}\,2\pi = 1$ y $4k = n-1$,

entonces en (1) : $D(A) = (1-z)^{4k} = (1 - \text{Cos}\,\alpha - i\,\text{Sen}\,\alpha)^{4k}$

$= [2\,\text{Sen}^2(\alpha/2) - 2i\,\text{Sen}\,(\alpha/2)\,\text{Cos}\,(\alpha/2)]^{4k}$

$= [-2i\,\text{Sen}\,\alpha/2\,(\text{Cos}\,\alpha/2 + i\,\text{Sen}\,\alpha/2)]^{4k}$

$= (-2)^{4k}\, i^{4k}\, \text{Sen}^{4k}\,\alpha/2\,(\text{Cos}\,2k\,\alpha + i\,\text{Sen}\,2k\,\alpha)$

Siendo $i^{4k} = 1 \Rightarrow \text{Re}(\,|A|\,) = 16^k\,\text{Sen}^{4k}(\alpha/2)\,\text{Cos}\,2k\,\alpha$ ■

EJERCICIOS . *Grupo 51*

En los ejercicos 1 al 6, calcular los determinantes aplicando la Regla de Sarrus .

1. $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$

En los ejercicios 7 al 12, calcúlese los determinantes de las matrices, reduciendo primero cada matriz a una matriz triangular superior.

7. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 9. $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ 11. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 12. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 13 al 36; calcular los determinantes de n-ésimo orden por reducción a la forma triangular.

13. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & z & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & -a & & -a & x \end{vmatrix}$ 16. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \cdots & a+(n-1)h \\ -a & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & & 1 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$ 22. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & 2 & \dots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ x & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ x & x & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ x & x & x & 1 & \dots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & a_1+a_2 & \dots & a_1+a_n \\ 1 & a_2+a_1 & 0 & \dots & a_1+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & \dots & x^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^2 & x^3 & x^4 & & x \\ x & x^2 & x^3 & & 1 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \dots & 0 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{n-1} & x^n \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \dots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+(n-1)h \\ a+h & a+2h & a+3h & \dots & a \\ a+2h & a+3h & a+4h & \dots & a+h \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)h & a & a+h & \dots & a+(n-2)h \end{vmatrix}$

34. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$

35. $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$

36. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & 25x^4 \\ 1 & y & y^2 & y^3 & y^4 \\ 1 & 2y & 3y^2 & 4y^3 & 5y^4 \end{vmatrix}$

9.5.3 PROPIEDADES MULTIPLICATIVAS

PROPIEDAD 6 DETERMINANTE DE UN PRODUCTO

Si A y B son matrices de orden n, y A es inversible, entonces:

D(AB) = D(A) . D(B)

Esto es, el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes.

En efecto, la Definición 8.2 establece que una matriz arbitraria A puede representarse por

$$A = E_1 E_2 E_3 \dots\dots E_m B$$

donde E_i, i = 1, 2, 3, ...m, son matrices elementales y B es una matriz triangular superior. También sabemos que si A es inversible entonces A es el producto de matrices elementales $E_1 E_2 E_3 \dots E_m$

Por lo que : $AB = E_1 E_2 E_3 \dots E_m B$

$\Rightarrow D(AB) = D(E_1 E_2 E_3 \dots E_m B)$

$= D(E_1) . D(E_2 E_3 . E_m B)$

$= D(E_1) . D(E_2) . D(E_3 \dots E_m B)$

Por inducción se sigue que :

$$D(AB) = D(E_1) \cdot D(E_2) \cdot D(E_3) \ldots\ldots D(E_m) \cdot D(B)$$

Dado que: $D(E_1) \cdot D(E_2) \cdot D(E_3) \ldots\ldots D(E_m) = D(E_1 E_2 E_3 \ldots\ldots E_m) = D(A)$

combinando estas dos afirmaciones se tiene

$$D(AB) = D(A) \cdot D(B)$$

siempre que A sea inversible.

Ejemplo 1 Verificar D(AB) = D(A) . D(B), cuando

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución . Si $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 8 \\ 31 & 1 & 17 \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow D(AB) = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 8 \\ 31 & 1 & 17 \\ 10 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{vmatrix} 40 & 0 & 25 \\ 31 & 1 & 17 \\ 10 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40 & 25 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = -170 \qquad (1)$$

$$\text{Ahora : } D(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(8-3) = 10$$

$$y\ D(B) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{vmatrix} 8 & 0 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 25 = -17$$

Luego: $D(A) \cdot D(B) = (10)(-17) = -170$ (2)

Por lo tanto, de(1) y (2) se concluye que : $D(AB) = D(A) \cdot D(B)$ ■

PROPIEDAD 7 Si $A \in K^n$, tal que $A = \begin{bmatrix} X & \theta \\ Y & Z \end{bmatrix}$ y donde X, Y, Z son submatrices cudradas de A, entonces:

$$D(A) = D(X) \cdot D(Z)$$

Ejemplo 2 Calcular el determinante de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 14 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 15 & 24 & 1 & 5 & 9 \\ 9 & 24 & 38 & 1 & 25 & 81 \end{bmatrix}$

Solución . Por simple inspección, dos submatrices de A que satisfacen la Propiedad 7 son :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix} \quad y \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 9 \\ 1 & 25 & 81 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow D(X) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3-C_1]{C_2-C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1$$

$$D(Z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 9 \\ 1 & 25 & 81 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3-C_1]{C_2-C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 8 \\ 1 & 24 & 80 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 24 & 80 \end{vmatrix} = 128$$

En consecuencia, por la Propiedad 7 : $D(A) = (1)(128) = 128$ ■

Ejemplo 3 Calcular el determinante de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & 1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & x_1 & x_2 & x_3 & c_2 \\ a_3 & b_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & c_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 & x_3^2 \end{bmatrix}$

Solución . Haciendo uso de la Propiedad 4c, intercambiamos la tercera y sexta columnas y luego la tercera y sexta filas, y obtenemos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 & x_3 & x_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_2^2 & x_3^2 & x_1^2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por simple inspección, dos submatrices cuadradas de A son

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix} \quad , \; Z = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & x_1 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_1^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow D(X) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ x_1^2 & x_2^2-x_1^2 & x_3^2-x_1^2 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2+x_1 & x_3+x_1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$

Si intercambiamos filas en el determinante de Z, obtenemos el determinante de X, por lo que:

$$D(A) = D(X) \bullet D(Z) = (x_2 - x_1)^2 (x_3 - x_1)^2 (x_3 - x_2)^2 \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4 Calcular el determinante de $A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{bmatrix}$

Solución . Efectuando las operaciones $F_1 - F_2$ y $F_3 - F_4$, se tiene:

$$D(A) = \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = a\,b \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4 - F_1} \quad D(A) = ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

Por la Propiedad 7, se sigue que :

$$D(A) = ab \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} = ab(1 - a - 1)(1 - b - 1) = a^2 b^2 \qquad \blacksquare$$

PROPIEDAD 8 **DETERMINANTE DE UNA TRANSPUESTA**

Si A es una matriz cuadrada de orden n y A^t es su transpuesta, entonces:

$$D(A) = D(A^t)$$

En efecto, escribiendo la matriz A como producto de matrices elementales E_i, se tiene :

$$A = E_1 E_2 E_3 \ldots\ldots\ldots E_m$$

$$\Rightarrow A^t = E^t_m \ldots\ldots\ldots E^t_3 E^t_2 E^t_1$$

Por la Propoiedad 6 :

$$D(A) = D(E_1) . D(E_2) \ldots\ldots D(E_m) \text{ y}$$

$$D(A^t) = D(E^t_m) \ldots\ldots D(E_2^t) . D(E_1^t)$$

$$= D(E_1) . D(E_2) \ldots\ldots D(E_m)$$

$$\therefore D(A^t) = D(A)$$

Ejemplo 5 Si $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix}$, calcular el determinante de A.

Solución . Efectuando el producto A^t A se tiene:

$$A^t A = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

donde $\lambda = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

$$\Rightarrow D(A^t A) = D(A^t) \bullet D(A) = \lambda^4$$

Pero, por la Propiedad 8 : $D(A^t) = D(A) \Rightarrow [D(A)]^2 = \lambda^4$

$$\therefore D(A) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \qquad \blacksquare$$

EJERCICIOS. *Grupo 52*

En los ejercicios 1 al 3, para las matrices A y B, compruébese Propiedad 6 : D(AB) = D(A) . D(B)

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & -13 \\ 2 & 3 & 5 & 15 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En los ejercicios 4 al 6, calcúlese el cuadrado del determinante

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & -7 & -1 & 9 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

En los ejerciccios 7 al 10, cálculese el determinante de la matriz A.

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 9 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 8. $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 12 & 16 & -2 \\ 3 & 1 & 17 & 18 & -5 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 10. $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ b_2 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \end{pmatrix}$

9.5.4 RANGO DE UN MATRIZ

Supongamos que en la matriz A de orden m x n se han elegido arbitrariamente k filas y k columnas, esto es, k min {m,n}. Sabemos que los elementos que se hallan en la intersección de las filas y columnas elegidas forman una sub matriz cuadrada de orden k, cuyo determinante se denomina *menor* de orden k de la matriz A. El orden máximo r de los menores distintos de cero de la matriz A se llama *rango* de ésta, y cualquier menor de orden r, distinto de cero, *menor básico*.

Para determinar el rango de una matriz A de orden m x n, supongamos que en esta matriz fué hallado un menor $M_k \neq 0$. Vamos a considerar sólo aquellos menores M_{k+1} que contienen en si (orlan) el menor M_k; si todos los menores citados son nulos, el rango de la matriz es igual a k. De lo contrario entre los

menores que orlan a M_k se encontrará un menor no nulo de orden k+1 y todo el procedimiento se repite.

Ejemplo 1 Determinar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

Solución . Dado que el orden de matriz es de 4 x 5, entonces:

$$\rho(A) \leq \min\{4, 5\}, \text{ es decir, } \rho(A) \leq 4$$

Fijemos un menor de segundo orden

$$M_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2 \neq 0$$

y el menor de tercer orden

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Vemos que M_3, que orla a M_2, es también diferente de cero, sin embargo, los menores de cuarto orden que orlan a M_3 son nulos, esto es

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \text{ , y } \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

En consecuencia, el rango de la matriz es 3, y M_3 es el menor básico. ■

OBSERVACIONES

1. Si A es una matriz, no nula, de orden m x n, entonces

$$0 < \rho(A) \leq \min\{m, n\}$$

2. Si A es una matriz cuadrada, no nula, de orden n, entonces

$$0 < \rho(A) \leq n$$

3. Si A y B son matrices conformables respecto de la suma A+B, entonces

$$\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B)$$

4. Si A y B son matrices conformables respecto del producto AB, entonces

$$\rho(AB) \leq \min\{\rho(A), \rho(B)\}$$

Ejemplo 2 Hallar x de modo que el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & x & 5 & 6 \\ -2 & 3 & x & -5 \end{pmatrix}$

sea menor que 4.

Solución. Por definición, si $\rho(A) < 4 \Rightarrow D(A) = 0$, luego, calculamos el determinante de A efectuando las operaciones: $-2C_1 + C_2$, $-3C_1 + C_3$.

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 2 & -1 & -2 & 5 \\ 3 & x-6 & -4 & 6 \\ -2 & 7 & x+6 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 5 \\ x-6 & -4 & 6 \\ 7 & x+6 & -5 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & x-6 & -4 \\ -2 & 7 & x+6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x-6 & 8-2x & 5x-24 \\ 7 & x-8 & 30 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2x-9 & x-6 & 8-2x \\ 12 & 7 & x-8 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 8-2x & 5x-24 \\ x-8 & 30 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 2x-9 & 8-2x \\ 12 & x-8 \end{vmatrix}$$

de donde obtenemos: $D(A) = -2x^3 + 6x^2 + 20x - 48$

Si $D(A) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2)(x-4) = 0$

$\Leftrightarrow x = -3, x = 2, x = 4$ ■

Ejemplo 3 Hallar para qué valores de t el rango de la matriz

$A = \begin{pmatrix} 3t & 1 & 2 & t+1 \\ 5t & 5 & 5 & 2t \\ 7t & 2 & 3 & 3t \end{pmatrix}$ a) Es igual a 3 b) No es igual a 3

Solución. Como la matriz A es de orden 3 x 4, existe $C_3^4 \, C_3^3 = 4$ menores de orden 3 que se pueden obtener de dicha matriz. Estos son:

$$\begin{vmatrix} 3t & 1 & 2 \\ 5t & 5 & 5 \\ 7t & 2 & 3 \end{vmatrix} = -15t \qquad \begin{vmatrix} 3t & 2 & t+1 \\ 5t & 5 & 2t \\ 7t & 3 & 3t \end{vmatrix} = -25t$$

$$\begin{vmatrix} 3t & 1 & t+1 \\ 5t & 5 & 2t \\ 7t & 2 & 3t \end{vmatrix} = t\,(7t-25) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & t+1 \\ 5 & 5 & 2t \\ 2 & 3 & 3t \end{vmatrix} = -8t + 5$$

Podemos observar que para t = 0, los tres primeros determinantes son nulos, pero el cuarto determinante tiene un valor $M_3 = 5 \neq 0$. Por lo que:

a) $\rho(A) = 3, \forall t \in R$, b) $\nexists t \in R$, tal que $\rho(A) < 3$

Ejemplo 4 Sea la matriz $A = [a_{ij}]$ de orden n, donde $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \neq j \\ x \text{ si } i = j \end{cases}$

Hallar los valores de x de modo que $1 < \rho(A) < n$

Solución. Según definición dada, construimos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de A sumando las n-1 filas a la primera para obtener

$$D(A) = \begin{vmatrix} x+(n-1) & x+(n-1) & x+(n-1) & \cdots & & x+(n-1) \\ 1 & x & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix} = (x+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow D(A) = (x + n - 1)(x - 1)^{n-1}$$

Por consiguiente, si $\rho(A) < n \Rightarrow D(A) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ó $x = 1 - n$

si $x = 1 \Rightarrow 1 = \rho(A) < n$

si $x = 1 - n \Rightarrow 1 < \rho(A) < n$ ■

Ejemplo 5 Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ -x & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & x \end{bmatrix}$

Para qué valores de x el rango de la matriz toma un valor máximo, y para qué valores de x el rango de la matriz toma un valor mínimo. Hallar los valores de dichos rangos.

***Solución*.** La matriz cuadrada A es orden 4, por lo que $1 \leq \rho(A) \leq 4$.

El rango de A tendrá un valor máximo, $\rho(A) = 4$, si el $D(A) \neq 0$. Hallemos el determinante de A efectuando las operaciones:

$-2F_2 + F_1,\ xF_2 + F_3,\ -2F_2 + F_4$

$$D(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & x+6 & 8-x & 1-4x \\ 0 & 0 & 4 & x+8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 7 & 9 \\ x+6 & 8-x & 1-4x \\ 0 & 4 & x+8 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los cofactores de la primera columna obtenemos

$$D(A) = \begin{vmatrix} 8-x & 1-4x \\ 4 & x+8 \end{vmatrix} + (x+6)\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 4 & x+8 \end{vmatrix} = 6(x+3)(x+10)$$

Si $D(A) \neq 0 \Rightarrow (x+3)(x+10) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ ó $x \neq -10$

Esto es, el rango de A tendrá un valor máximo si $x \in \mathbb{R} - \{-3, -10\}$. Cuando el $D(A) = 0$, entonces $\rho(A) < 4$, es decir, si $x = -3$ y $x = -10$ el rango de A es menor que 4.

Hallemos el rango de A por transformaciones elementales para $x = -3$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2F_1+F_4]{-2F_1+F_2,\ -3F_1+F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 11 & 13 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3F_2 + F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 32 & 40 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[-F_3 + F_4]{F_3(1/8)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E$$

Luego, si $x = -3$, entonces, $\rho(E) = \rho(A) = 3$

De igual manera, para $x = -10$, $\rho(A) = 3$. Por lo tanto, el rango mínimo es 3 cuando $x = -3$ y $x = -10$. ■

EJERCICIOS . Grupo 53

En los ejercicios 1 al 6, hallar el rango de la matriz A

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 7 y 8, decir a qué es igual el rango de la matriz A para diferentes valores de K.

7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ k & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & k & -1 & 2 \\ 2 & -1 & k & 5 \\ 1 & 10 & -6 & k \end{bmatrix}$

9. Dada la matriz $A = [a_{ij}]$ de orden n, tal que $a_{ij} = \begin{cases} n-1, & \text{si } i = j \\ 1, & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Qué valor debe tener n para que el rango de A sea igual a su orden.

En los ejercicios 10 y 11, hallar x para que el rango de la matriz A sea menor que 4.

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & x \\ 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{bmatrix}$

12. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 4 & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix}$

Hallar x de modo que el rango de la matriz sea : a) máximo , b) mínimo

13. Hallar el rango de la matriz A, $\forall x \in \mathbf{R}$, si $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & 3x \\ x & 2 & 2(x+1) & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 2x-2x^2 \end{bmatrix}$

14. Determine el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & x & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & -6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, para diferentes valores de x.

15. Para qué valores de x el rango de la matriz a toma un valor a) maximo, b) mínimo, si :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & -1 & 2 \\ 2 & -1 & x & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

TEOREMA 9.1 Una matriz cuadrada es inversible si y sólo si su determinante es diferente de cero

Demostración.

($\Rightarrow$) Primero demostraremos que si una matriz A es inversible $\Rightarrow D(A) \neq 0$

En efecto, supongamos que A es inversible, esto es : $AA^{-1} = I$

$\Rightarrow \quad D(AA^{-1}) = D(I)$

$\Rightarrow \quad D(A) . D(A^{-1}) = 1$ (Propiedad 6)

Por lo tanto, $D(A) \neq 0$

($\Leftarrow$) Demostraremos que si $D(A) \neq 0$, entonces A es inversible.

En efecto, supongamos que $D(A) \neq 0$

Probaremos que A es equivalente por filas a I (es inversible).

Recordemos que si $B \stackrel{f}{=} A$, existe una sucesión finita $E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots, E_m$ de

matrices elementales tales que:

$$A = E_1\ E_2\ E_3\ \ldots\ldots\ldots\ E_m\ B$$

Por lo que : $D(A) = D(E_1) . D(E_2) . D(E_3) \ldots\ldots\ldots D(E_m) . D(B)$

De la hipótesis, $D(A) \neq 0$, se sigue que $D(B) \neq 0$ y si $D(B) \neq 0$ si y sólo si B es inversible. Puesto que A es inversible si y sólo si B lo es, por tanto, se ha demostrado el teorema.

Corolario . Si A es inversible, entonces : $D(A^{-1}) = \dfrac{1}{D(A)}$

9.5.5 DAJUNTA DE UNA MATRIZ

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de orden n, sea

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} D(A_{ij})$$

el cofactor i, j de A, entonces la matriz $C = [c_{ij}]$ se llama *matriz de cofactores* de A. Es decir

$$C = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

La transpuesta C^t de la matriz de cofactores de A se llama *Adjunta* de A. Esta matriz se denota por adj(A), y si $A = [c_{ij}]$, entonces

$$\boxed{adj(A) = (-1)^{i+j} D(A_{ji})} \qquad (9)$$

Propiedades . Si A, B, I son matrices no nulas, de orden n, y r es un escalar, entonces

AD.1 : $adj(I_n) = I_n$

AD.2 : $adj(A^t) = [adj(A)]^t$

AD.3 : $adj(A^n) = [adj(A)]^n$

AD.4 : $adj(AB) = [adj(B)]\,[adj(A)]$

AD.5 : $adj(rA) = r^{n-1}\, adj(A)$

AD.6 : $|\, adj(A) \,| = |\, A \,|^{n-1}$

AD.7 : $adj(A^{-1}) = [adj(A)]^{-1} = \dfrac{A}{|A|}$

Ejemplo 1 Demostrar que si A e I son matrices de orden n, entonces

$$A \bullet \text{adj}(A) = |A|\, I$$

Demostración . En efecto, consideremos el producto

$$A.\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \hline \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{j2} & \cdots & A_{n2} \\ \bullet & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ A_{1k} & A_{2k} & \cdots & A_{jk} & \cdots & A_{nk} \\ \bullet & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

El elemento que se encuentra en la i-ésima fila y la j-ésima columna de A.adj(A) es:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots\dots\dots + a_{in}A_{jn} \qquad (1)$$

Si i = j, entonces (1) es el desarrollo por cofactores del D(A) a lo largo de la i-ésima fila de A (ver ecuación 5). Por tanto, si $i \neq j$, entonces los elementos y los cofactores provienen de diferentes filas de A, de donde, el valor de (1) es cero.

En consecuencia:

$$A.\ \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \cdots & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|\, I$$

Si en esta igualdad efectuamos el producto indicado en el segundo miembro, obtenemos

$$A.\ \text{adj}(A) = |A|^n$$

Tomando determinantes en ambos extremos resulta

$$|A.\text{adj}\ (A)| = |A|^n \Rightarrow |A| \bullet |\text{adj}(A)| = |A|^n$$

$$\therefore |\text{adj}\ (A)| = |A|^{n-1} \qquad \text{(AD.6)}$$

Ejemplo 2 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular la adj(A).

Solución . Primero calculemos la matriz de cofactores

$$C = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz adjunta de A es : $\text{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ ■

Examinemos el producto A • adj(A) de este ejemplo

$$A \bullet \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = -3\, I$$

Hallemos ahora el determinante de A

$$D(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2-1) - 3(4-1) + 4(2-1) = -3$$

De estos dos resultados podemos escribir

$$A \bullet \text{adj}\ (A) = |A|\, I$$

Por lo que, es posible establecer una fórmula para calcular la inversa de una matriz inversible.

9.5.6 INVERSA DE UNA MATRIZ

Consideremos primero el caso siguiente.

Sea una matriz de segundo orden $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, cuyo $D(A) \neq 0$

Se desea hallar una inversa para A, esto es, una matriz tal como:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \qquad (1)$$

de manera que: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

o sea: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Los productos escalares de los vectores fila por los vectores columna nos permite establecer las ecuaciones siguientes:

$a_{11}x + a_{12}z = 1$ (2) $\qquad a_{11}y + a_{12}w = 0$ (4)

$a_{21}x + a_{22}z = 0$ (3) $\qquad a_{21}y + a_{22}w = 1$ (5)

Resolviendo (2) y (3) obtenemos:

$$x = \frac{a_{22}}{D(A)} \quad , \quad z = -\frac{a_{21}}{D(A)}$$

La resolución de (4) y (5) da por resultado:

$$y = -\frac{a_{12}}{D(A)} \quad , \quad w = \frac{a_{11}}{D(A)}$$

Sustituyendo en (1) se tiene que : $A^{-1} = \frac{1}{D(A)}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

lo que nos permite enunciar el siguiente teorema

TEOREMA 9.2 La matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ tiene una inversa A^{-1} si y sólo si el $D(A) \neq 0$. Además, si $D(A) \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Obsérvese que para calcular la inversa de una matriz de segundo orden, basta hallar el D(A), luego intercambiar los elementos de la diagonal principal y cambiar de signo a los elementos de la otra diagonal.

Ejemplo 3 Determinar la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$

Solución . Primero calculemos: $D(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 18 = 2$

Como el $D(A) \neq 0$, por la fórmula (10), se tiene:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 & -3/2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$ ■

Ejemplo 4 Resolver la ecuación: $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Solución . Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow D(A) = 3(-2) - 5(-1) = -1$

Por la fórmula (10) : $A^{-1} = -\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

Multiplicando cada miembro de la ecuación por A^{-1} se tiene:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad (A^{-1}A = I)$$

$$\Rightarrow IX = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$ ■

Ejemplo 5 Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$,

hallar las matrices C y D tales que AC = B y DA = B.

Solución . Si AC = B $\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$ (1)

$$D(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando (2) por A^{-1} (izquierda de B), la ecuación (1) se tiene:

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} C = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 15 & 13 \\ 16 & 14 \end{bmatrix}$$

$$D(A) = B \Rightarrow D\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Multiplicando (2) por A^{-1} (derecha de B), obtenemos:

$$D\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{, de donde : } D = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 & 19 \\ 43 & 25 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6 Resolver el sistema:

$$X + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$X + \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Solución . Restando (1) - (2) obtenemos : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ (3)

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D(A) = -2, \text{ luego : } A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando la ecuación (3) por A^{-1} (izquierda de A), se tiene:

$$IY = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{, en (1): } X = \begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Determinar λ tal que $D(A - \lambda I) = 0$

b) Hallar la matriz X de orden 2 x 1 tal que $AX = \lambda X$

c) Hallar B^{-1}, siendo $B = [X_1\ X_2]$ y X es la matriz de la parte (b).

Solución .

a) $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow D(A - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda$

Si $D(A) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0$ ó $\lambda_2 = 3$

b) $AX = \lambda_1 X \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x + 2y \\ x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

de donde: $x = -2y \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$AX = \lambda_2 X \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x + 2y \\ x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos : $x + 2y = 3x \Rightarrow x = y \Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $B = [X_1\ X_2] = y\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D(B) = y(-2 -1) = -3y$

$$\therefore B^{-1} = -\frac{y}{3y}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad ■$$

Ejemplo 8 Sea $P = \begin{pmatrix} Sen^2\theta & Cos^2\theta \\ Cos^2\theta & Sen^2\theta \end{pmatrix}$. Considerar que $P = NAN^{-1}$, donde

i) $A = [a_{ij}]$, de segundo orden, tal que: $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ si } i \neq j \\ \lambda_j, \text{ si } i = j \end{cases}$

con λ_1, λ_2 raíces de la ecuación $D(\lambda I - P) = 0$

ii) N es una matriz de segundo orden, cuyas columnas llamadas $C_j \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

cumplen la ecuaión matricial: $PC_j = \lambda_j C_j$, $j = 1, 2$

a) Hallar P^k, $K \in \mathbf{Z}^+$

b) Demostrar que $Tr(P^{2k}) = 1 + Cos^{2k} 2\theta$

c) Hallar $P^6(\pi/8)$

Solución .

i) Por la definición dada: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$\lambda I - P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Sen^2\theta & Cos^2\theta \\ Cos^2\theta & Sen^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-Sen^2\theta & -Cos^2\theta \\ -Cos^2\theta & \lambda-Sen^2\theta \end{pmatrix}$$

Si $D(\lambda I - P) = 0 \Rightarrow (\lambda - Sen^2\theta)^2 - Cos^4\theta = 0$

de donde:

$$\lambda^2 - 2\lambda\, Sen^2\theta + Sen^4\theta - Cos^4\theta = 0 \Rightarrow \lambda = Sen^2\theta \pm \sqrt{Sen^4\theta + Cos^4\theta - Sen^4\theta}$$

$$\Rightarrow \lambda = Sen^2\theta \pm Cos^2\theta \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ ó } \lambda_2 = -Cos2\theta \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -Cos2\theta \end{pmatrix}$$

ii) Sea $N = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ cuyas columnas $C_i \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Si $PC_1 = \lambda_1 C_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} Sen^2\theta & Cos^2\theta \\ Cos^2\theta & Sen^2\theta \end{pmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

de donde : $a\,Sen^2\theta + b\,Cos^2\theta = a \Rightarrow bCos^2\theta = a(1 - Sen^2\theta) \Leftrightarrow b = a$

$a\,Cos^2\theta + b\,Sen^2\theta = b \Rightarrow aCos^2\theta = b(1 - Sen^2\theta) \Leftrightarrow a = b$

Luego, $C_1 = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Si $PC_2 = \lambda_2 C_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} Sen^2\theta & Cos^2\theta \\ Cos^2\theta & Sen^2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ b \end{bmatrix} = -Cos2\theta\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$

$\Rightarrow c\,Sen^2\theta + d\,Cos^2\theta = -c\,Cos2\theta = c\,Sen^2\theta - c\,Cos^2\theta \Rightarrow d = -c \Leftrightarrow c = -d$

$c\,Cos^2\theta + d\,Sen^2\theta = -d\,Cos2\theta = d\,Sen^2\theta - d\,Cos^2\theta \Rightarrow c = -d$

Luego, $C_2 = \begin{bmatrix} -d \\ d \end{bmatrix} = d\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Por lo que: $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow N^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Si $P = NAN^{-1} \Rightarrow P^2 = (NAN^{-1})(NAN^{-1}) = (NA)(N^{-1}N)(AN^{-1})$

$= NA(I)AN^{-1} = NA^2N^{-1}$

$P^3 = PP^2 = (NAN^{-1})(NA^2N^{-1}) = NA(N^{-1}N)A^2N^{-1}$

$= NA(I)A^2N^{-1} = NA^3N^{-1}$

Por simple inspección : $P^k = NA^kN^{-1}$ (1)

Ahora: $A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -Cos2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -Cos2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Cos^2 2\theta \end{bmatrix}$

$A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -Cos2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Cos^2 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -Cos^3 2\theta \end{bmatrix}$

Por simple inspección: $A^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^k Cos^k 2\theta \end{bmatrix}$

Luego, en (1): $P^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^k Cos^k 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & (-1)^{k+1}\;Cos^k 2\theta \\ 1 & (-1)^{k+1}\;Cos^k 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

de donde obtenemos : $P^k = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+(-1)^k Cos^k 2\theta & 1-(-1)^k Cos^k 2\theta \\ 1-(-1)^k Cos^k 2\theta & 1+(-1)^k Cos^k 2\theta \end{bmatrix}$

b) $P^{2k} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+(-1)^{2k} Cos^{2k} 2\theta & 1-(-1)^{2k} Cos^{2k} 2\theta \\ 1-(-1)^{2k} Cos^{2k} 2\theta & 1+(-1)^{2k} Cos^{2k} 2\theta \end{bmatrix}$

$\Rightarrow Tr(P^{2k}) = 1/2\,[1+(-1)^{2k} Cos^{2k} 2\theta + 1+(-1)^{2k} Cos^{2k} 2\theta] = 1+(-1)^{2k} Cos^{2k} 2\theta$

$\therefore Tr(P^{2k}) = 1 + Cos^{2k} 2\theta$

c) $P^6(\pi/8) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+Cos^6(\pi/4) & 1-Cos^6(\pi/4) \\ 1-Cos^6(\pi/4) & 1+Cos^6(\pi/4) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9/8 & 7/8 \\ 7/8 & 9/8 \end{bmatrix}$

$\therefore P^6(\pi/8) = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ ■

EJERCICIOS. *Grupo 54*

1. Si B es el adjunto clásico de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

   hallar el valor de la suma $S = B_{32} + B_{23} + B_{42}$

2. Si B es el adjunto clásico de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

   hallar el valor de $E = \dfrac{B_{22} + B_{41}}{B_{43} - B_{31}}$

3. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden n, tal que $D(A) = 0$. Demostrar que $A \bullet adj(A) = 0$.

4. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, hallar A^{-2}

5. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, si $AX = A^t$, hallar $2/3\,X^t$

6. Hallar la suma de los menores valores que pueda tomar x, si se sabe que la matriz $A = \begin{bmatrix} 2Cotg\,x & -Cosx \\ Cosec\,x & Senx \end{bmatrix}$ no es inversible.

7. Si ABXC = D, donde A, B, C, D, y X son matrices cuadradas del mismo orden, despejar la matriz X.

8. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

resolver las ecuaciones : a) $A X B = C$, b) $B X C = A^t$

9. Resolver el sistema : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

10. Resolver el sistema : $2X + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X + 3Y = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

En los ejercicios del 11 al 18, resolver las ecuaciones matriciales

11. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

12. $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

13. $X \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 10 \\ -18 & 9 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -22 \end{pmatrix}$

19. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -3 & -6 & 3 \\ 5 & 4 & -14 \end{pmatrix}$; hallar la matriz

$E = adj(A) - adj(B) - C^t$.

20. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Hallar el polinomio $P(x) = |A - xI|$, $x \in \mathbf{R}$, I: matriz identidad

b) Resolver la ecuación $P(x) = 0$

c) Con las raices x_1, x_2 hallados en b), determinar las matrices B y C de orden 2 x 1, tales que: $AB = x_1 B$, $AC = x_2 C$

21. Determinar la matriz A, triangular superior que satisface:

$$A^t BA = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/2 \\ 3/2 & 13 \end{pmatrix} B^t$$

siendo B una matriz simétrica, inversible, tal que AB = BA

22. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, determinar la matriz X en la ecuación $(AX^t + A^t)^t = 3A - I$

TEOREMA 9.3 *Inversa de una matriz cuadrada de orden n*

Si A ese uan matriz inversible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

Demostración . En efecto, en el Ejemplo 1 de la Sección 9.5.5 , habiamos demostrado que

$$A \cdot adj(A) = |A| \cdot I$$

Dado que A es inversible, $|A| \neq 0$, entonces esta ecuación se puede escribir

$$A\left(\frac{1}{|A|}\right) adj\,(A) = I$$

Si multiplicamos ambos mienbros de esta igualdad por A^{-1} obtenemos

$$A^{-1}A\left(\frac{1}{|A|}\right) adj(A) = A^{-1} I \Rightarrow I\left(\frac{1}{|A|}\right) adj\,(A) = A^{-1} I$$

$$\therefore \boxed{A^{-1} = \left(\frac{1}{|A|}\right) adj(A)} \qquad (11)$$

TEOREMA 9.4 *Propiedades de la inversa de una matriz cuadrada*

Sean A, B $\in K^n$, matrices inversibles, esto es, $D(A) \neq 0$, $D(B) \neq 0$ y $r \in R$. un escalar, entonces se cumple:

I.1: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

I.2: $(A^{-1})^{-1} = A$

I.3: $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

I.4: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

I.5: $(rA)^{-1} = r^{-1} A^{-1}$

I.6: $(In)^{-1} = In$

I.7: $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

I.8: $adj(A^{-1}) = [adj(A)]^{-1} = A / |A|$

La demostración del teorema queda a cargo del lector

Nota . Si $B = [b_{ij}] = A^{-1} \Rightarrow b_{ij} = \dfrac{A_{ji}}{|A|}$, siendo $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Ejemplo 1 Calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

Solución . En primer lugar calculamos el determinante de A, desarrollando por los cofactores de la primera fila:

$$D(A) = 3(-3-5) - 4(-2-3) + 5(10-9) = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Enseguida, calculamos la adjunta de A

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 1 \\ 29 & -18 & -3 \\ -11 & 7 & 1 \end{pmatrix}^t$$

Luego, haciendo uso de la fórmula (11): $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ 5 & -18 & 7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ ■

Ejemplo 2 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Si $AX = A^t$, hallar $2X^t$

Solución . El determinante de A, por los cofactores de la primera fila, es:

$$D(A) = 1(9-16) - 2(3-4) + 3(4-3) = -2$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t$$

Ahora, por la fórmula (11), se tiene que : $A^{-1} = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Si $AX = A^t \Rightarrow X = A^{-1}A^t \Rightarrow X = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 14 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

$$\therefore \quad 2X^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -7 & 3 & 1 \\ -14 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$ ■

Ejemplo 3 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a+b & 0 \\ 2 & 5 & a \\ b & x & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica, hallar A^{-1}.

Solución. Dado que $A = A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a+b & 0 \\ 2 & 5 & a \\ b & x & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ a+b & 5 & x \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a+b = 2 \Rightarrow a = 2 \\ x = a \Rightarrow x = 2 \end{cases}$

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(15-4) - 2(6-0) = -1$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 4 \\ -6 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t$$

$$\therefore \; A^{-1} = -1\begin{pmatrix} 11 & -6 & 4 \\ -6 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -4 \\ 6 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$ ■

Ejemplo 4 Hallar, si existe, la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Solución . La matriz tiene la forma : $A = \begin{pmatrix} X & \theta \\ Y & Z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow D(A) = D(X)\cdot D(Z) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (1)(1) = 1$$

Los elementos de la matriz de cofactores son:

$A_{11} = 2$, $A_{12} = -3$, $A_{13} = 31$, $A_{14} = -23$

$A_{21} = -1$, $A_{22} = 2$, $A_{23} = -19$, $A_{24} = 14$

$A_{31} = 0$, $A_{32} = 0$, $A_{33} = 3$, $A_{34} = -2$

$A_{41} = 0$, $A_{42} = 0$, $A_{43} = -4$, $A_{44} = 3$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 31 & -23 \\ -1 & 2 & -19 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 5 Dadas las matrices $A, B \in K^n$, tales que $|A| \neq 0$ y $|B| \neq 0$, demostrar que :

a) $\text{adj}(AB) = \text{adj}(B)\cdot\text{adj}(A)$

b) $\text{adj}(A^{-1}) = [\text{adj}(A)]^{-1}$

c) $|\text{adj}[\text{adj}(A)]| = |A|^{(n-1)^2}$

Demostración .

a) En efecto, por definición de matriz inversa : $\text{adj}(A) = |A|\,A^{-1}$

$$\Rightarrow \quad \text{adj}(AB) = |AB|\,(AB)^{-1}$$
$$= |A|\,|B|\,(B^{-1}A^{-1}) \qquad \text{(Teor.9.4: I.3)}$$

Como $|A|$ y $|B|$ son escalares, podemos escribir

$$\text{adj}(AB) = (|B|\,B^{-1})(|A|\,A^{-1}) = \text{adj}(B)\cdot\text{adj}(A)$$

b) En efecto, por definición : $\text{adj}(A^{-1}) = |A^{-1}|\,(A^{-1})^{-1}$

$$= |A|^{-1}(A^{-1})^{-1}$$
$$= [\,|A|\,(A^{-1})\,]^{-1} \qquad \text{(Teor. 9.4: I.5)}$$
$$= [\,\text{adj}(A)\,]^{-1}$$

c) Efectivamente, si $\text{adj}(A) = |A|\,A^{-1} \Rightarrow \text{adj}[\text{adj}(A)] = |\text{adj}(A)|\,[\text{adj}(A)]^{-1}$ y por las propiedades AD.6 y AD.7 de la matriz adjunta se tiene :

$$\text{adj}[\text{adj}(A)] = |A|^{n-1}\,\text{adj}(A^{-1}) = |A|^{n-1}\left(\frac{A}{|A|}\right) = |A|^{n-2}A$$

Luego, tomando determinantes en ambos mienbros se tiene:

$$|\text{adj}[\text{adj}(A)]| = |\,|A|^{n-2}A\,|$$
$$= (|A|^{n-2})^n\,|A| = |A|^{n(n-2)}\,|A| = |A|^{(n-1)^2} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 6 Si A es una matriz de orden n tal que $|A| \neq 0$, $A^3 = -A$, $\lambda \in \{0\}$, demostrar que: $\lambda^{n-1}\,\text{adj}(\lambda A^4) = I$

Demostración . Si $A^3 = -A \Rightarrow A^3A = -A\,A$

$$\Rightarrow A^4 = -A^2 \qquad (1)$$

Como $|A| \neq 0$, la matriz A es inversible, por lo que:

$$A^3A^{-1} = -A\,A^{-1} \Rightarrow A^2\,A\,A^{-1} = -I$$
$$\Rightarrow A^2 = -I \qquad (2)$$

De (1) y (2), se sigue que: $A^4 = I$

$$\Rightarrow \text{adj}(\lambda A^4) = \text{adj}(\lambda I) = |\lambda I|\,(\lambda I)^{-1}$$
$$= \lambda^n(\lambda^{-1}I^{-1}) = \lambda^{n-1}I$$
$$\therefore \lambda^{1-n}\,\text{adj}(\lambda A^4) = \lambda^{1-n}(\lambda^{n-1}I) = I \quad \blacksquare$$

Ejemplo 7 Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, hallar la suma de los elementos de la tercera fila de su inversa.

Solución . El determinante de A por los cofactores de la primera fila es

$$D(A) = 2(5-1) - 3(1-5) + 1(1-25) = -4$$

Si B es la inversa de A, entonces

$$S = b_{31} + b_{32} + b_{33} = \frac{A_{13}}{|A|} + \frac{A_{23}}{|A|} + \frac{A_{33}}{|A|}$$
$$= \frac{-24}{-4} + \frac{-13}{-4} + \frac{7}{-4} = \frac{-24+13+7}{-4} = 1 \quad \blacksquare$$

Ejemplo 8 Si $\text{adj}(A) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, hallar :

a) La traza de A^{-1} , b) La matriz A. Es A única?

Solución . a) Por definición : $\text{adj}(A) = |A|\,A^{-1}$

Tomando determinantes a ambos extremos se tiene

$$|adj\,(A)| = ||A|\,A^{-1}| = |A|^3\,|A^{-1}| = |A|^2 \qquad (1)$$

$$|adj\,(A)| = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{64}\right)[1\,(16-9) - 3\,(4-3) + 3\,(3-4)] = \frac{1}{64}$$

Luego, en (1): $|A|^2 = 1/64 \Rightarrow |A| = \pm\, 1/8 \Rightarrow A^{-1} = \pm 2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ Tr(A^{-1}) = \pm\, 2\,(1 + 4 + 4) = \pm 18$$

b) Para determinar la matriz A, aplicamos la propiedad

$$(A^{-1})^{-1} = A \ \Rightarrow\ A = \left(\frac{1}{|A^{-1}|}\right) adj(A^{-1}) = |\,A\,|\ adj\,(A^{-1})$$

Calculando la adj(A^{-1}) obtenemos finalmente

$$A = \pm\,\frac{1}{8}\,(4)\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \pm\,\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Existe dos soluciones, por tanto A no es única ■

9.5.7 MATRICES NO SINGULARES

Se dice que una matriz A es ***no singular*** si y sólo si el $D(A) \neq 0$, es decir, si admite una inversa.

Se dice que una matriz cuadrada A es ***singular*** si y sólo si el $D(A) = 0$, o en su defecto, si no admite una inversa.

Ejemplo 9 Si $A = \begin{bmatrix} 2\,Sen\,2x & 3 \\ Cos\,2x & Sen\,2x \end{bmatrix}$, hallar los valores de x de modo que A sea singular.

Solución . Para que A sea una matriz singular se debe cumplir que $D(A) = 0$

$$\Rightarrow\ D\,(A) = \begin{vmatrix} 2\,Sen\,2x & 3 \\ Cos\,2x & Sen\,2x \end{vmatrix} = 2\,Sen^2 2x - 3\,Cos\,2x = 0$$

de donde obtenemos: $2\,Cos^2 2x - Cos\,2x - 2 = 0 \Leftrightarrow Cos\,2x = 1/2$ ó $Cos\,2x = -2$

Para la segunda alternativa no existe solución, luego, si

$$Cos\,2x = 1/2 \Leftrightarrow 2x = 2k\pi \pm \pi/3 \Leftrightarrow x = k\pi \pm \pi/6.\ k \in N$$ ■

Ejemplo 10 Sean las matrices $AB = \begin{bmatrix} 7 & 23 & 25 \\ 5 & 16 & 16 \\ a-1 & 4a-3 & 3a-6 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Si A es una matriz singular, hallar el valor de *a*

Solución . Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz singular de tercer orden, tal que $D(A) = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 23 & 25 \\ 5 & 16 & 16 \\ a-1 & 4a-3 & 3a-6 \end{bmatrix}$$

Del producto escalar de la primera fila de A por las columnas de B, obtenemos:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + a_{13} &= 7 \\ 3a_{11} + 4a_{12} + 3a_{13} &= 23 \\ 3a_{11} + 3a_{12} + 4a_{13} &= 25 \end{aligned}$$

Efectuando transformaciones elementales en la matriz aumentada del sistema, se tiene :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 3 & 23 \\ 3 & 3 & 4 & 25 \end{array}\right] \xrightarrow[-3F_1+F_3]{-3F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{-F_2+F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-F_3+F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{12} = 2 \\ a_{13} = 4 \end{cases}$$

Del producto escalar de la segunda fila de A por las columnas de B, resulta:

$$\begin{aligned} a_{21} + a_{22} + a_{23} &= 5 \\ 3a_{21} + 4a_{22} + 3a_{23} &= 16 \\ 3a_{21} + 3a_{22} + 4a_{23} &= 16 \end{aligned}$$

Efectuando operaciones elementales en la matriz aumentada del sistema, se tiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 16 \\ 3 & 3 & 4 & 16 \end{array}\right] \xrightarrow[-3F_1+F_3]{-3F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-F_3+F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-F_2+F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} a_{21} = 3 \\ a_{22} = 1 \\ a_{23} = 1 \end{cases}$$

Finalmente, del producto escalar de la tercera fila A por las columnas de B, obtenemos:

$$\begin{aligned} a_{31} + a_{32} + a_{33} &= a - 1 \\ 3a_{31} + 4a_{32} + 3a_{33} &= 4a - 3 \\ 3a_{31} + 3a_{32} + 4a_{33} &= 3a - 6 \end{aligned}$$

La matriz aumentada del sistema es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 3 & 4 & 3 & 4a-3 \\ 3 & 3 & 4 & 3a-6 \end{array}\right] \xrightarrow[-3F_1+F_3]{-3F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{-F_2+F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-F_3+F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} a_{31} = 2 \\ a_{32} = a \\ a_{33} = -3 \end{cases}$$

Luego, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & a & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow D(A) = 1(-3-a) -2\,(-9-2) + 4(3a-2) = 11a + 11$

Por lo tanto, si $D(A) = 0 \Rightarrow 11a + 11 = 0 \Leftrightarrow a = -1$ ■

Ejemplo 11 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} x & b & 1 & 1 \\ b & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & b \\ 1 & 1 & b & x \end{bmatrix}$, determinar los valores de x tales que la matriz A sea no singular.

Solución . Para que A sea una matriz no singular es necesario que el $D(A) \neq 0$.

Calculamos el D(A) sumando las últimas filas a la primera

$$D(A) = \begin{vmatrix} x+b+2 & x+b+2 & x+b+2 & x+b+2 \\ b & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & b \\ 1 & 1 & b & x \end{vmatrix} = (x+b+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & b \\ 1 & 1 & b & x \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{-C_1+C_2} \\ \xrightarrow{-C_1+C_3} \\ \xrightarrow{-C_1+C_4} \end{matrix}$$

$$= (x+b+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & x-b & 1-b & 1-b \\ 1 & 0 & x-1 & 1-b \\ 1 & 0 & b-1 & x-1 \end{vmatrix} = (x+b+2) \begin{vmatrix} x-b & 1-b & 1-b \\ 0 & x-1 & b-1 \\ 0 & b-1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+b+2)\,(x-b) \begin{vmatrix} x-1 & b-1 \\ b-1 & x-1 \end{vmatrix} = (x + b + 2)\,(x - 1)\,[(x - 1)^2 - (b - 1)^2]$$

$$= (x + b + 2)\,(x - b)\,(x - b)\,(x + b - 2)$$

En consecuencia, si $D(A) \neq 0 \Rightarrow x \neq -(b + 2),\ x \neq b\ ,\ x \neq 2 - b$ ■

EJERCICIOS . Grupo 55

En los ejercicios del 1 al 12, por el método de la adjunta, hallar la inversa, si existe, para la matriz A. Comprobar en cada caso que $A\,A^{-1} = I$

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ **2.** $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ **3.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -6 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ **5.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ **6.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **8.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **9.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **11.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **12.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios del 13 al 16, resolver las ecuaciones matriciales

13. $X \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

15. $X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}$

17. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ son dos matrices.

Hallar la matriz X tal que: $A\,B\,X + B^t = A$.

18. Halle la matriz X que satisface la ecuación matricial $3A + AX = B + C$, en donde:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 12 & -5 \\ 6 & 15 & -9 \\ -7 & 6 & -11 \end{bmatrix}$

19. Si $A^3 = I$, hallar $\text{adj}(a\,A^5)$, $a \neq 0$.

20. Si B es la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}$, calcular el valor de la suma $S = b_{12} - 6\,b_{23} + b_{31}$.

21. Si B es la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, hallar el valor de la suma $S = 2b_{23} + 3b_{33} + b_{31}$

22. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 9 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ y B su inversa, hallar $S = 2b_{33} + b_{31} + b_{34}$

23. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Si $M = A + A^t + B^{-1}$, calcular el valor de la suma $S = m_{12} + m_{13} + m_{23}$

24. Si $A = \begin{pmatrix} x+1 & -2 & -2 \\ -2 & x-2 & -2 \\ 3 & 6 & x+6 \end{pmatrix}$, hallar los valores de x para los cuales $\exists\ A^{-1}$.

25. Si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ x-3 & 0 & x-1 \\ 1 & x+2 & 3 \end{pmatrix}$ es singular, hallar x.

26. Si $A = \begin{pmatrix} \text{Cotg } x & \text{Cos}(90+x) & 1 \\ \text{Cosec } x & \text{Sen}(90+x)/\text{Sen}x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar los valores de x para los cuales la matriz A no es inversible.

27. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, hallar los valores de x para los cuales $\nexists\ A^{-1}$.

28. Para qué valores de x, $\exists\ A^{-1}$, si $A = \begin{pmatrix} x & 3 & -x \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -x & 3 \end{pmatrix}$. Además hallar A^{-1}.

29. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$, a) Hallar D(A), b) Calcular A^{-1}.

30. Dadas las matrices : $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \\ 6 & 7 & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -b & 4 \\ 6 & 7 & -d \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & e \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

hallar a, b, d, e y la matriz X sabiendo que $AX = BX - I$ y $XC = I$

9.5.8 RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES EN DOS VARIABLES

Sea el sistema :

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

La ecuación matricial equivalente al sistema es

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

que representamos por : $AX = C$

donde :

A = Matriz de los coeficientes

X = Matriz de las incognitas

C = Matriz de los términos independientes

Para despejar la matriz X operamos de la siguiente manera :

$$AX = C \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C$$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}C \qquad \text{(Propiedad asociativa)}$$

$$\Rightarrow (I)X = A^{-1}C \qquad \text{(Definición de } A^{-1})$$

$$\therefore \boxed{X = A^{-1}C} \qquad (12)$$

Nota . Para hacer uso de la ecuación (12) y obtener la matriz X, se debe multiplicar A^{-1} por la izquierda de C.

Ejemplo 1 Resolver el sistema :

$$3x + 4y = 6$$
$$5x + 3y = -1$$

Solución . Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow D(A) = 9 - 20 = -11$

Por la fórmula (10), la inversa ded A es : $A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

y por la fórmula (12) : $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 22 \\ -33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Por lo que, el conjunto solución del sistema es

$$S = \{(-2,3)\}$$ ■

9.5.9 RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES EN TRES VARIABLES

Sea el sistema :

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

La ecuación matricial equivalente al sistema es :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

que representaremos por :

$$A\,X = D$$

donde A, X y D tienen el mismo significado que el dado en la Sección 9.5.8. Entonces, si existe A^{-1} y si AX = D, si y sólo si

$$\boxed{X = A^{-1}D} \qquad (13)$$

Ejemplo 2 Resolver el sistema :

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 9 \\ 2x - y + z &= 3 \end{aligned}$$

Solución . Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow D(A) = 1(-1+3) - 2(2-6) - 1(2+2) = 10$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 5 & -5 & -5 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Luego, la inversa de la matriz A es : $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$

Según la ecuación (13) : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$

Por tanto, el conjunto solución del sistema es :

$$S = \{(1, 2, 3)\}$$

El siguiente teorema establece una fórmula para resolver un sistema de n ecuaciones en n cógnitas. La fórmula en cuestión se conoce con el nombre de *Regla de Cramer.*

TEOREMA 9.4 REGLA DE CRAMER

Si AX = B es un sistema de n ecuaciones en n incógnitas tal que D(A) ≠ 0, entonces el sistema tiene solución única y esta dada por

$$x_1 = \frac{D(A_1)}{D(A)}\ ,\ x_2 = \frac{D(A_2)}{D(A)}\ , \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ x_n = \frac{D(A_n)}{D(A)}$$

donde Aj es la matriz que se obtiene al reemplazar los elementos de la j-ésima columna de A por los elementos de la matriz.

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

Demostración . Sea el sistema :

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots\cdots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots\cdots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \bullet & & \bullet & & & \bullet & \bullet \\ \bullet & & \bullet & & & \bullet & \bullet \\ \bullet & & \bullet & & & \bullet & \bullet \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots\cdots + & a_{nn}x_n & = b_n \end{array}$$

Si D(A) ≠ 0, entonces A es inversible y, por la ecuación (12), $X = A^{-1}B$ es la solución única de AX = B. Luego :

$$X = A^{-1}B = \left(\frac{1}{|A|}\right) \text{adj}(A).B = \left(\frac{1}{|A|}\right)\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots\cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots\cdots & A_{n2} \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots\cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ b_n \end{bmatrix}$$

multiplicando las matrices obtenemos

$$X = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots\cdots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots\cdots + b_nA_{n2} \\ \bullet \qquad \bullet \qquad \bullet \\ \bullet \qquad \bullet \qquad \bullet \\ \bullet \qquad \bullet \qquad \bullet \\ \bullet \qquad \bullet \qquad \bullet \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots\cdots + b_nA_{nn} \end{bmatrix}$$

Por tanto, el elemento de la fila j-ésima de X es

$$X_i = \frac{b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \cdots\cdots + b_nA_{ni}}{D(A)}$$

donde el numerador es el desarrollo del determinante de la matriz A_i obtenida a partir de A, sutituyendo la j-ésima columna.

$$\begin{bmatrix} a_{1i} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ a_{ni} \end{bmatrix} \text{ por el vector } \begin{bmatrix} b_1 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ b_n \end{bmatrix}$$

En consecuencia, para j = 1, 2, 3, ..., n

$$x_i = \frac{D(A_i)}{D(A)} \qquad (14)$$

Ejemplo 3 Aplicando la regla de Cramer, resolver el sistema :

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Solución . La matriz de los coeficientes es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow D(A) = 1(-6+1) + 2(4-3) + 3(-2+9) = 18$$

$$D(A_1) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 9 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 54 \ ; \quad D(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 36 \ ; \quad D(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 18$$

Por lo tanto, haciendo uso de la fórmula (14) obtenemos :

$$x_1 = \frac{D(A_1)}{D(A)} = 3 \ ; \quad x_2 = \frac{D(A_2)}{D(A)} = 2 \ ; \quad x_3 = \frac{D(A_3)}{D(A)} = 1$$

$$\therefore \ S = \{(3, 2, 1)\}$$

Obsérvese que la columna $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$ se desplaza de la primera a la segunda y después a la tercera columna al resolver para x_1, x_2 y x_3, respectivamente.

Nota . La resolución de un sistema de n ecuaciones en n incógnitas mediante la regla de Cramer, implica calcular n+1 determinantes de matrices de orden n. Debido al gran número de operaciones aritméticas que deben efectuarse, la regla de Cramer sólo es prática para el cálculo de $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, cuando n es pequeño. Cuando n ≥ 4 se prefiere usar la ténica de la eliminación de Gauss.

Ejemplo 4 Dado el sistema :

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= \lambda^2 \end{aligned}$$

Determinar los valores de λ de modo que el sistema tenga solución única .

Solución . El determinante de la matriz de coeficientes es :

$$D(A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & \lambda+2 & \lambda+2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$$

Según la regla de Carmer, el sistema tendrá solución única si el $D(A) \neq 0$, esto es, si $\lambda \neq -2$ ó $\lambda \neq 1$, o bien si $\lambda \in R - \{-2, 1\}$

Veamos que sucede cuando $\lambda = -2$ y $\lambda = 1$

Para $\lambda = -2$, la matriz aumentada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{12}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1 + F_3]{2F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) = E$$

Como $\rho(A) = 2 < \rho(E) = 3$, el sistema es inconsistente, es decir, no existe solución.

Para $\lambda = 1$, la matriz aumentada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = E$$

En este caso, $\rho(A) = \rho(E) = 1 < 3$ (número de incógnitas), el sistema tiene infinitas soluciones. El número de variables libres es $3 - 1 = 2$, es decir, la solución del sistema depende de dos parámetros. Si designamos a $y=r$, $z=s \Rightarrow x = 1-r-s$, y el conjunto solución para $\lambda = 1$ es :

$$S = \{(1-r-s, r, s)\}$$

■

Ejemplo 5 Dado el sistema :

$$\begin{aligned} (2m+1)x &- my + (m+1)z = m-1 \\ (m-2)x &+ (m-1)y + (m-2)z = m \\ (2m-1)x &+ (m-1)y + (2m-1)z = m \end{aligned}$$

Determinar para qué valores de m.

a) El sistema tiene solución única.
b) La solución del sistema depende de un parámetro.
c) El sistema es inconsistente.

Solución **.** El determinante de la matriz de coeficiente es

$$D(A) = \begin{vmatrix} 2m+1 & -m & m+1 \\ m-2 & m-1 & m-2 \\ 2m-1 & m-1 & 2m-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & -m & m+1 \\ 0 & m-1 & m-2 \\ 0 & m-1 & 2m-1 \end{vmatrix}$$

$$= m\begin{vmatrix} m-1 & m-2 \\ m-1 & 2m-1 \end{vmatrix} = m(m-1)\begin{vmatrix} 1 & m-2 \\ 1 & 2m-1 \end{vmatrix} = m(m-1)(m+1)$$

a) Por la Regla de Cramer, el sistema tiene solución única si $D(A) \neq 0$, esto es, si $m \neq 0$, $m \neq -1$, o bien si $m \in R - \{0, -1, 1\}$

Para $m = 0$, la matriz aumentada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+F_3]{2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = E$$

Como $\rho(A) = 2 < \rho(E) = 3$, el sistema es inconsistente

Para m=1, la matriz aumentada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{13}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3F_1+F_3]{F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_{23}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = E$$

Como $\rho(A) = 2 < \rho(E) = 3$, el sistema es inconsistente

Para m=-1, la matriz aumentada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[-3F_1+F_3]{-3F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & -3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = E$$

Como $\rho(A) = \rho(E) = 2 < 3$ (número de incognitas), el sistema tiene infinitas soluciones. Numero de variables libres: $3 - 2 = 1$

En consecuencia

b) El sistema depende de un parámetro si $m = -1$

c) El sistema es inconsistente para $m = 0$ y $m = 1$

EJERCICIOS . Grupo 56

En los ejercicos del 1 al 15, resolver el sistema dado por dos métodos :

a) Estableciendo la ecuación matricial AX = B.

b) Utilizando la regla de Cramer.

1. $$\begin{array}{l} 5x - 9y = 17 \\ 3x - 8y = 5 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{l} 3x + 7y = 25 \\ 4x + 5y = 13 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{l} x\operatorname{Cos}b - y\operatorname{Sen}b = \operatorname{Cos}c \\ x\operatorname{Sen}b + y\operatorname{Cos}b = \operatorname{Sen}c \end{array}$$

4. $$\begin{array}{l} 3x - 5y = 13 \\ 2x - 7y = 81 \end{array}$$

5. $$\begin{array}{l} 2ax - 3by = 0 \\ 3ax - 6by = ab \end{array}$$

6. $$\begin{array}{l} x\operatorname{Tg}b + y = \operatorname{Sen}(b+c) \\ x - y\operatorname{Tg}b = \operatorname{Cos}(b+c) \end{array}$$

7. $$\begin{array}{l} 2x + y - 3z = -2 \\ x - 2y - 4z = 4 \\ 3x + 4y - 5z = -1 \end{array}$$

8. $$\begin{array}{l} 3x - y - 2z = 4 \\ 2x + y + 4z = 2 \\ 7x - 2y - z = 4 \end{array}$$

9. $$\begin{array}{l} 2x - 5y + 2z = -2 \\ 4x + 6y - z = 23 \\ 2x + 7y + 4z = 24 \end{array}$$

10. $$\begin{array}{l} 3x - 4y - 6z = -16 \\ 4x - y - z = 5 \\ x - 3y - 2z = -2 \end{array}$$

11. $$\begin{array}{l} 3x + 4y - z = 1 \\ 4x + 6y + 2z = -3 \\ 2x - 2y - 5z = -2 \end{array}$$

12. $$\begin{array}{l} 2x + 3y - z = 9 \\ 3x + 4y + 2z = 5 \\ x - 6y - 5z = -9 \end{array}$$

13. $$\begin{array}{l} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{array}$$

14. $$\begin{array}{l} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{array}$$

15. $$\begin{array}{l} 2ax - 3by + cz = 0 \\ 3ax - 6by + 5cz = 2abc \\ 5ax - 4by + 2cz = 3abc \end{array}$$

En los ejercicios del 16 al 24, investíguese la consistencia y hállese la solución general de los siguientes sistemas :

16. $$\begin{array}{l} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{array}$$

17. $$\begin{array}{l} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{array}$$

18. $$\begin{array}{l} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{array}$$

19. $$\begin{array}{l} x + ay + a^2z = 1 \\ x + ay + abz = a \\ bx + a^2y + a^2bz = a^2b \end{array}$$

20. $$\begin{array}{l} (a+3)x + y + 2z = a \\ ax + (a-1)y + z = 2a \\ 3(a+1)x + ay + (a+3)z = 3 \end{array}$$

21. $$\begin{array}{l} ax + ay + (a+1)z = a \\ ax + ay + (a-1)z = a \\ (a+1)x + ay + (2a+3)z = 1 \end{array}$$

22. $$\begin{array}{l} 3ax + (2a+1)y + (a+1)z = a \\ (2a-1)x + (2a-1)y + (a-2)z = a+1 \\ (4a-1)x + 3ay + 2az = 1 \end{array}$$

23. $$\begin{array}{l} 3mx + (3m-7)y + (m-5)z = m-1 \\ (2m-1)x + (4m-1)y + 2mz = m+1 \\ 4mx + (5m-7)y + (2m-5)z = 0 \end{array}$$

24. $$\begin{array}{l} (5a+1)x + 2ay + (4a+1)z = 1+a \\ (4a-1)x + (a-1)y + (4a-1)z = -1 \\ 2(3a+1)x + 2ay + (5a+2)z = 2-a \end{array}$$

25. $$\begin{array}{l} (2a+1)x - ay - (a+1)z = 2a \\ 3ax - (2a-1)y - (3a-1)z = a + 1 \\ (a+2)x - y - 2az = 2 \end{array}$$

26. $$\begin{array}{l} 2(a+1)x + 3y + az = a+4 \\ (4a-1)x + (a+1)y + (2a-1)z = 2a+2 \\ (5a-4)x + (a+1)y + (3a-4)z = a-1 \end{array}$$

27. $$\begin{array}{l} mx + (2m-1)y + (m+2)z = 1 \\ (m-1)y + (m-3)z = 1+m \\ mx + (3m-2)y + (3m-1)z = 2-m \end{array}$$

28. $$\begin{array}{l} (3a-1)x + 2ay + (3a+1)z = 1 \\ 2ax + 2ay + (3a+1)z = 1 \\ (a+1)x + (a+1)y + 2(a+1)z = a^2 \end{array}$$

Respuestas a Ejercicios Propuestos

Grupo 1 — *Coordenadas Rectangulares*

1. $x = 1$, $y = 1$, 2. $x = 3$, $y = -1$, 3. $x = 3$, 4. $x = -1$, 5. $x = \pm 4$, $y = \pm 2$
6. $x = \pm 4$, $y = \pm 1$, 7. $S = \{(2, 3), (-2, -3)\}$, 8. $S = \{(-2, -3), (3, 2)\}$
9. $S = 7$, 10. $I(-5/2, 9/2)$, 11. $x = -2$ ó $x = 6$

Grupo 2 — *R^2 como espacio vectorial*

1. a) $\langle -9, -5\rangle$, b) $\langle 17, -19\rangle$, c) $\langle -16, 9\rangle$, d) $\langle 6, -5/3\rangle$
2. a) $\langle 1, -8\rangle$, b) $\langle 1/2, -2\rangle$, c) $\langle -2/3, 3\rangle$; 3. a) $r = 4$, $s = -3$, b) $r = 1/2$, $s = 3/2$, c) $\nexists\, r, s$, d) $r = -2$, $s = -10$; 4. $r = -2$, $t = 3/2$; 5. -2
6. $m = 1$, $n = 1/2$ ó $m = -1$, $n = 1/4$; 7. $\mathbf{X} = \langle 11/5, 3\rangle$
8. $V = \{\langle -2, -5\rangle, \langle -2, 4\rangle, \langle 3, -5\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$; 9. $x = 5$, $y = -9/2$; 10. $m = -1$, $n = -4$

Grupo 3 — *Representación geométrica de un vector en el plano*

1. $(3, 9)$; 2. $(-6, -2)$; 3. $(-8, 3)$; 4. $(3, 3)$; 5. $(-4, 3)$; 6. $(2, -9)$
7. $(12, -5)$; 8. $(3, -2)$; 9. $A(3/2, 0)$, $B(9/2, 2)$; 10. -21; 11. $A(-3, 7)$, $B(4, 1)$
12. $\langle 8, 4\rangle$ ó $\langle 64, 2\rangle$; 13. 8.

Grupo 4 — *Magnitud y dirección de un vector en R^2*

1. $V = 2\sqrt{2}\langle \text{Cos } 135°, \text{Sen } 135°\rangle$; 2. $V = 2\langle \text{Cos } 330°, \text{Sen } 330°\rangle$
3. $V = 2\langle \text{Cos } 150°, \text{Sen } 150°\rangle$; 4. $V = 2\sqrt{5}\langle \text{Cos } 240°, \text{Sen } 240°\rangle$
5. $V = \langle 5/2, 5\sqrt{3}/2\rangle$; 6. $V = \langle 8, \pm 6\rangle$; 7. $V = \langle -12, 9\rangle$; 8. $V = \sqrt{2}\langle -1, 2\rangle$
9. $V = \langle 9, \pm 3\sqrt{3}\rangle$; 10. $V = \langle \pm 3, \pm 3\sqrt{3}\rangle$; 11. $\boldsymbol{u} = \left\langle \pm \frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right\rangle$

Grupo 5 — *Operaciones vectoriales*

8. $\langle -3, 9\rangle$; 9. -2; 10. $\langle -1/3, 5/3\rangle$; 11. $P(-2, 17/2)$; 12. $P(-9, 9)$
13. $\langle -8/17, 15/17\rangle$; 14. $\langle -4, 3\rangle$; 15. $5/3$; 16. $\sqrt{7}\,a/3$; 17. -7
18. $\frac{1}{2}\sqrt{185}$; 19. $2\sqrt{2}$; 20. $\langle 14, 0\rangle$

Grupo 6 — *Vectores paralelos*

1. a) $A \parallel B$ y de sentido opuesto , b) $A \parallel B$ y del mismo sentido , c) $A \parallel B$ y de sentido opuesto , d) $A \nparallel B$; 5. $m = -1$ ó $m = 7/2$; 6. $m = 2$; 7. $a + b = 5$
8. $2\sqrt{7}$; 9. $A = \langle \pm 1, \pm 2\rangle$; 10. $\langle -4, 3\rangle$; 11. $\sqrt{10}/5$; 12. 1
13. $R(-3, 2)$ ó $R(7, -8)$; 14. $5/3$; 15. $-\frac{1}{9}\langle 48, 31\rangle$; 16. $D(5, 3)$, $2\sqrt{17}$
17. $\langle 1/2, -3/2\rangle$; 18. $A(1, -4)$, $B(8, -2)$, $C(-4, 16)$, $D(-3, 2)$; 19. $\vec{B'P} = \langle a/3, -a/3\rangle$
20. $A(14, 22)$, $B(-12, -4)$, $C(24, 8)$; 21. 24

Grupo 7 — *Producto escalar de vectores*

11. $\boldsymbol{u} = \langle 24/25, 7/25\rangle$; 12. $m = 1$ ó $m = -9$; 13. $\sqrt{2}$; 14. $\sqrt{3}$; 15. $2/3$
17. 5 ó $2\sqrt{10}$; 18. 5; 19. $4\sqrt{2}$; 20. $\sqrt{41}$ y $\sqrt{38}$; 21. $\langle 19, 22\rangle$; 22. $x = \langle 5, 4\rangle$
23. 5; 24. $\langle 5, 1\rangle$; 25. $m = 5 \pm 2\sqrt{6}$; 26. $\frac{24}{25}\langle -3, 4\rangle$; 27. $C(8, 7)$, $D(4, 11)$
28. $B(7, 3)$, $D(6, 5)$; 29. -7.5; 30. a) 75 , b) $27/2$; 32. $\vec{AM} = \langle 9/2, 1\rangle$

Grupo 8 — *Angulo entre dos vectores*

1. $135°$; 2. $\sqrt{5}/5$; 3. $45°$; 4. $120°$; 5. $90°$; 6. $135°$; 7. -48; 8. $2\sqrt{3}$
9. $\sqrt{129}$ y 7; 10. $t = -\|A\|$; 11. $\sqrt{19}$ y 7; 12. $\|A\| = \|B\|$
13. $A = \langle 2\sqrt{3} - 1, 2 + \sqrt{3}\rangle$; 15. $m = 1$; 16. $7\pi/8$; 17. $\sqrt{8 + 2\sqrt{3}}$; 18. $13/2\sqrt{133}$
20. 3; 21. $\theta = \text{arc Cos}(2/7)$; 22. $B(14, 22)$, $C(1/2, 85/4)$, $D(-7/2, 53/4)$.

Grupo 9 — *Descomposición de vectores*

4. $1/2$; 5. $\frac{1}{6}(3 + \sqrt{3})$; 6. $8\sqrt{3}$; 7. $\sqrt{3}/3$; 8. $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{3})$
9. $s = \frac{1}{6}(3 - \sqrt{3})$, $t = -\frac{1}{6}(3 + \sqrt{3})$, $\|A - B\| = 3 + \sqrt{3}$; 10. $-1/3$
11. $m = 3/7$, $n = 4/21$; 12. $4/5$; 13. 1; 14. $2/3$; 15. $\bar{AE} = 2\mathbf{v} + \boldsymbol{u}$. $\bar{BE} = 2\mathbf{v} - 2\boldsymbol{u}$

Grupo 10 *Proyección ortogonal*

2. VVFF ; 3. 5 ; 4. $\langle 3+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\rangle$; 5. $-2\sqrt{29}$; 6. -40 ; 7. 5/2 ; 8. 14
9. $9(\sqrt{2}-1)$; 10. $\sqrt{69}$; 11. p + q + r ; 12. $\frac{1}{2b}(c^2-a^2-b^2)$; 13. $5\sqrt{2}$; 14. 12/5
15. FFVV ; 16. $\sqrt{10}$; 17. 45° ; 18. 12 Cosα + 3 Cosβ ; 19. 10 ; 20. $\langle -2, -2\rangle$
21. r = -21/5 , s = 14/5 ; 22. b) $Proy_B A = \langle -12/5, 9/5\rangle$, $Comp_{A^\perp} B = -2\sqrt{5}$
23. A(-3 , 5) , B(5 , 13) , C(7 , -9) ; 24. $\langle -8/5, 4/5\rangle$; 25. $\frac{5}{4}\overline{AC}$ y $-\frac{\sqrt{15}}{4}\overline{AC}^\perp$
26. $\overrightarrow{OQ} = \frac{27}{7}\mathbf{u} - \frac{4}{7}\mathbf{v}$; 27. 25 ; 28. $10a$; 29. $\sqrt{3}/2$; 30. $9a/2$; 31. $25a/2$
32. $\frac{\sqrt{5}}{20}(26\sqrt{5}+53)a$; 33. $8\sqrt{5}$; 34. 32 ; 35. A = $\langle -6, -3\rangle$; 36. $4\sqrt{3}/3$
37. a) $\langle 3, -\sqrt{3}\rangle$, b) $6\langle 1, \sqrt{3}\rangle$; 39. a) B(6 , 2) , b) M(-3 , 1) , N(-1 , -5) , R(5 , 3)

Grupo 11 *Area del paralelogramo y del triángulo*

1. 9 u^2 ; 2. 24.5 u^2 ; 3. 18.5 u^2 ; 4. 11 u^2 ; 5. D(5 , -3) , 20 u^2
6. D(-4 , -1) , 10 u^2 ; 7. D(-2 , -1) , 18 u^2 ; 8. D(4 , 8) , 20 u^2 ; 9. 8 u^2
10. 22 u^2 ; 11. 21 u^2 ; 12. 26 u^2 ; 13. 39.5 u^2 ; 14. 40 u^2 ; 15. 66 u^2
16. k = -1 ó k = 10 ; 17. 12 u^2 ; 18. 10 u^2 ; 19. C(4 , -8) ó C(9/4 , -9/2)
20. A(10 , 3) ó A(4 , 0) ; 21. 14 u^2 ; 22. 0 ; 23. -36 ; 24. P(23/3 , 31/3) , B(5 , 15)
25. D(-5 , 0) ; 26. $\langle 3/2, 3/2\rangle$, 20 u^2

Grupo 12 *Dependencia e Independencia lineal de vectores*

1. m = 0 , m = 1 ; 2. m = -6 ; 3. m = 1 , m = -3 ; 4. m = 7/2
6. a) $m \in \mathbf{R} - \{5/9\}$, b) $m \in \mathbf{R} - \{-1, 7/2\}$; 7. FFFV ; 8. 7 ; 9. $\langle 3, 5\rangle$
10. $\langle 1/5, 7/5\rangle$; 11. FVF ; 12. r = 5/11 , s = 30/11 ; 14. FVF ; 15. (1 , 9)
16. 1 ; 17. 1 ; 18. 3/2 ; 19. -4 ; 20. 5/4 ; 21. 9/8 ; 22. 1 ; 23. a) 10/11 y 4/11 , b) $a(\Delta APD) = 40\ u^2$; 24. m = -2 , n = 1/3 ; 25. b) r = -2 , s = 2
26. $\frac{n}{2}(n+1)$; 27. m = -1/4 , n = 1 ; 28. $\mathbf{M} = \frac{1}{10}\overline{AD} + \frac{8}{5}\overline{AB}$
29. m = -2 , n = 2/3.

Grupo 14 *Los vectores y la física*

1. 304.1 km , Oeste 25°17' Norte ; 2. 20.9 m , Oeste 21°30' Sur
3. 18 km/h , Oeste 56°10' Norte ; 4. Debe seguir una trayectoria rectilínea

formando un ángulo de 34°28' con la dirección de la corriente , t = 1h 25m.
5. (2000/3)m , 36°52' ; 6. 20.6m , Este 60°15 Sur ; 7. 10°51' , 16.6 kg
8. R = $7\langle -18, 37\rangle$, w = 14 unidades ; 9. $F_1 = 50\langle 2/\sqrt{21}, 1\rangle$, $F_2 = 50\langle -2/\sqrt{21}, 1\rangle$
10. $F_2 = 148\langle 0, 1\rangle$, $F_1 = 63\langle -1, 0\rangle$; 11. 150 kg. , $150\sqrt{3}$ kg.
12. $360\sqrt{3}$ kg , $180\sqrt{3}$ kg. ; 13. $245(1+\sqrt{3})$kg , $200(1+\sqrt{3})$kg.

Grupo 15 *Recta que pasa por dos puntos. Segmentos de recta. División de un segmento en una razón dada.*

1. a) $\mathscr{L}: P = \langle 4, -2\rangle + t\langle 0, 5\rangle$; x = 4 , y = -2 + 5t
b) $\mathscr{L}: P = \langle -7, 2\rangle + t\langle 4, -3\rangle$; x = -7 + 4t , y = 2 - 3t
2. a) S(2 , -1) y T(7 , -8) ; b) S(-2/3 , 5) y T(5/3 , 3)
3. $P = \langle 2, 5\rangle + r\langle 4, -6\rangle$, $r \in [0, 1]$; 4. $P = \langle -2, 4\rangle + r\langle 1, 3\rangle$, $r \in [0, 1]$
5. $P = \langle 4, 4\rangle + r\langle -1, 3\rangle$, $r \in [0, 1]$; 7. (0 , 0) , (3 , -8) , (6 , -16) y (9 , -24)
8. P(-3 , 4) ; 9. P(9 , 4) ; 10. P(-7 , 9) ; 11. 25 ; 12. D(3/2 , 2) ; 13. 3/5
14. P(13 , -30) ; 15. A(-2 , 3) , B(5 , 8) , C(6 , -1) ; 16. C(2 , 8)

Grupo 16 *Puntos que estan sobre una recta*

1. $S \in \mathscr{L}$; 2. $S \notin \mathscr{L}$; 3. $S \in \mathscr{L}$; 4. Recta que pasa por $P_1(1, 4)$, paralela al vector $\boldsymbol{a} = \langle 2, -3\rangle$; 5. Segmento de recta de extremos A(1 , 2) y B(2 , 3)
6. Recta que pasa por $P_1(-3, 4)$, paralela al vector $\boldsymbol{a} = \langle -1, -2\rangle$
7. Recta que pasa por $P_1(2, 0)$, paralela al vector $\boldsymbol{a} = \langle 5, -1\rangle$
8. a) $\mathscr{L}: \langle -5, 3\rangle \cdot \langle x, y-1\rangle = 0$, b) $\mathscr{L}: \langle 3, 2\rangle \cdot \langle x+1, y\rangle = 0$
9. Si ; 10. No ; 11. Si ; 12. k = 1 , k = -8 ; 13. $k = \pm 4\sqrt{3}/3$
14. $P_1(7, 1)$, $P_2(1, -5)$; 15. $P_1(5, -2)$, $P_2(-3, 2)$

Grupo 17 *Pendiente de una recta*

1. Coincidentes ; 2. Paralelas ; 3. Oblícuas ; 4. Perpendiculares ; 5. m = 3
6. -4 ; 7. $\mathscr{L}: \langle 2, 1\rangle \cdot (P - \langle 2, -2\rangle) = 0$; 8. Tres ; 9. $\mathscr{L}: P = \langle 1, 1\rangle + t\langle 2, 3\rangle$, $t \in \mathbf{R}$
10. $\mathscr{L}: P = \langle 8, 1\rangle + t\langle -1, 3\rangle$, $t \in \mathbf{R}$; 11. 3.8 ; 12. m = -1/5 ; 13. $a = 2$
14. $\mathscr{L}: P = \langle -3, 1\rangle + t\langle 1, 1\rangle$ $t \in \mathbf{R}$; 15. a) $\mathscr{L} = \{\langle 3, 10\rangle + t\langle 2, 1\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$, b) $\langle 6, 3\rangle$
16. a) $\overline{AB} = \{\langle 2, -2\rangle + t\langle 4, 3\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$, b) $\overline{CD} = \{\langle -2, 0\rangle + s\langle -3, 4\rangle \mid s \in \mathbf{R}\}$, h = 4
c) $\cos\theta = 1/\sqrt{10}$, d) $\mathscr{L}_1 = \{\langle 2, -2\rangle + t\langle 4-2\sqrt{5}, 3+\sqrt{5}\rangle\}$,
$\mathscr{L}_2 = \{\langle 2, -2\rangle + s\langle 4+2\sqrt{5}, 3-\sqrt{5}\rangle\}$

Grupo 18 *Miscelánea de Ejemplos Ilustrativos*

1. k = -3 ó k = 5 ; **2.** A(-5 , -1) , B(5 , 11) , C(-1 , -5) ; **3.** S = 8/3 u^2 ; **4.** 7 u^2
5. 2x - 3y - 18 = 0 , 5x + y - 28 = 0 , 7x - 2y - 12 = 0 ; **6.** A(-5 , 1) , B(2 , 2) , C(4 , -2)
7. C(-1 , 4) ó C(27/5 , -12/5) ; **8.** $\mathscr{L}$: **P** = ⟨1 , -1⟩ + t⟨-1 , 4⟩ , t ∈ **R**
9. a) $\overleftrightarrow{AC}$: x + 2y + 6 = 0 , b) C(6 , -6) ; **10.** $\mathscr{L}$: ⟨-1 , 7⟩ • [P - ⟨5 , 0⟩] = 0
11. $\mathscr{L}$: P = ⟨-1 , 4⟩ + t⟨2 , 1⟩ , t ∈ **R** ; **12.** $\mathscr{L}$: P = ⟨4 , 1⟩ + t⟨1 , 2⟩ , t ∈ **R**

Grupo 19 *Distancia de un punto a una recta dada*

1. $4\sqrt{30}/5$; **2.** 8/7 ; **3.** k = 19/2 ó k = 8/9 ; **4.** m = 1/2 ; **5.** 12.8
6. P_1(64 , -44) , P_2(4 , -4) ; **7.** $\mathscr{L}_1$: 3x + 4y + 5 = 0 , $\mathscr{L}_2$: 3x + 4y - 15 = 0
8. P(6 , 6) ; **9.** $10\sqrt{5}$; **10.** 8 ; **12.** k = -16 ó k = 88
13. $\mathscr{L}$: P = ⟨-2 , 3⟩ + t⟨1 , 2⟩ , t ∈ **R** ; **14.** A(3 , 5) , B(9 , -1) , S = $18\sqrt{3}$ u^2
15. B(-1 , 6) , C(-5 , 1) , D(-2 , -1) ; **16.** T(4 , 3) ; **17.** 24

Grupo 20 *Intersección de rectas*

1. P(16/5 , 7/5) ; **2.** *a* = -1/8 ; **3.** $\mathscr{L}$ = {⟨0 , 1⟩ • (P - ⟨14/11 , 1/11⟩) = 0}
4. $\mathscr{L}$: **i** • [P - ⟨-3 , 2⟩] = 0 ; **5.** I(1 , 3) ; **6.** $\mathscr{L}$: **P** = ⟨2/5 , 4/5⟩ + s⟨4 , -3⟩ , s ∈ **R**
7. $\mathscr{L}_1$: **P** = ⟨7 , 0⟩ + t⟨9 , -10⟩ , t ∈ **R** ; **8.** 12 ; **9.** (18/5 , 21/5)
10. $\mathscr{L}_2$: ⟨3 , 1⟩ • [P - ⟨12 , 1⟩] = 0 ; **11.** $\frac{x}{-6 \pm 6\sqrt{2}} + \frac{y}{2 \pm 2\sqrt{2}} = 1$; **12.** a) 2 u^2 , b) 23/41 y 29/37 ; **13.** $\mathscr{L}_2$: P = ⟨3 , -3⟩ + s⟨5 , -3⟩ ; **14.** $\mathscr{L}$ = {⟨13 , 8⟩ + t⟨4 , 3⟩ | t ∈ **R**} ó $\mathscr{L}$ = {⟨13 , 8⟩ + s⟨1 , 0⟩ | s ∈ **R**}

Grupo 21 *Angulo entre dos rectas*

1. a) 14/5 , b) 11/2 ; **2.** a) (8 , 32/3) , b) $\mathscr{L}$: ⟨-1 , 1⟩ • [P - ⟨8 , 32/3⟩] = 0
3. $\mathscr{L}$ = {⟨-1/5 , 7/5⟩ • **P** = 0} ; **4.** 90° ; **5.** $\mathscr{L}$: **P** = ⟨4 , 8⟩ + t⟨$1 - \sqrt{2}$, $-3 - 2\sqrt{2}$⟩
6. $\mathscr{L}$: **P** = **A** + t(**C** + 2**B** - 3**A**) ; **7.** Q(20/3 , 6) ; **8.** a) A(-5 , -9) , C(5 , 1) , D(1 , 9) b) ⟨12 , 6⟩ ; **9.** $\mathscr{L}$ = {⟨4 , 20⟩ + r⟨$1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{37}$, $-1/\sqrt{2} - 6\sqrt{37}$⟩}
10. $\mathscr{L}$: **P** = ⟨0 , -2⟩ + t⟨2 , 1⟩ , t ∈ **R** ; **11.** $\mathscr{L}$: **P** = t⟨-1 , 1⟩ , t ∈ **R** ; **12.** Q(18 , 4)
14. -35/3 ; **15.** $\mathscr{L}$: **P** = ⟨4 , -8⟩ + t⟨$1 + \sqrt{2}$, $-\sqrt{2} - \sqrt{5}$⟩ , t ∈ **R** ; **16.** $\mathscr{L}$: **P** = ⟨5 , -2⟩ + t⟨1 , 2⟩ , t ∈ **R** ; **17.** b) Si P ∈ C , $\mathscr{L}$: **P** = ⟨1 , 1⟩ + t⟨$-2\sqrt{10} + 3\sqrt{13}$, $3\sqrt{13} + \sqrt{13}$⟩ t ∈ **R** ; **18.** $\mathscr{L}$: **P** = ⟨4 , -20⟩ + t⟨$\sqrt{2} + \sqrt{37}$, $-6\sqrt{2} - \sqrt{37}$⟩ , t ∈ **R** ; **19.** $2/\sqrt{13}$

Grupo 22 *Vectores en el espacio*

1. **A** = ⟨6 , 3 , -3⟩ ; **2.** A(-3 , 2 , -2) , B(-5 , 4 , 4) ; **3.** A(5 , 1 , 1) , B(8 , -5 , 2)
4. **V** = ⟨6 , -1 , -4⟩ ; **7.** **X** = ⟨5 , -12 , 10⟩ ; **9.** ***u*** = ⟨4/5 , 0 , 3/5⟩ ; **10.** 7
11. (-1 , 2 , 4) , (8 , -4 , -2) ; **12.** $\frac{1}{3}(\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'})$; **13.** $\overline{MA} = -\overline{MC} = -\frac{1}{2}(a + b)$
$\overline{MB} = -\overline{MD} = \frac{1}{2}(a - b)$; **14.** $\overline{AC}$ = ⟨3 , 6 , 9⟩ ; **15.** C(1 , 5 , 2) , D(3 , 2 , 1) , E(5 , -1 , 0) , F(7 , -4 , -1)

Grupo 23 *Dirección de un vector en el espacio*

1. a) ***u*** = $\frac{1}{7}$⟨6 , 3 , 2⟩ , b) ***u*** = $\frac{1}{13}$⟨-12 , 3 , -4⟩ ; **2.** α = 30° ó α = 150° ; **3.** ±9/11
4. **V** = ⟨3/14 , 3/7 , 1/7⟩ ; **5.** **V** = ⟨21/5 , -7 , 28/5⟩ ; **6.** **X** = ⟨±5 , $5/\sqrt{2}$, $-5/\sqrt{2}$⟩
7. **X** = ⟨-5 , 10 , 10⟩ ; **8.** **X** = ⟨9 , 18 , -6⟩ ; **9.** **V** = ⟨1 , -1 , $\sqrt{2}$⟩ ó **V** = ⟨1 , -1 , $-\sqrt{2}$⟩
10. P($\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{3}$) ; **11.** a) puede , b) no puede , c) puede
12. a) no puede , b) puede , c) no puede.

Grupo 24 *El producto escalar de dos vectores en el espacio*

1. -240 ; **2.** Un ejemplo : C = ⟨10 , -11 , -3⟩ ; **3.** 2 ; **4.** -13 ; **5.** 20 ; **6.** 13
7. **V** = n⟨1 , 1 , 2⟩ , n ∈ **R** - {0} ; **8.** ***u*** = ±⟨6 , 3 , 5⟩/$\sqrt{70}$; **9.** **C** = $\frac{1}{3}$⟨-1 , -1 , 4⟩ , **D** = $\frac{2}{3}$⟨5 , -1 , 1⟩ ; **10.** **A** = ⟨12 , -10 , 15⟩ ; **11.** m = -1 ó m = 2
12. **X** = ⟨-3 , 3 , 3⟩ ; **13.** 150° ; **14.** $15/7\sqrt{85}$; **15.** ***u*** = ± $\frac{1}{5}$⟨3 , 4 , 0⟩
16. **B** = ⟨-6 , 0 , -8⟩ ; **17.** $3(\sqrt{2} + \sqrt{6})$; **19.** **V** = ⟨8 , 4 , 2⟩ ; **20.** **X** = ⟨-4 , -6 , -12⟩
21. **C** = $\frac{1}{25}$⟨24 , 0 , -18⟩ , **D** = $\frac{1}{25}$⟨51 , 5 , 68⟩ ; **22.** 5/2 ; **23.** *d* = ± $\frac{\sqrt{2}}{2}$⟨0 , 1 , 1⟩
24. $\sqrt{91}/14$; **25.** 135° ; **26.** $\sqrt{6}/6$; **27.** **A** = ⟨2 , 7 , 1⟩ ; **28.** m = 1 ó m = 5 , m < 1 ó m > 5 , 1 < m < 5 , **A** = ⟨1 , 3 , 5⟩ , **B** = ⟨-18 , 3 , 1⟩
30. **C** = ⟨1 , 0 , 1⟩ ó **C** = ⟨-1/3 , 4/3 , -1/3⟩

Grupo 25 *Proyección ortogonal y componentes*

1. 3 ; **2.** 10/3 ; **3.** ⟨16/5 , 32/5 , 0⟩ ; **4.** $\sqrt{3}$; **5.** -3 ; **6.** -5 ; **7.** $\sqrt{4422}/11$
8. ± $\frac{\sqrt{2}}{2}$⟨-7 , -2 , 15⟩ ; **9.** 1/9 ; **10.** **V** = ⟨-2 , 4 , -4⟩ ; **11.** D(-7 , 6 , -2)

12. a) H(2/29 , 119/29 , 112/29) , b) D(83/29 , 110/29 , -50/29) , c) $S = \frac{252\sqrt{5}}{29}\ u^2$

Grupo 26 *Combinación lineal de vectores en R^3*

2. $\lambda = 0, 1, 2$; **4.** $D = 2A - 3B + C$; **5.** $D = 2A - 3B + C$, $C = -2A + 3B + D$. $B = \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}C - \frac{1}{3}D$, $A = \frac{3}{2}B - \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D$; **6.** a) $\langle 1/2, 0, 1/2\rangle$, b) $\langle 1, -1/2, 1/2\rangle$; **7.** $\langle 2, 0, 2\rangle$; **8.** E(-19 , 10 , -17); **9.** $A = -2A_1 + A_2 - A_3$
10. $\langle -2, -3/5, 6/5\rangle$; **12.** $\langle 3/2, -1, -1/2\rangle$

Grupo 27 *El producto vectorial*

1. a) $2\,A \times B$, b) $A \times C$, c) 3; **2.** a) $5\sqrt{3}\ u^2$, b) $\frac{2}{3}\sqrt{35}\ u^2$; **3.** a) $5\sqrt{3}\ u^2$ b) $15\ u^2$; **4.** a) $\langle 17, -37, 25\rangle$, b) $\langle 3, 14, 5\rangle$; **5.** $3\sqrt{2}/2$; **6.** $50\sqrt{2}$
7. 5; **8.** $\langle -6, -24, 8\rangle$; **9.** $\langle 7, 5, 1\rangle$; **10.** $\pm\frac{1}{5}\langle 3, 4, 0\rangle$; **11.** $\pm\frac{5\sqrt{3}}{3}\langle 1, 1, 1\rangle$
12. m = 3; **13.** m = 5/3 , n = 1/3; **14.** m = -2; **15.** $\langle 1, -1, -1\rangle$; **16.** 66
17. ± 30; **18.** 12; **19.** $\langle 8, -2, 4\rangle$; **20.** $\langle -2, 12, 10\rangle$; **21.** $\langle 0, 9, 6\rangle$
22. $n = A \times B + B \times C + C \times A$; **29.** a) 3 , b) $\sqrt{34}/7$; **30.** 12/5
32. $\sqrt{66}$, $1/\sqrt{66}$, $-4/\sqrt{66}$, $-7/\sqrt{66}$

Grupo 28 *El producto mixto de vectores*

1. a) No , b) Si; **3.** k = 2; **6.** $r = \mathbf{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$; **7.** L. I. $\Leftrightarrow k \in \mathbf{R} - \{-2, 1, 3\}$ L. D. $\Leftrightarrow k \in \{-2, 1, 3\}$; **8.** a) 6 , b) 3; **9.** $80\ u^3$; **10.** $4\ u^3$; **11.** $h = 3\sqrt{2}$
12. h = 11; **13.** m = 3 ó m = 5/2; **14.** m = 17/11 ó m = -23/11; **15.** $288\ u^3$
16. $3\sqrt{2}$; **17.** $V = \frac{m(A - B)}{(ABC)}$

Grupo 29 *Rectas en el espacio*

1. $\mathscr{L} = \{\langle 1, -2, -3\rangle + t\langle 1, -1, 5\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$; **2.** (9 , -4 , 0) , (3 , 0 , -2) , (0 , 2 , -3)
3. A(2 , 3 , -6) , B(-2 , 6 , -9); **4.** (1 , 3 , -2) , (3 , 4 , -5) , (5 , 5, -8)
5. $\mathscr{L} = \{\langle 3, 0, -1\rangle + r\langle 1, 2, 3\rangle \mid r \in \mathbf{R}\}$; **6.** $\mathscr{L} : P = \langle -1, 2, 4\rangle + r\langle 1, 1, 1\rangle, r \in \mathbf{R}$
7. $\mathscr{L} : P = \langle 2, 1, -1\rangle + t\langle 13, 8, -8\rangle, t \in \mathbf{R}$; **8.** $\mathscr{L}_2 : P = \langle 2, -1, 1\rangle + t\langle -1, 11, 16\rangle, t \in \mathbf{R}$
10. m = 3; **11.** $\theta = \text{arc Cos}\left(\frac{38 - 5\sqrt{2}}{6\sqrt{91}}\right) \cong 57°18'$; **12.** $a = \langle \sqrt{2}/2, 1/2, 1/2\rangle$,

$x = 2 + \sqrt{2}\,t$, $y = 1 + t$, $z = 1 + t$; **13.** $\mathscr{L} = \{\langle 4, 2, -7\rangle + t\langle 22, 56, 1\rangle\}$
14. $\mathscr{L} = \{\langle 0, 1, 1\rangle + t\langle 1, 0, 1\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$ o $\mathscr{L} = \{\langle 0, 1, 1\rangle + t\langle 3, -4, -1\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$
15. $\mathscr{L} = \{\langle -1, -2, 0\rangle + t\langle -1, 6, 4\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$; **16.** $\mathscr{L} = \{\langle 3, -1, 1\rangle + t\langle 0, 13, 3\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$
17. $\mathscr{L} = \{\langle 2, -1, -3\rangle + t\langle 6, -1, -7\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$; **18.** $\mathscr{L} : \frac{x + 1}{2} = \frac{y - 2}{-3} = \frac{z + 3}{6}$
19. $\mathscr{L} : \frac{x + 4}{3} = \frac{y + 5}{2} = \frac{z - 3}{-1}$; **20.** $\mathscr{L} : x = 2t - 5$, $y = -3t + 1$, $z = 4t$
21. $Q = \frac{1}{25}(-9, 74, 25 + 16\sqrt{3})$; **22.** a) $\mathscr{L}_1 = \{\langle 3, 3, 1\rangle + r\langle 1, -7, 8\rangle\}$, $\mathscr{L}_2 = \{\langle 3, 3, 1\rangle + r\langle -3, 1, 0\rangle\}$, b) $\mathscr{L}_3 = \{\langle 3, 3, 1\rangle + t\langle 2, 6, 5\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$

Grupo 30 *Aplicaciones de la recta en el espacio*

1. $\sqrt{34}/7$; **2.** 7; **3.** 5; **4.** $4\sqrt{2}$; **5.** $\sqrt{13}$; **6.** $\sqrt{1.1}$; **7.** $d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = \frac{2}{\sqrt{21}}$ $\mathscr{L} = \{\langle -3/7, 1, -2/7\rangle + t\langle 2, 1, 4\rangle\}$; **8.** b) A(-1 , 4 , -7) , B(3 , 7 , 5) , $d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = 13$ c) $\mathscr{L} = \{\langle -1, 4, -7\rangle + t\langle 4, 3, 12\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$; **9.** 25; **10.** $\mathscr{L} = \{\langle -2, 1, -3\rangle + t\langle 2, 6, 3\rangle \mid t \in \mathbf{R}\}$; **11.** a) 13 , b) 3 , c) 7; **12.** P(43/12 , 31/6 , 15/4)
13. $\mathscr{L}_1 = \{\langle 3, 4, 0\rangle + t\langle 9, 12, 20\rangle\}$, $\mathscr{L}_2 = \{\langle 3, 4, 0\rangle + s\langle 9, 12, -20\rangle\}$
14. $Q_0(1, 1, 1)$, $P_0(3/2, 1, 1/2)$, $\mathscr{L} = \{\langle 3/2, 1, 1/2\rangle + t\langle 1, 0, -1\rangle\}$

Grupo 31 *Planos en el espacio*

1. $x - y - 3z + 2 = 0$; **2.** $x + 4y + 7z + 16 = 0$; **3.** $3x + 3y + z - 8 = 0$
4. $43x + 3y - 14z - 34 = 0$; **5.** m = 6; **6.** $x + 2z - 4 = 0$; **8.** $7x - y - 5z = 0$
9. $a = 3$, $b = -23$; **10.** A = -3 , B = 9/2; **11.** $4x - y - 2z - 9 = 0$; **12.** $x + y - z + 3 = 0$
13. $x - 10y - 17z - 43 = 0$; **14.** $3x - 2y - 5 = 0$; **15.** $a = -6$, $b = 3/2$
17. $x + 2y + z - 18 = 0$; **18.** $x - 11y + 7z - 1 = 0$

Grupo 32 *Distancia de un punto a un plano*

1. a) 2 , b) 6 , c) 6; **2.** a) 6.5 , b) 5/6 , c) 1/2; **3.** $8\ u^2$; **4.** 6
5. $x - 3y + 5z \pm 3\sqrt{35} = 0$; **6.** $2x - 2y - z \pm 18 = 0$; **7.** $20x - 12y + 4z + 13 = 0$
8. $3x - 6y + 7z + 2 = 0$, $x + 4y + 3z + 4 = 0$; **9.** 4; **10.** Q(-28 , -16 , 31)

Grupo 33 *Intersecciones de planos*

1. a) $P = \langle 1, 0, 4/3\rangle + t\langle -9, 6, 2\rangle$, b) $P = \langle 1, 3, 0\rangle + t\langle -1, 1, -2\rangle$, c) $P = \langle 2, -1, 0\rangle + t\langle 2, 1, -1\rangle$; **2.** $x - 4y - 13z - 12 = 0$; **3.** $m = -2$; **4.** $15x - 5y - 3z + 2 = 0$
5. $V = 1/6\,|\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}| = 8\,u^3$; **6.** $2x - y - 3z - 15 = 0$; **7.** $x - 3y - 2z + 2 = 0$
8. a) -4 , b) 9 , c) 3 ; **9.** $x + y + z + 5 = 0$; **10.** $x + y + z + 1 = 0$, $x - y + z - 3 = 0$, $x + y - z - 5 = 0$; **11.** 25 ; **12.** $240\,u^2$

Grupo 34 *Familia de planos que pasan por la intersección de dos planos*

1. $x - 2y + z - 2 = 0$, $x - 5y + 4z - 20 = 0$; **2.** $2x - 3y - 6z + 19 = 0$; **3.** $m = -5$, $n = -11$
4. No pertenece ; **5.** La recta de intersección de los planos $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ es paralela al vector $\mathbf{V} = \langle 7, 9, 17\rangle$; por lo tanto , a la condición del problema satisfacen todos los planos del haz de planos que pasan por esta recta.
6. $11x - 2y - 15z - 3 = 0$; **7.** $9x + 7y + 8z + 7 = 0$; **8.** $x - 2y + z - 2 = 0$, $x - 5y + 4z = 20$
9. $4x - 3y + 6z - 12 = 0$, $12x - 49y + 6z + 21 = 0$; **10.** M está situado dentro del ángulo obtuso ; **11.** $23x - y - 4z - 24 = 0$; **12.** a) $9y + 3z + 5 = 0$, b) $3x - 9y - 7 = 0$
13. $\mathscr{L} : \begin{cases} x - 8y + 5z - 3 = 0 \\ x + 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$; **14.** $\begin{cases} 7x - y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x - z - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 5y - 7z - 12 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$
15. a) $\text{Sen}\alpha = 1/\sqrt{15}$, $M(1, -6, -4)$, b) $3x - y + 2z - 1 = 0$, c) $\mathscr{L}_1 : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 3x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$

Grupo 35 *Miscelánea de ejemplos ilustrativos*

1. $4x + 3y - 5z - 2 = 0$; **2.** $Q(4, 1, -3)$; **3.** $9x + 13y - 7z - 14 = 0$
4. $(0, -1, 2)$; **5.** $x + y + z + 8 = 0$; **6.** $(2, 1, 1)$; **7.** $Q(-5, 1, 0)$; **8.** $Q(-5, 1, 0)$
9. $P(3, -4, 0)$; **10.** $P(-1, 3, -2)$; **11.** $A = -3$, $B = 9/2$; **12.** $a = -6$, $C = 3/2$
13. $x - 8y - 13z + 9 = 0$; **15.** $9x + 11y + 5z - 16 = 0$; **17.** $x = 28 - 7.5t$, $y = -30 + 8t$, $z = -27 + 6t$, a) $P(-2, 2, -3)$, b) desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = 4$, c) $\overline{M_0P} = 50$
19. $\sqrt{6}/3$; **20.** $x - 1 = 0$, $x - 4\sqrt{3}\,y - (1 + 12\sqrt{3}) = 0$; **21.** $x \pm \sqrt{3}\,y - (2 \pm \sqrt{3}) = 0$
22. $5x + 5y + (8 \pm 3\sqrt{6})z - 20 = 0$; **23.** $\mathscr{L} : \frac{x - 3}{5} = \frac{y + 2}{-6} = \frac{z + 4}{9}$; **24.** $(2, -3, -5)$
25. $Q(1, 2, -2)$; **26.** $Q(1, -6, 3)$

Grupo 36 *El conjunto de los números complejos*

1. a) $x = 2, y = 3$; b) $x = 3, y = 2$; c) $x = -4/11, y = 5/11$; d) $x = 2/5, y = -1/5$
e) $x = -13/7$, $y = 5/7$; f) $x = 1/3$, $y = 1/4$; g) $x = 2$, $y = -3$
2. a) $z = (1, -12)$, b) $z = (0, 1)$, c) $z = (1, 1)$, d) $z = (1/2, 3/2)$, e) $z = (-1/2, 3/2)$
3. a) $z = 2 + i$, b) $z = 5 - 4i$, c) $z = -1 + 0i$, d) $z = -\frac{26}{27} + 0i$
7. $z_3 = (2, -2)$, $z_3^{-1} = (1/4, 1/4)$; **8.** a) -3/25 , b) -9/17 ; **9.** $\text{Im}(z) = -3$; **10.** 1
11. $z_3^{-1} = (-2/17, -9/17)$; **12.** $z = (17/100, -6/100)$; **13.** $z = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}i$
14. a) $z = -(3 + i)/2$, b) $z = 672(-1 + i)$, c) $z = 8 - 2i$. d) $z = 0 + i\sqrt{6}$; **15.** $x^2 + y^2 = 1$
16. $w = 2 + (1 + \sqrt{3})i$, $z = 1 + (1 - \sqrt{3})i$; **17.** a) $z = (-1, 6)$, b) $z_1 = (-4, 8)$
18. 1 ; **20.** $S = 1$, $S = i$; **21.** a) 1 , b) -1 ; **22.** $z = 1 + i$, $w = i$
23. $z = \frac{1}{34}(37, 73)$, $w = \frac{2}{17}(8, -15)$; **24.** $z = 2 + 3i$, $w = 1 - i$; **25.** $z = \pm i\sqrt{2}$, $w = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$, $v = -1 \pm i$; **26.** $z = 1$, $w = i$, $v = 2i$; **27.** $z = 3 + 2i$, $w = 4 - i$
28. $z = 2 + i$, $w = 1 - 2i$; **29.** $z = 1$, $w = i$; **30.** $z = 2 + i$, $w = 2 - i$; **31.** $z = 1 - i$, $w = -1 - i$, $v = 3$; **32.** $z = 2 - i$, $w = -2 + i$, $v = -1 + i$; **33.** $z = i$, $w = 2i$, $v = 2 - 3i$

Grupo 37 *Módulo y raíz cuadrada de un número complejo*

1. $\sqrt{2}/2$; **2.** $\sqrt{2}$; **3.** $4i$; **4.** $\sqrt{370}/5$; **5.** $3/5$; **6.** $w = (1, 2)$, $z = (3, -1)$
7. $z = (3/4, 1)$; **8.** $z_3 = (7 + 2\sqrt{3}, 4 + 3\sqrt{3})$ ó $z_3 = (7 - 2\sqrt{3}, 4 - 3\sqrt{3})$
9. $(3, 2)$ ó $(3, 8)$; **10.** $(7/8, 7/8)$; **11.** $z = (2, -2)$; **12.** $z_3 = (6, 5)$ ó $z_3 = (-4, 1)$
26. a) $w = \pm(1 - 4i)$, b) $w = \pm(2 - i)$, c) $w = \pm(5 + 6i)$, d) $w = \pm(1 + 3i)$,
e) $w = \pm(4 + 3i)$, f) $w = \pm(1 - 3i)$, g) $w = \pm(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + i\sqrt{2 + \sqrt{3}})$,
h) $w = \pm(4 + 3i)$, i) $w = \pm(\sqrt{3} + 2i)$; **27.** a) $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 1 - i$;
b) $z_1 = 3 - i$, $z_2 = -1 + 2i$; c) $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 - 3i$; d) $z_1 = 1 - i$, $z_2 = \frac{2}{5}(2 - i)$

Grupo 38 *Lugares geométricos en* $\mathbb{C}$

1. Eje imaginario para $y \leq 0$; **2.** Parábola $y^2 = 4(x + 1)$; **3.** Circunferencia de centro $Q(-1, 0)$ y $r = 1$; **4.** Circunferencia de centro $Q(-2, 0)$ y $r = 2$
5. Circunferencia de centro $Q(2, -1)$ y $r = 2$; **6.** Mediatriz del segmento z_1z_2
7. Una recta : $4x + 2y + 3 = 0$; **8.** Hipérbola equilátera : $xy = 2$; **9.** Parábola : $x^2 = 2y + 1$; **10.** Elipse con focos en $F_1(1, 2)$ y $F_2(-1, 2)$, semiejes , $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$

11. Circunferencia de centro Q(-1 , 1/2) y r = 3/2 ; **12.** Elipse: $4x^2 + 3y^2 = 12$

13. a) $Re(w) = \frac{1 - x^2 - y^2}{(1-x)^2 + y^2}$, $Im(w) = \frac{2y}{(1-x)^2 + y^2}$; b) Circunferencia de centro Q(1/2 , 0)

14. Mediatriz : $2x - 3y + 5 = 0$; **15.** El interior y el borde de la circunferencia de radio 1 y centro Q(0 , 1) ; **16.** El interior de la circunferencia de radio 1 y centro Q(1 , 1)

17. El interior y el borde de la elipse con focos en $F_1(2 , 0)$ y $F_2(-4 , 0)$, semiejes : a = 5 y b = 4 ; **18.** La franja $-1 < y < 0$; **19.** Interior de la rama izquierda de la hipérbola de focos $F_1(2 , 0)$ y $F_2(-2 , 0)$, semieje real a = 3/2

20. Interior de $|z - i| = \sqrt{2}$ y $|z + i| = \sqrt{2}$, excepto la región común

21. Anillo encerrado entre las circunferencias $\mathscr{C}_1 : (x + 2)^2 + y^2 = 1$ y $\mathscr{C}_2 : (x + 2)^2 + y^2 = 4$, $\mathscr{C}_1$ no pertenece al anillo ; **22.** La parábola $D = \{(x , y) \mid y^2 > 1 - 2x\}$

23. El interior y el borde de las dos ramas de la hipérbola de centro Q(0 , 0) y semiejes : a = 2 y b = $\sqrt{5}$, focos : $F_1(0 , 4)$ y $F_2(0 , -2)$; **24.** El interior de las dos ramas de la hipérbola con centro en Q(1 , 2) y focos en $F_1(-3 , 5)$ y $F_2(5 , -1)$, semiejes : a = 4 , b = 3 ; **25.** El semiplano superior y el borde de la recta $x + 4y = -4$; **26.** Región comprendida en el interior y borde de la circunferencia $\mathscr{C}_1 : (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$ y la parte exterior a la circunferencia, $\mathscr{C}_2 : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$, excepto el origen y el borde de $\mathscr{C}_2$

31. En el interior de la circunferencia de centro (0 , 0) y radio r = 5

32. Parábola : $y^2 = 4(1 - x)$

Grupo 39 *Forma polar de un número complejo*

1. z = 12 Cis 30° ; **2.** z = 6 Cis 300° ; **3.** z = Cis 150° ; **4.** z = 10 Cis 210°

5. z = 8 Cis 120° ; **6.** z = 4 Cis 315° ; **7.** -1 - i ; **8.** $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$; **9.** $\frac{1}{2}(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})$

10. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$; **11.** $2(1 + i\sqrt{3})$; **12.** a) $z = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ Cis 75° , b) $z = |\text{Cosec}\,\theta|$ Cis (270° - θ) ; **13.** -672 $\sqrt{2}$ Cis(3π/4) ; **14.** i Cosec θ ; **15.** z = 4 Cis(11π/12)

Grupo 40 *Potenciación de números complejos*

1. $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$; **2.** $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$; **3.** $2^9(1 - i\sqrt{3})$; **4.** $(2 - \sqrt{3})^{12} + 0i$; **5.** $0 - 2^{16}i$

6. 1 + 0i ; **7.** 0 + 64i ; **8.** -64 + 0i ; **9.** -1 + 0i ; **10.** 1 + 0i ; **11.** $-6^{30} + 0i$

12. $8^{40} + 0i$; **13.** $-\sqrt{3} + i$; **14.** -1 + 0i ; **15.** $1 - i\sqrt{3}$; **16.** 1 + i ; **17.** 2^{19}

18. Cis(n π/3) ; **19.** -Cos 6x + i Sen 6x ; **20.** a) $\frac{1}{8}$ (Cos 4x - 4 Cos 2x + 3) ,

b) $\frac{1}{32}$ (Cos 6x + 6 Cos 4x + 15 Cos 2x + 10) , c) $\frac{1}{64}$ (- Sen 7x + 7 Sen 5x - 21 Sen 3x + 35 Sen x) , d) $\frac{1}{64}$ (Cos 7x + 7 Cos 5x + 21 Cos 3x + 35 Cos x)

21. a) $\text{Cos}^5x - 10\,\text{Cos}^3x\,\text{Sen}^2x + 5\,\text{Cos}\,x\,\text{Sen}^4x$

b) $\text{Cos}^8x - 28\,\text{Cos}^6x\,\text{Sen}^2x + 70\,\text{Cos}^4x\,\text{Sen}^4x - 28\,\text{Cos}^2x\,\text{Sen}^6x + \text{Sen}^8x$

c) $5\,\text{Senx}\,\text{Cos}^4x - 10\,\text{Sen}^3x\,\text{Cos}^2x + \text{Sen}^5x$

d) $7\,\text{Cos}^6x\,\text{Senx} - 35\,\text{Cos}^4x\,\text{Sen}^3x + 21\,\text{Cos}^2x\,\text{Sen}^5x - \text{Sen}^7x$

23. θ = kπ ó θ = kπ - π/2 ; **24.** $\{(0 , 0) , \frac{1}{64}(1 , \sqrt{3})\}$; **25.** a) $\frac{1}{32}(-1 + \sqrt{3})$, b) $\frac{-a^4}{4\,\text{Sen}^4\alpha}$, c) $\frac{1}{2}(-\sqrt{3} - i)$

Grupo 41 *Radicación de números complejos*

1. $\pm(\sqrt{3} + i) , \pm(-1 + i\sqrt{3})$; **2.** $2i , -\sqrt{3} - i , \sqrt{3} - i$; **3.** $2\,\text{Cis}\left(\frac{5\pi + 6k\pi}{15}\right)$, k = 0, 1, 2, 3, 4

4. 2 Cis(5π/9), 2 Cis(11π/9), 2 Cis(17π/9) ; **5.** $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i , -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i , -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i , \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

6. 2 Cis(7π/30) , 2 Cis(19π/30) , 2 Cis(31π/30) , 2 Cis(43π/30) , $\sqrt{3} - i$

7. $(1/\sqrt[12]{2})\,\text{Cis}\left(\frac{5\pi + 6k\pi}{15}\right)$, k = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 ; **8.** $(1/\sqrt[16]{2})\,\text{Cis}\left(\frac{19\pi + 24k\pi}{96}\right)$ k = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 ; **9.** $(1/\sqrt[12]{2})\,\text{Cis}\left(\frac{17\pi + 24k\pi}{96}\right)$, k = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5

10. $\sqrt[8]{2}\,\text{Cis}\left(\frac{\pi + 24k\pi}{48}\right)$, k = 0 , 1 , 2 , 3 ; **11.** a) 0 , b) 0 ; **13.** {2 + 3i , -3 + 2i}

14. {1 + i , 2 + i} ; **15.** {0 , 1 + i , 1 + i} ; **16.** {-1 + i , -3 - 4i}

17. $\{\pm(1 + \sqrt{3}) , \pm(-\sqrt{3} + i)\}$; **18.** $w_k = 2\,\text{Cis}\left(\frac{240 + 2k\pi}{3}\right)$, k = 0 , 1 , 2

19. $\{1 , -2 , \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i) , 1 \pm i\sqrt{3}\}$; **20.** $w_k = \sqrt[3]{12}\,\text{Cis}\left(\frac{240 + 2k\pi}{3}\right)$, k = 0 , 1 , 2

21. $\left\{\pm\left(\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{2}}\right) , \pm\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)\right\}$; **22.** $\{(1 \pm i\sqrt{3})\} , (-1 \pm i\sqrt{3})\}$

23. $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13} + 2}{2}} , -\sqrt{\frac{\sqrt{13} - 2}{2}}\right) , \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} , \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}\right)$

24. $\{1 , -1/3 , -\frac{1}{5}(1 \pm 2i)\}$; **25.** $w_k = \sqrt{6}\,\text{Cis}(k\pi/2)$ ó $w_k = \text{Cis}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)$, k = 0 , 1, 2 , 3 ; **26.** $w_k = 2\,\text{Cis}\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{4}\right) - 3$, k = 0 , 1 , 2 , 3

27. $\{3, \frac{1}{2}(-1 \pm 7i)\}$; **28.** $\{i, -7i/2\}$; **30.** a) Si $\omega = 1 \Rightarrow S = \frac{n}{2}(n+1)$, si $\omega \neq 1 \Rightarrow S = \frac{n}{\omega - 1}$, b) Si $\omega = 1 \Rightarrow S = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$, si $\omega \neq 1 \Rightarrow$

$$S = \frac{n^2\omega^2 - 2n(n+1)\omega + n(n+2)}{(\omega - 1)^3}$$

Grupo 42 *Miscelánea de Ejemplos Ilustrativos*

1. $\frac{99}{4}(e^{i8\pi/3})$; **2.** $z = 2^{-21}(-1 + i\sqrt{3})$; **3.** $\frac{1}{8}(\text{Cos } 4x + 4 \text{ Cos } 2x + 3)$;

4. $16 \text{ Cos}^4 x - 12 \text{ Cos}^2 x + 1$; **5.** a) $w_0 = \text{Cis } 70°$, $w_1 = \text{Cis } 190°$, $w_2 = \text{Cis } 310°$
b) $w_0 = i$, $w_1 = \frac{3}{2} + (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})i$, $w_2 = -\frac{3}{2} + (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})i$; c) $w_0 = 2 \text{ Cis } 100°$
$w_1 = 2 \text{ Cis } 220°$, $w_2 = 2 \text{ Cis } 340°$, d) $\frac{1}{2}(1 \pm i)$; **6.** $\sqrt[6]{2}$, $-2\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}$

10. b) $t = \text{Tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \text{Cos}\,\theta}{1 + \text{Cos}\,\theta}}$; **11.** $\sqrt{5}/5$; **13.** a) v , b) v ; **14.** -2^{19}

17. $\text{Re}(z) = \frac{1}{2} \text{ Cotg}\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{n}\right)$, $\text{Im}(z) = -\frac{1}{2}$; **18.** $\frac{2 \text{ Cos}\, nx}{\text{Cos}^n x}$; **20.** -2

21. b) 32 ; **23.** $\frac{2^n}{3^{(n-1)/2}} \text{ Sen}\left(\frac{n\pi}{6}\right)$; **27.** $\frac{\text{Cos}\left[a + \left(\frac{n-1}{2}\right)x\right] \text{Sen}\left(-\frac{nx}{2}\right)}{\text{Cos}\,(x/2)}$, si n es par

$\frac{\text{Sen}\left[a + \left(\frac{n-1}{2}\right)x\right] \text{Cos}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\text{Cos}\,(x/2)}$, si n es impar ; **28.** $2^n \text{ Cos}^n\left(\frac{x}{2}\right) \text{Sen}\left(\frac{n+2}{2}\right)x$

29. a) $2^n \text{ Sen}^n\left(\frac{x}{2}\right) \text{Cos}\left[\frac{n\pi - (n+2)x}{2}\right]$, b) $2^n \text{ Sen}^n\left(\frac{x}{2}\right) \text{Sen}\left[\frac{(n+2)x - n\pi}{2}\right]$

30. $\frac{n}{2} - \frac{\text{Sen } 4x}{4 \text{ Sen } 2x}$; **34.** $\frac{\text{Sen}\left(\frac{n+1}{2}\right)x \ \text{Cos}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\text{Cos}\,(x/2)}$, n impar ;

$-\frac{\text{Cos}\left(\frac{n+1}{2}\right)x \ \text{Sen}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\text{Cos}\,(x/2)}$, n par ; **37.** $S = \text{Tg}^n x \text{Cos}(3\pi n/2)$; **38.** $\text{Sen}\left(\frac{nx}{2-n}\right)$

39. 1/2 ; **41.** $0 , \frac{\omega - 1}{\omega + 1} , \frac{\omega^2 - 1}{\omega^2 + 1} , \frac{\omega^3 - 1}{\omega^3 + 1} , \frac{\omega^4 - 1}{\omega^4 + 1}$, $\omega = e^{i2\pi/5}$; **42.** $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{Sen}(n-k)\theta =$
$2^n \text{ Sen}^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \text{Cos } n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$; **43.** 0 ; **44.** $2^{99}\sqrt{3}$

46. $P(z) = \frac{\text{Sen}\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\text{Cos}\,(\theta/2)} \text{Cis}\left(\frac{\pi + n}{2}\right)$; **47.** a) $2^n \text{Sen}^n(\theta/2) \text{ Cos}(n\theta/2)$, n par ,

$2^n \text{Sen}^n(\theta/2) \text{ Sen}(n\theta/2)$, n impar ; b) $-2^n \text{Sen}^n(\theta/2) \text{ Cos}(n\theta/2)$, n par ,
$2^n \text{Sen}^n(\theta/2) \text{ Cos}(n\theta/2)$, n impar.-

Grupo 43 *Matrices*

1. a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, d) $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 9 \\ 17 & 15 & 17 \end{bmatrix}$

2. $4I_2$; **3.** -12 ; **4.** $X = \begin{bmatrix} -9 & 10 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$; **5.** a) $X = \begin{bmatrix} 29 & -4 \\ -6 & 28 \end{bmatrix}$, b) $X = \begin{bmatrix} 6 & 10.5 \\ -22 & -12 \end{bmatrix}$

6. $X = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 \\ -6 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; **7.** $X = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

Grupo 44 *Propiedades de la multiplicación de matrices*

1. a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{bmatrix}$; **2.** $a = 1$, $b = -6$, $c = 0$, $d = -2$; **3.** 6 ; **4.** 0

5. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; **6.** $5I_2$; **8.** a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$; **9.** $\begin{bmatrix} -31 & 14 \\ -105 & 46 \end{bmatrix}$; **10.** $\begin{bmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{bmatrix}$

11. 28 ; **12.** I_3 ; **13.** B ; **14.** 512A ; **15.** θ ; **16.** 9A ; **18.** 282

19. a) $B = \begin{bmatrix} a & 2b \\ -3b & a + 3b \end{bmatrix}$, $a , b \in \mathbf{R}$, b) $B = \begin{bmatrix} a & 3b \\ -5b & a + 9b \end{bmatrix}$, $a , b \in \mathbf{R}$; **20.** -3

21. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, $a , b \in \mathbf{R}$. donde $a^2 + bc = 1$; **22.** a) $\begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} \text{Cos}n\alpha & -\text{Sen}n\alpha \\ \text{Sen}n\alpha & \text{Cos}n\alpha \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n}{2}(n+1) \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 1 & -n & \frac{n}{2}(n-3) \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, e) $2A^{n-1}$

23. [\$ 17,450 \$ 21,550 \$ 14,575 \$ 16,450]

Grupo 45 *Matrices cuadras especiales*

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}$; **5.** $\begin{pmatrix} 12 & -20 \\ 21 & -6 \end{pmatrix}$; **6.** a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 26 & 127 \\ 254 & 661 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 12 & -16 \end{pmatrix}$; **7.** $\begin{pmatrix} 10 & -7 \\ 35 & 10 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -2 & 15 & -13 \\ 14 & -3 & 7 \\ -8 & 9 & -1 \end{pmatrix}$; **9.** $\begin{pmatrix} 27 & 8 & 7 \\ 5 & 18 & -2 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$; **10.** $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 1 \\ -2 & -11 & 9.5 \\ -9 & 2.5 & -5.5 \end{pmatrix}$; **11.** $\begin{pmatrix} 4 & -5 & -7 & 3 \\ 0.5 & -8.5 & -9 & -5 \\ -4.5 & -3.5 & 0.5 & -3 \\ 4 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

12. 2 y 23 ; **13.** S = 2 ; **18.** 4 ; **19.** $2 I_3$; **20.** 16 ; **22.** 4 ; **26.** -A ; **27.** 2

28. 1/9 ; **29.** 11 ; **30.** 1/4 ; **31.** $\begin{pmatrix} 6 & 7 & -3 \\ 7 & 14 & 5 \\ -3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$; **32.** $\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n}{2}(n-1)a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; **34.** $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$; **35.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; **36.** $\begin{pmatrix} 1/2 & -2 & 7/2 & -5/6 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

Grupo 46 *Transformaciones elementales*

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. 2 ; **8.** 3 ; **9.** 3 ; **10.** 2 ; **11.** 3 ; **12.** 2 ; **13.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; **14.** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; **16.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; **17.** $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 48 & -38 & 75 \\ 72 & 108 & 423 \\ -72 & 82 & -75 \end{pmatrix}$; **18.** $\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9 & 2 & -14 \\ 1 & 2 & 2 \\ 20 & 8 & -8 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & x-ab & abc+ay-cx+2 \\ 0 & 1 & b & -bc-y \\ 0 & 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **20.** $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & 19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$ **21.** $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -7 & 20 \\ -7 & -3 & 5 & -10 \\ 9 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ **23.** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -115 & 110 & -64 & -18 \\ 50 & -60 & 26 & 7 \\ 5 & -10 & 6 & 2 \\ 10 & -10 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **24.** $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **25.** 1

Grupo 47 *Sistemas de ecuaciones lineales*

1. $X = (4, 3, 2)^t$; **2.** $X = (2-3r, 4+r, 2-r, r)^t$; **3.** $X = (-4-4r, 5+5r, -1-2r, r)^t$

4. $X = (2, -1, 1)^t$; **5.** $X = (-1, 3, -2)^t$; **6.** $X = (-1, 5, -2)^t$; **7.** $X = (3, 4, -2)^t$

8. $X = (-1, 2, 3)^t$; **9.** $X = (-12, -18, -5)^t$; **10.** $X = (-1, 3, -2, 2)^t$

11. $X = (r, -13+3r, -7, 0)^t$; **12.** Inconsistente ; **13.** Inconsistente

14. $X = (2-s, 3+2s, -5+2s, s)^t$; **15.** $X = (2, 3, -1, -2)^t$; **16.** $X = (1+s, s, 3, -1)^t$

17. $X = (-1, 3, -2, 2)^t$; **18.** $X = (3, 2, 4, -1)^t$; **19.** $X = (r, s, r+s-1, 3, -1)^t$

20. $X = (1, 2r, r, -3s, s)^t$; **21.** Si $(\lambda - 1)(\lambda + 3) \neq 0 \Rightarrow X = \frac{1}{\lambda+3}(1, 1, 1, 1)^t$

Si $\lambda = 3$, inconsistente. Si $\lambda = 1 \Rightarrow X = (1 - t_1 - t_2, -t_3, t_1, t_2, t_3)^t$

22. Si $\lambda = 8 \Rightarrow X = (t_1, 4 + 2t_1 - 2t_2, 3 - 2t_2, t_2)^t$. Si $\lambda \neq 8 \Rightarrow X = (0, 4 - 2t_1, 3 - 2t_2, t_2)^t$; **23.** Si $\lambda = -3$, inconsistente , si $\lambda = 0 \Rightarrow X = (1 - t_1 - t_2, t_1, t_2)^t$

24. Si $\lambda \neq 0$, el sistema es inconsistente. Si $\lambda = 0 \Rightarrow X = (-3/2, -5/2)^t$

25. $X = t_1(1, 0, -5/2, 7/2)^t + t_2(0, 1, 5, -7)^t$; **26.** $X = t_1(1, 0, 0, -9/4, 3/4)^t + t_2(0, 1, 0, -3/2, 1/2)^t + t_3(0, 0, 1, -2, 1)^t$; **27.** $X = t_1(-3, 2, 1, 0, 0)^t + t_2(-5, 3, 0, 0, 1)^t$

28. $X = t_1(-1, 1, 0, 0, 0)^t + t_2(6, 0, -5/2, 1, 3)^t$; **29.** a) $a = 2$, $X = t_1(1, 0, -2)^t$ $a = -4$, $X = t_2(1, -24/5, 4/5)^t$, b) $a = -1$, $X = t_1(-5, 3, 1/3, 1)^t$

30. Las filas de la matriz A no lo forman , mientras que las filas de la matriz B sí. Si el rango de la matriz de coeficientes de las incógnitas es igual a r , se debe averiguar que : a) el rango de A (de B , respetivamente) es igual a 5 - r , b) las filas de la matriz A (de B respectivamente) constituyen las soluciones del sistema de partida.

31. $X = (1/3, 1/3, 0, 0, 0)^t + t_1(0, 1, 1, 0, 0)^t + t_2(0, 1, 0, 1, 0)^t + t_3(1/3, -5/3, 0, 0, 1)^t$

32. $X = (1/3, -1/3, 0, 0, 0, 0)^t + t_1(1, 1, 0, 0, 0, 0)^t + t_2(-1, 0, 1, 0, 0, 0)^t + t_3(0, 0, 0, 1, 1, 0)^t + t_4(0, 0, 0, -1, 0, 1)^t$

33. $X = (2/3, 1/6, 0, 0, 0)^t + t_1(0, 1/2, 1, 0, 0)^t + t_2(0, -1/2, 0, 1, 0)^t + t_3(1/3, 5/6, 0, 0, 1)^t$

34. $X = (1, -1/2, 0, 0, 0)^t + t_1(0, -3/2, 1, 0, 0)^t + t_2(0, -2, 0, 1, 0)^t + t_3(0, -5/2, 0, 0, 1)^t$

35. $x = 3$, $y = 4$, $z = 4$

Grupo 48 *Propiedades de los determinantes*

1. 0 ; **2.** -2 ; **3.** $\text{Sen}(\alpha - \beta) + \text{Sen}(\beta - \gamma) + \text{Sen}(\gamma - \alpha)$; **4.** $abc + x(ab + bc + ca)$

5. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 1$; **6.** 0 ; **7.** $3\sqrt{3}i$; **8.** a) $x = -4 \pm \sqrt{22}$, b) $x \in \mathbf{R}$; **9.** $x \in \langle -6, -4 \rangle$

13. Una parábola $y = (x - a)(x - b)$; **14.** 32 ; **15.** 273 ; **16.** -43 ; **17.** -252

18. -11,000 ; **19.** -29×10^5

Grupo 49 *Existencia de los determinantes*

1. 6 ; **2.** 2 ; **3.** 1 ; **4.** 2 ; **5.** -5 ; **6.** -20 ; **7.** 8 ; **8.** 4 ; **9.** 45 ; **10.** 48
11. 223 ; **12.** -38 ; **13.** {1 , 2} ; **14.** {1 , 0 , 4} ; **15.** {0 , 2} ; **16.** $8a + 15b + 12c - 19d$
17. $2a - 8b + c + 5d$; **18.** $abcd$; **19.** $abcd$; **20.** xyzuv

Grupo 50 *Cálculo de determinantes de cualquier orden*

1. {-4/3 , 3} ; **2.** {3/2 , 4} ; **3.** {2 , 5/2} ; **4.** {18} ; **5.** {-3 , 2 , 4} ; **6.** {-10 , -3}
7. 0 ; **8.** 6 ; **9.** 704 ; **10.** 665 ; **11.** 394 ; **12.** 5 ; **13.** 1 ; **14.** 1 ; **15.** 1/3
16. 100 ; **17.** 2 - 2i ; **18.** 6 ; **19.** i ; **20.** 1 ; **21.** 0 ; **22.** Sen$(c - a)$ Sen $(c - b)$ Sen $(a - b)$; **23.** 0 ; **24.** $3(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)(ab + ac + bc)$
25. $(ab + bc + ca)x + abc$; **26.** $(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$; **27.** $-2(x^3 + y^3)$
28. $1 + a^2 + b^2 + c^2$; **29.** $4(a + b)(a + c)(b + c)$; **30.** $4x^2y^2z^2$
31. $(a^2 + b^2 + c^2)(b - a)(c - a)(c - b)(a + b + c)$; **32.** x^2z^2 ; **33.** $abcd$
34. $(af - be + cd)^2$; **35.** $-3(x^2 - 1)(x^2 - 4)$; **36.** $(a + b)(a - b)^3$; **37.** $abcd$
38. $k = -a^2$; **39.** $a = 1/2$; **45.** $-a_1 a_2 \ldots a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$; **46.** n + 1
47. Cos nx ; **48.** $a_1 a_2 \ldots a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$; **49.** $2^{n+1} - 1$
50. $\frac{1}{3}(5^{n+1} - 2^{n+1})$; **51.** $9 - 2^{n+1}$; **52.** $5(2^{n-1}) - 4(3^{n-1})$

Grupo 51 *Cálculo de determinantes mediante la reducción a la forma escalonada*

1. 425 ; **2.** 1 ; **3.** 20 ; **4.** 100 ; **5.** 6 ; **6.** 0 ; **7.** 2 ; **8.** -128 ; **9.** -72
10. 275 ; **11.** -8 ; **12.** 48 ; **13.** 2n + 1 ; **14.** -2(n - 2)! ; **15.** $\frac{1}{2}[(x + a)^n + (x - a)^n]$
16. $-a_1 a_2 \ldots a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$; **17.** $b_1 b_2 b_3 \ldots b_n$
18. $(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$; **19.** $\frac{n}{2}[2a + (n - 1)h]a^{n-1}$; **20.** $(-1)^{n-1}(n + 1)2^{n-2}$
21. $\frac{nx^n}{x - 1} - \frac{x^{n-1}}{(x - 1)^2}$; **22.** $(n - 1)(-1)^{n-1}x^{n-2}$; **23.** $a_1 a_2 \ldots a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$
24. $\frac{n+1}{1 - x} + \frac{x^{n+1} - 1}{(1 - x)^2}$; **25.** $(-1)^{n-1}x^{n-2}$; **26.** $(-1)^n[(x - 1)^n - x^n]$
27. $(1)^n 2^{n-1} a_1 a_2 a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_n}\right)$; **28.** $\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{2n^{n-1}(n + 1)}$; **29.** $(1 - x_n)^{n-1}$
30. $(x - 1)^n$; **31.** $(\alpha - \beta)^{n-2}[\lambda a + (n - 2)\lambda\beta - (n - 1)ab]$; **32.** $n(-1)^{n(n-1)/2}$

33. $(-1)^{n(n-1)/2}(nh)^{n-1}[a + \frac{1}{2}(n - 1)]$; **34.** $(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)x^n$; **35.** 1
36. $2x^3y(x - y)^6$

Grupo 52 *Otras aplicaciones y propiedades de los determinantes*

1. 24 ; **2.** 18 ; **3.** $(a + b + c + d)(a + b - c - d)(a - b + c - d)(a - b - c + d)$; **4.** 256
5. 78,400 ; **6.** 64 ; **7.** 210 ; **8.** 220 ; **9.** $(be - cd)^2$
10. $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(c_1 c_2 - d_1 d_2)$

Grupo 53 *Rango de una matriz*

1. 2 ; **2.** 3 ; **3.** 3 ; **4.** 3 ; **5.** 3 ; **6.** 3 ; **7.** $\rho(A) = 2$ si $k = 0$ y $\rho(A) = 3$ si $k \neq 0$
8. $\rho(A) = 3$, $\forall k \in \mathbb{R}$; **9.** $D(A) = 2(n - 1)(n - 2)^{n-1} \neq 0 \Rightarrow n \geq 3$
10. $D(A) = (3x + 1)(1 - x)^3 \Rightarrow D(A) = 0 \Leftrightarrow x = -1/3, x = 1$; **11.** $D(A) = (4x^2 - 1) \Rightarrow D(A) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1/2$; **12.** a) $x \in \mathbb{R} - \{0, 2, 3\}$, b) $x = 0, x = 2, x = 3$
13. Si $x \neq 0$, $\rho(A) = 3$; si $x = 0$, $\rho(A) = 2$; **14.** Si $x = 3$, $\rho(A) = 2$; si $x \neq 3$, $\rho(A) = 3$
15. $\rho(A) = 4$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{-13, 3\}$; $\rho(A) = 3$, para $x = -13$, $x = 3$

Grupo 54 *Inversa de una matriz de segundo orden*

1. S = 4 ; **2.** E = 5 ; **4.** $\frac{1}{36}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$; **5.** $\begin{bmatrix} 4/3 & -2/3 \\ 2 & -2/3 \end{bmatrix}$; **6.** $5\pi/3$; **7.** $B^{-1}A^{-1}DC^{-1}$
8. a) $X = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 37 & -51 \end{bmatrix}$, b) $X = \begin{bmatrix} 13 & -28 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}$; **9.** $X = \begin{bmatrix} -3 & 36 \\ 4 & -29 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$
10. $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$; **11.** $X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; **12.** $X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$; **13.** $X = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
14. $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; **15.** $X = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$; **16.** $X = \begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}$; **17.** $X = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
18. $X = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; **19.** $E = 2I_3$; **20.** a) $P(x) = x^2 - 5x + 4$; b) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$; c) $B = b\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; **21.** $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ó $A = \begin{bmatrix} -1/2 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; **22.** $X = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 25 & -2 \\ -2 & 25 \end{bmatrix}$

Grupo 55 *Inversa de una matriz (Método de la adjunta)*

1. $\begin{bmatrix} 14 & 8 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ 4. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 18 \end{bmatrix}$

5. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & -5 \end{bmatrix}$ 6. $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ 7. $\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 5 & 10 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ 10. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 11. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 12. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

13. $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ 14. $X = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ 15. $X = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ 16. $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

17. $X = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -225 & -274 & -76 \\ 366 & 446 & 122 \\ 48 & 56 & 20 \end{bmatrix}$ 18. $X = \begin{bmatrix} 14 & -8 & -1 \\ -17 & 10 & 1 \\ -19 & 11 & 1 \end{bmatrix}$ 19. $a^{n-1}\left(\frac{A}{|A|}\right)$; 20. $S = 10$

21. $S = 2$; 22. $S = 5$; 23. $S = 5.1$; 24. $x = -3, x = -2, x = 0$; 25. $x = 1, x = 2$

26. $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$; 27. $x = 1, x = 4$; 28. $\exists A^{-1} \forall x \in \mathbb{R}$, $A^{-1} = \frac{1}{6x^2 + 21}\begin{bmatrix} 5x & x^2 - 9 & 15 \\ 7 & 5x & -6x \\ -x & x^2 + 6 & -3 \end{bmatrix}$

29. $D(A) = (a - b)(a - c)(c - b)$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} a(b + c) & -a & -1 \\ b(a + c) & -b & -1 \\ c(a + b) & -c & -1 \end{bmatrix}$; 30. $a = 1, b = 2, d = 1, e = 2$

Grupo 56 *Resolución de sistemas de ecuaciones lineales*

1. $\{(7, 2)\}$; 2. $\{(-3, 5)\}$; 3. $\{(\text{Cos}(c - b), \text{Sen}(c - b))\}$; 4. $\{(16, 7)\}$
5. $\{(-b, -2a/3)\}$; 6. $\{(\text{Cos}b\,\text{Cos}c, \text{Cos}b\,\text{Sen}c)\}$; 7. $\{(2, -3, 1)\}$; 8. $\{(2, 6, -2)\}$
9. $\{(3, 2, 1)\}$; 10. $\{(2, -2, 5)\}$; 11. $\{(-2, 3/2, -1)\}$; 12. $\{(-1, 3, -2)\}$
13. $\{(2, -1, 1)\}$; 14. $\{(3, 1, -1)\}$; 15. $\{(bc, ac, ab)\}$
16. $D(A) = (a - b)(a - c)(c - b)$. Si a, b y c son todos distintos, $x = abc$, $z = a + b + c$, $y = -(ab + bc + ac)$. Si entre a, b y c hay dos iguales las soluciones dependen de un parámetro. Si $a = b = c$ las soluciones dependen de dos parámetros.
17. $S(A) = b(1 - a)$. Si $b(1 - a) \neq 0$, $x = \frac{2b - 1}{b(a - 1)}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{2ab - 4b + 1}{b(a - 1)}$

Si $a = 1$, $b = 1/2$, las soluciones dependen de un parámetro. Si $b = 0$ el sistema es inconsistente.

18. $D(A) = b(a - 1)(a + 2)$. Si $D(A) \neq 0$, $x = z = \frac{a - b}{(a - 1)(a + 2)}$, $y = \frac{ab + b - 2}{b(a - 1)(a + 2)}$
Si $a = 1$, $b = 1/2$, las soluciones dependen de un parámetro.
Si $b = 0$ y $a = -2$, el sistema es inconsistente.
19. $D(A) = a(a - b)$. Si $D(A) \neq 0$, $x = \frac{a^2(b - 1)}{b - a}$, $y = \frac{b(a^2 - 1)}{a(a - b)}$, $z = \frac{a - 1}{a(b - a)}$
Si $a = b = 1$, las soluciones dependen de dos parámetros.
Si $a = 0$, el sistema es inconsistente
20. $D(A) = a^2(a - 1)$. Para $a = 0$ y $a = 1$ el sistema es inconsistente
21. $D(A) = -2a$. Si $a \neq 0$, $x = 1 - a$, $y = a$, $z = 0$. Si $a = 0$, $x = 1$, $z = 0$, y = arbitrario.
22. $D(A) = (a - 1)^2(a + 1)$. Si $a = 1$, la solución dependen de un parámetro. Si $a = -1$ el sistema es inconsistente.
23. $D(A) = -m(m + 2)$. Para $m = -2$ y $m = 0$ el sistema es inconsistente.
24. $D(A) = a(a - 1)(a + 1)$. Si $a = -1$ y $a = 1$, el sistema es inconsistente. Si $a = 0$, la solución depende de un parámetro.
25. $D(A) = 3(a + 1)(a - 1)^2$. Si $a = -1$ el sistema es inconsistente. Si $a = 1$ la solución depende de dos parámetros.
26. $D(A) = (a - 1)(a - 2)(a - 3)$. Si $a = 2$ y $a = 3$ el sistema es inconsistente. Si $a = 1$, la solución depende de un parámetro.
27. $D(A) = m(m - 1)(m + 2)$. Si $m = 1$, $m = -2$, el sistema es inconsistente. Si $m = 0$, la solución depende de un parámetro.
28. $D(A) = (a - 1)^2(a + 1)$. Si $a = -1$, el sistema es inconsistente. Si $a = 1$, la solución depende de dos parámetros.

BIBLIOGRAFÍA

1. GEOMETRÍA ANALÍTICA MODERNA
(Wotton - Beckenbach - Fleming. Publicaciones Cultural

2. PROBLEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA
D. Klétenik. Editorial Latinoamericana

3. ANÁLISIS MATEMÁTICO
Haaser - La Salle - Sullivan. Editorial Trillas

4. CÁLCULO Y ÁLGEBRA LINEAL
Kaplan - Lewis. Editorial Limusa

5. CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
Edward - Penney. Editorial Prentice - Hall - Hispanoamericana

6. EL CÁLCULO
Louis Leithold. Editorial Oxford

7. CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
Larson - Hosteteler. Editorial Mc. Graw - Hill

8. CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES CON ÁLGEBRA LINEAL
Philip C. Curtis. Editorial Limusa

9. PROBLEMAS DE ÁLGEBRA SUPERIOR
D. Fadcliéer y I. Sominski. Editorial Mir - Moscu

10. PROBLEMAS DE LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES
V. Bolgov - B. Deminovich. Editorial Mir - Moscu

Ediciones